F 1736

R

REFERATIVA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

1

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 1, p. 1–234, Bucureşti, 1970

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil*;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. AVRAMESCU;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Dr. ing. V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. C. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. ȘT. GHEORGHIU;
Prof. C. APETREI;
Ing. CS. NAGY;
Dr. ing. V. PIMSNER;
Dr. ing. C. A. VASILESCU;
Dr. ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 160 de lei pe an.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: BUCUREȘTI, Șos. Vitan, nr. 236.

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 20, nr. 1 1970

SUMAR

Termoenergetică şi termotehnică

Pag.

D. GRECOV, I. IORDACHE, Lungimea flăcării difuzive în medii turbionare 3
V.V. GHIA, N. LEMNEANU, C. JIANU, Cercetări privind diametrul maxim al picăturilor la injectoarele turbionare cu retur 13
N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, ŞT. KÓŞA, N. POPESCU, Influenţa unor caracteristici fizice ale combustibilului şi mediului asupra gradului de ardere a combustibililor solizi în focarul-ciclon orizontal 23
C. HAIDUC, V. VINIŢCHI, Model fizic al procesului de fierbere în condiţii de reactor nuclear energetic 33
V. PIMSNER, P. TOMA, Metode de măsurare a grosimii filmelor lichide 34

Electroenergetică şi electrotehnică

AL. TIMOTIN, M. MARINESCU, Fluxul de dispersiune al unui circuit magnetic cu magnet permanent 53
Ad. CUPŞA, Calculul cîmpului magnetic din întrefierul aparatelor magnetoelectrice cu magnet interior 81
GR. CIVIDJIAN, Reactanţa de dispersie a spirei în scurtcircuit 97
CORNELIA IONESCU, Forţele electrodinamice exercitate asupra unui sistem trifazat de conductoare rectilinii parcurse de curent în prezenţa ecranelor electromagnetice cilindrice circulare 109
AL. TIMOTIN, I.R. CIRIC, Unicitatea soluţiilor şi calculul puterilor în cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al sistemelor axial-simetrice 125
C.I. MOCANU, Contribuţii la studiul fenomenelor de difuzie normală 139
C. APETREI, M. DOGARU, I. BEŞTEA, Variaţia excitaţiei maşinii sincrone în regimuri dinamice 159
M. BÂRGĂUANU, Forţarea excitaţiei la motoarele sincrone 169
V. RĂSVAN, Sinteza analitică a regulatorului optimal pentru o clasă de sisteme liniare cu argument întîrziat 181

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 1—234, 1970

Pag.

C. BELEA, Algoritm pentru determinarea conducerii optime în problema timpului minim folosind dezvoltări în serie Fourier 191

CR. VASILIU, Sinteza în punte a funcției de intrare bipătratică 203

Note

A. CRĂCIUNESCU, S. BUCURENCIU, Asupra echivalării schemelor cu elemente saturabile 219

Recenzii 225

Material documentar 231

LUNGIMEA FLĂCĂRII DIFUZIVE ÎN MEDII TURBIONARE *)

DE

D. GRECOV şi I. IORDACHE

662.661 : 662.95

Se pune în evidenţă fenomenul de separare flacără-mediu ambiant rotitor în cazul unei flăcări amplasate în axul unei turbion de aer tip Rankine. Se dau date experimentale privind lungimea flăcării difuzive a gazului metan în acest caz.

1. INTRODUCERE

Conform studiilor teoretice şi experimentărilor privind schimbul de masă şi de căldură în jeturi care evoluează în medii turbionare, a rezultat o puternică frînare a acestor procese pentru jeturi amplasate în axul unei curgeri turbionare tip Rankine.

Tipul de instalaţie pe care s-a realizat curgerea turbionară tip Rankine este dat în figura 1. Aerul este introdus tangenţial prin şase fante amplasate simetric la 60°, avînd fiecare o lungime de 1 000 mm şi deschidere a fantei de 5 mm. Diametrul camerei turbionare este Ø 500 mm, iar înălţimea totală a camerei $L = 2\,500$ mm, avînd amplasat la partea superioară un coş de 1 000 mm lungime şi 100 mm diametru.

Pentru determinarea lungimii flăcării s-au executat trei ferestre de cuarţ de dimensiuni 220 × 220 mm şi o serie de orificii de 10 mm diametru, amplasate la distanţă egală pe lungul generatoarei camerei cilindrice de ardere.

Consideraţiile teoretice şi rezultatele experimentale privind lungimea de amestec în jet au arătat [1], [2] că lungimea de amestecare stoechiometrică comburant-carburant este mult mărită, producînd în mod evident creşterea lungimii flăcării.

Pentru a compara rezultatele obţinute în urma experimentărilor făcute pe instalaţia din figura 1, în care aerul se introduce pe o porţiune mare a camerei de ardere, cu rezultatele obţinute pe instalaţia prezen-

* Comunicare prezentată la a XV-a sesiune ştiinţifică a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, mai 1969.

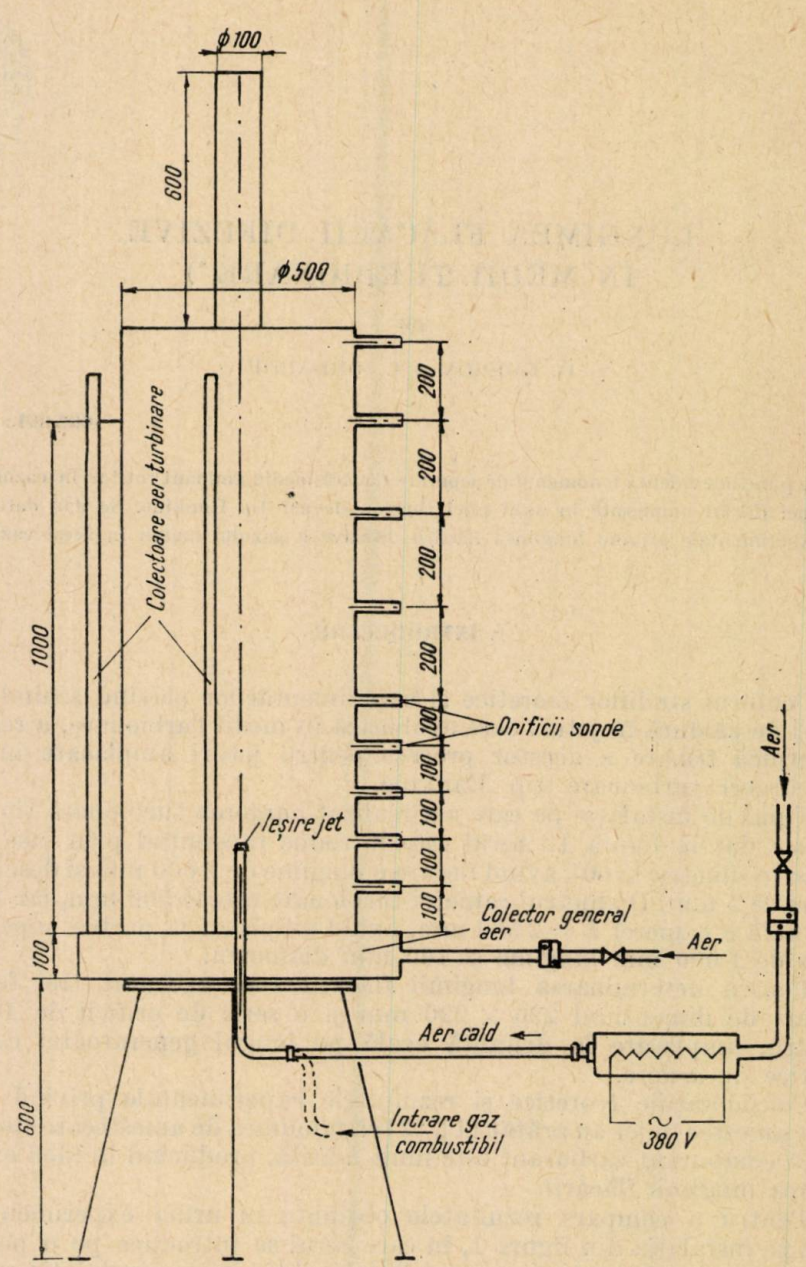


Fig. 1. — Instalația experimentală cu curgere turbionară tip Rankine.

tată în figura 2, s-au făcut experimentări în cazul cînd aerul este introdus tangenţial numai în porţiunea iniţială, utilizînd în acest scop un arzător tip melc, în care combustibilul a fost introdus şi aici în axul turbionului.

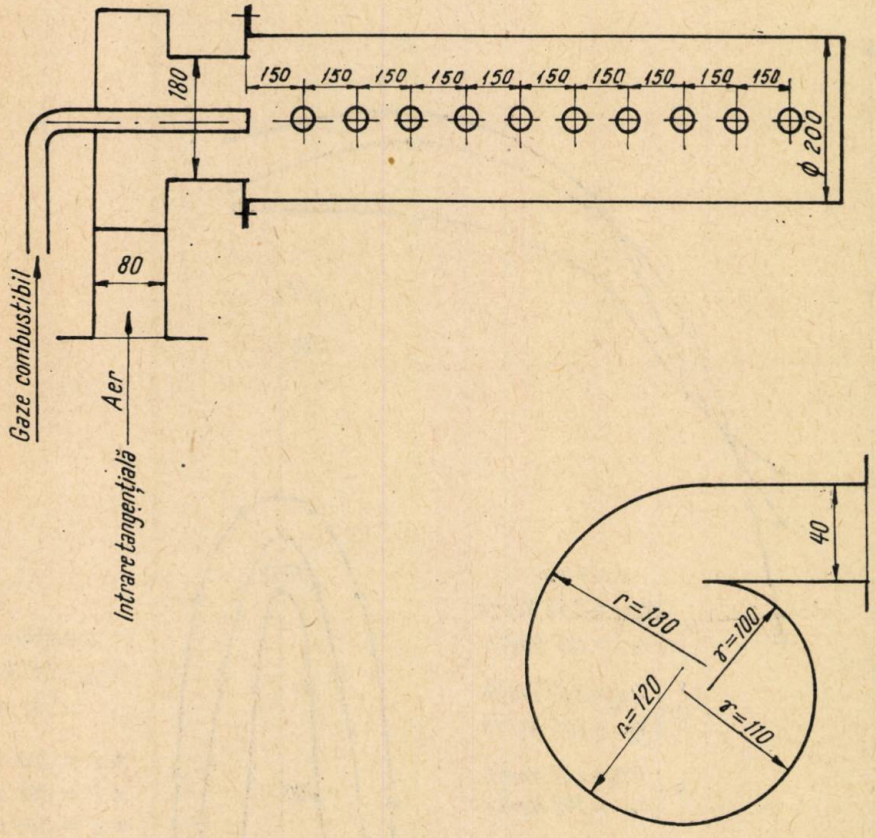


Fig. 2. — Instalaţia experimentală cu arzător turbionar tip melc.

Pentru realizarea unei turbionări puternice a aerului s-a luat caracteristica geometrică a arzătorului $A = 12{,}9$.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

În figura 3 se indică variaţia temperaturii flăcării în ax, în lungul acesteia, la debite ale gazului metan între 1,61 şi 2,42 Nm^3/h. Se remarcă tendinţa de menţinere aproape constantă a temperaturii pe o lungime mare a flăcării, la debite mai ridicate de combustibil existînd tendinţa de creştere a temperaturii. Gradientul radial al temperaturilor este foarte ridicat, ceea ce se explică prin structura flăcării, concentrată în axul mişcării de rotaţie al mediului ambiant.

Experimentările dovedesc că flăcările obținute au lungimi mai mari decît lungimea de amestecare stoechiometrică în cazul jeturilor libere de combustibil, cu o tendință puternică de creștere a lungimii cu debitul de combustibil introdus. Flacăra are aspectul unei coloane cu diametru

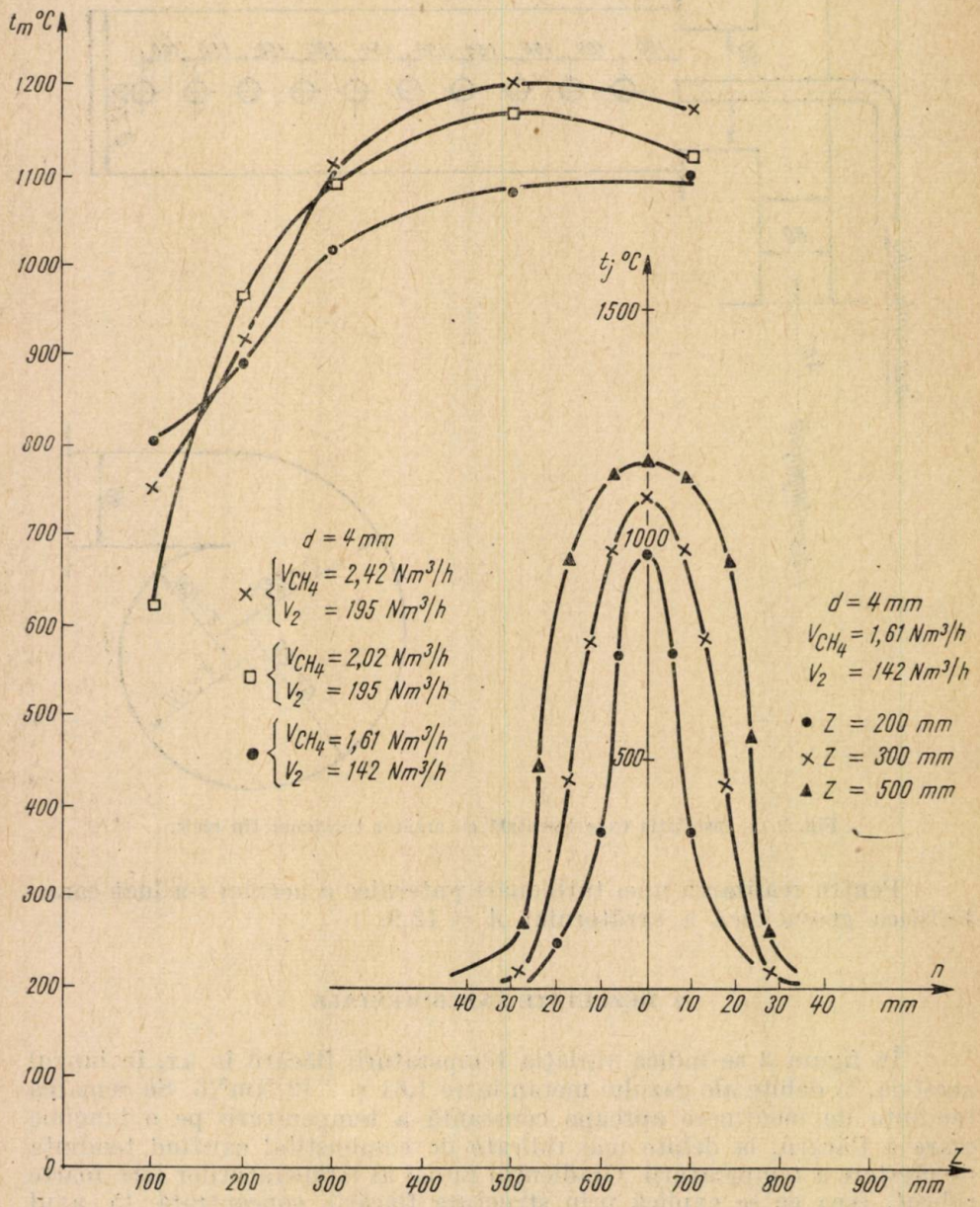


Fig. 3. — Variația temperaturii axiale și radiale în flacără.

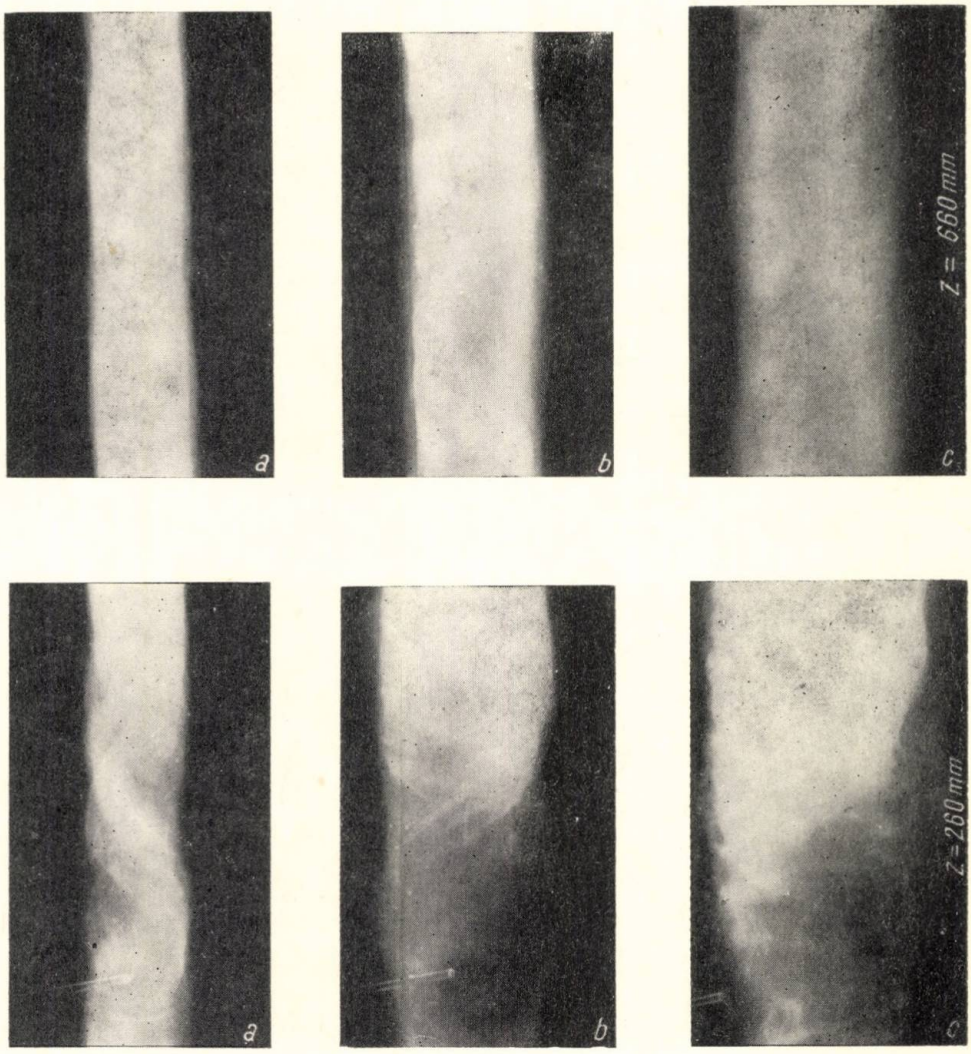


Fig. 4. — Aspectul flăcării pentru diferite debite de gaz metan ($d = 4$ mm):
a — $V_1 = 1{,}61$ Nm³/h, $V_2 = 136$ Nm³/h; b — $V_1 = 4{,}04$ Nm³/h, $V_2 = 136$ Nm³/h:
c — $V_1 = 5{,}37$ Nm³/h, $V_2 = 136$ Nm³/h.

aproape constant, în care se pot observa liniile de curent de formă spirală. Diametrul coloanei de flacără variază între 30 și 100 mm, fiind puternic influențat de debitul de combustibil introdus.

La valori mici ale circulației mișcării rotitoare, suprafața înfășurătoarei flăcării are un aspect neted, corespunzînd unui nivel foarte redus al turbulenței; totuși, în general, se observă o turbulență mai intensă în apropierea arzătorului. Aspectul flăcării se poate observa în setul de fotografii obținute prin vizarea flăcării prin ferestrele situate la înălțimea $Z = 260$ și 660 mm.

Astfel, din setul de fotografii din figurile 4 *a*, *b*, *c* se indică aspectul flăcării jetului de gaz metan cu diametrul inițial de 4 mm, debitul de aer de turbionare $V_2 = 136$ Nm³/h, debitul de gaz metan variind $V_1 = 1{,}61$, 4,04 și, respectiv, 5,37 Nm³/h. Se remarcă, într-adevăr, o creștere a diametrului flăcării o dată cu mărirea debitului de combustibil și o deformare în partea inițială a flăcării. În ultima parte a flăcării, suprafața de demarcație flacără-aer ambiant rotitor este foarte netedă, turbioanele de dimensiuni foarte mici apărînd numai la debite mari.

În figurile 5, 6 și 7 se indică variația lungimii flăcării difuzive în funcție de viteza inițială de combustibil W_1(m/s) și de viteza inițială tangențială a aerului de turbionare W_2(m/s), pentru diametre ale ajutajelor de 3,1, 4,2 și, respectiv, 6,1 mm.

Se observă că, prin mărirea vitezei aerului introdus tangențial (W_2), lungimea flăcării are o tendință de reducere. Totuși, influența circulației mișcării turbionare nu este mare în limitele valorilor W_2 utilizate în experimentări, flacăra menținîndu-se concentrată în axul flăcării turbionare. Pentru comparație, în figurile respective se indică valoarea lungimii flăcării pentru jetul liber de gaz metan (h_{of}), conform [3]. Se observă că pentru toate regimurile studiate lungimea flăcării amplasate în axul unei mișcări turbionare tip Rankine este cu mult mai ridicată decît lungimea respectivă în cazul destinderii gazului combustibil în atmosfera stagnantă. Astfel, pentru diametrul ajutajului de combustibil $d = 4{,}2$ mm (fig. 6) se obține un raport maxim $h_f/h_{of} = 2{,}8$, iar pentru $d = 6{,}1$ mm raportul respectiv este $h_f/h_{of} = 2{,}2$ (fig. 7).

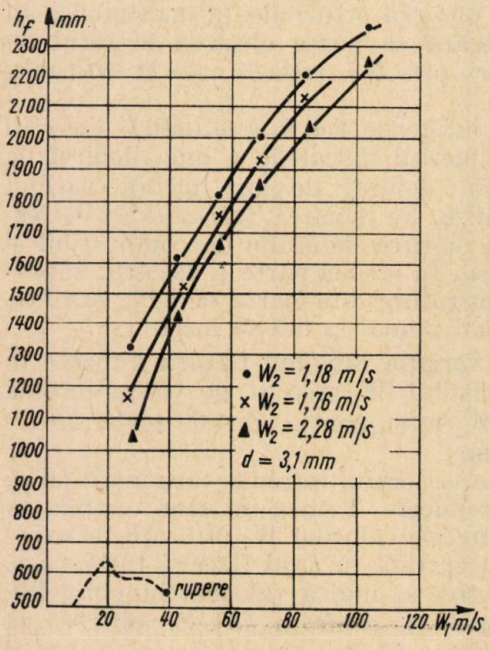
Este de asemenea interesant de semnalat că stabilitatea flăcării este mult mai mare în cazul studiat în raport cu flacăra jetului liber de combustibil. Astfel, ruperea flăcării la diametrul $d = 3{,}1$ mm are loc la viteza $u_{0r} = 40$ m/s, în timp ce, după cum se observă din figura 5, flacăra a fost stabilă și la viteze de 120 m/s. Totuși se remarcă că mărirea vitezei W_2 îngustează domeniul de stabilitate.

Deși din curbele prezentate în figurile 5, 6 și 7 se observă că creșterea debitului de aer turbionat conduce la o micșorare relativ redusă a lungimii flăcării, totuși se observă că, în cazul cînd debitul de aer este foarte redus, lungimea flăcării începe să scadă.

Astfel, în cadrul unei serii de experimentări s-a remarcat, de exemplu, că pentru diametrul ajutajului $d = 6{,}1$ mm, deși viteza de turbionare W_2 a crescut de la 0,8 la 1,91 m/s, lungimea flăcării a crescut de la 1 480 la 1 630 mm (excesul de aer în ambele cazuri a fost supraunitar).

În concluzie rezultă deci că micșorarea circulației mișcării de rotație sub anumite limite diminuează influența turbionării aerului ambiant asupra proceselor de difuzie în flacără. O creștere puternică a circulației

mişcării produce o mărire a turbulenţei mişcării şi deci o intensificare relativă a proceselor de difuzie, scăzînd lungimea flăcării. Datele experimentale în limitele studiate au arătat că lungimea flăcării este maximă la valori ale circulaţiei $\Gamma = (1 \ldots 1{,}5)\pi$.



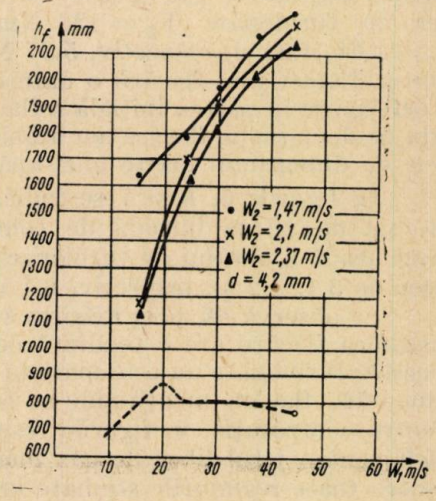


Fig. 6. — Variaţia lungimii flăcării în funcţie de vitezele W_1 şi W_2 pentru $d = 4{,}2$ mm.

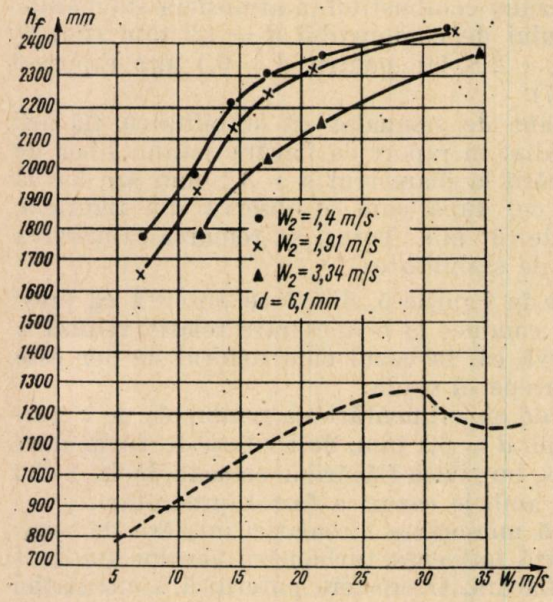


Fig. 5. — Variaţia lungimii flăcării în funcţie de viteza W_1 şi W_2 pentru $d = 3{,}1$ mm.

Fig. 7. — Variaţia lungimii flăcării în funcţie de vitezele W_1 şi W_2 pentru $d = 6{,}1$ mm.

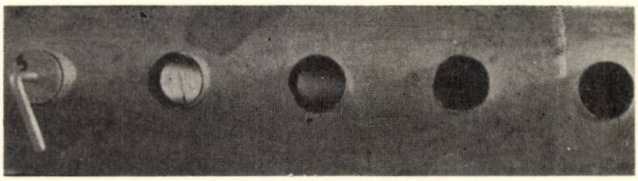


Fig. 8. — Conul central de flacără în cazul arzătorului tip melc.

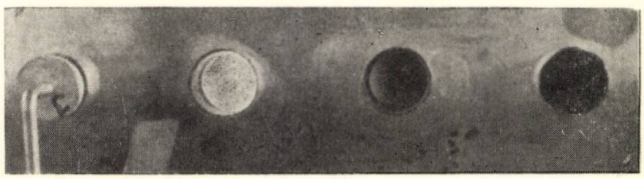


Fig. 9. — Aspectul flăcării în cazul arzătorului tip melc pentru valori scăzute ale debitului de aer turbionat.

Experimentările efectuate în cadrul instalației indicate în figura 2 au scos de asemenea în evidență fenomenul de separare al flăcării în axul mișcării turbionare. Utilizarea camerei turbionare cu caracteristică geometrică de turbionare ridicată ($A = 12{,}9$) a fost necesară pentru a obține valori mari ale vitezelor tangențiale în raport cu vitezele axiale.

În fotografia din figura 8, obținută prin orificiile de vizare deschise la distanțele $Z = 600, 750, 900$ și 1 050 mm de ajutajul jetului de combustibil, se observă conul central, cu aspect luminos galben, ceea ce indică o concentrație mare de particule de funingine în această zonă.

Este foarte interesant de semnalat că prin micșorarea debitului de aer, micșorînd modulul vitezelor tangențiale, flacăra se scurtează, conul central de flacără dispărînd. Astfel, dacă se micșorează debitul de aer turbionar de la 308 (fig. 8) la 132 Nm³/h (fotografia din figura 9) (la care orificiile de vizare sînt deschise la distanțele $Z = 300, 450$ și 600 mm), flacăra se termină la circa 450 mm de gura arzătorului, fără a se putea pune în evidență conul central. Acest fapt contravine direct rezultatelor experimentale cunoscute pînă în prezent, conform cărora creșterea debitului de aer trebuie să provoace scurtarea flăcării, ceea ce poate fi explicat numai prin fenomenul de separare a mediilor care apar în cîmpul turbionar.

În tabela 1 se dau lungimile flăcării la diverse debite de gaz metan (V_{CH_4}) și de aer (V_a) pentru diametrul ajutajului de combustibil $d = 6{,}1$ mm.

Tabela 1

V_{CH_4} Nm³/h	4,04				5,37			6,37			8	
V_a Nm³/h	316	244	167	137	316	238	145	316	237	153	316	244
h_f mm	1350	1050	970	900	1500	1420	1350	1720	1570	1500	1900	1600

Măsurătorile privind cîmpul de temperaturi în flacără au scos de asemenea în evidență existența unui con central de flacără cu temperaturi ridicate care se conservă stabil în axul camerei, provocînd o alungire puternică a flăcării.

În figura 10 se indică, de exemplu, repartiția radială în lungul flăcării a cîmpului de temperaturi, remarcîndu-se existența unui con central ca loc geometric a temperaturilor maxime.

3. CONSIDERAȚII ASUPRA LUNGIMII FLĂCĂRILOR ÎNTR-UN CÎMP ROTITOR

În cazul mișcării axial-simetrice, ecuația difuziei scrisă în coordonate polare este de forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial C}{\partial r}\right), \tag{1}$$

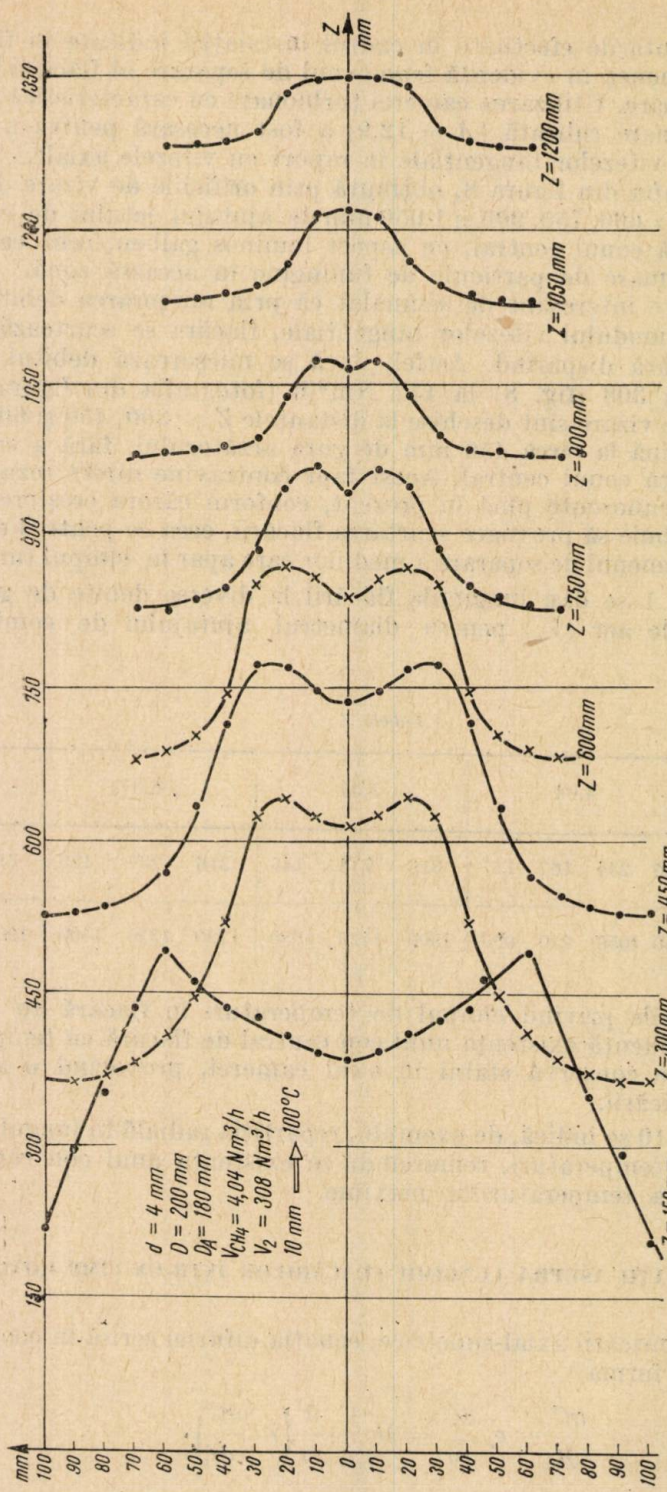


Fig. 10. — Repartiția radială a cîmpului de temperaturi în lungul flăcării.

unde v_r reprezintă o viteză radială relativă care rezultă din diferența dintre forțele centrifuge existente în diverse puncte funcție de greutatea moleculară și de densitățile substanțelor aflate în procesul de schimb de masă:

$$\frac{v_r}{D} = -f(\rho, \nu, M)\, r\omega^2, \tag{2}$$

unde ω reprezintă viteza unghiulară existentă în punctul situat la distanța r de la axul mișcării de rotație.

Considerînd în continuare o mișcare de rotație de forma $v_\theta = r\omega = \text{const}$ (această mișcare este intermediară între cvasisolidul de rotație și vîrtejul liber), ecuația (1) poate fi pusă sub forma

$$\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1+B}{r}\cdot\frac{\partial C}{\partial r}, \tag{3}$$

unde s-a notat cu B valoarea $f(\rho, \nu, M)\cdot v_\theta^2$.

Ecuația (3) poate fi pusă sub forma adimensională

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{1+B}{y}\cdot\frac{\partial C}{\partial y}, \tag{4}$$

unde s-a notat

$$\theta = \frac{4Dt}{d_0^2},$$

$$y = \frac{2r}{d_0}$$

în care d_0 reprezintă diametrul ajutajului de combustibil.

Ecuația (4) poate fi rezolvată prin separarea variabilelor admițînd o soluție de forma

$$C = Y(y)\cdot T(\theta),$$

de unde rezultă, după introducerea soluției adoptate în ecuația (4),

$$\begin{aligned} Y'' + \frac{1+B}{y}Y' + k^2 y &= 0, \\ T' + k^2 T &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Printr-o schimbare convenabilă de variabilă $Y = Zx^\alpha$, prima ecuație (5) poate fi adusă la forma canonică a ecuației Bessel:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial Z}{\partial x} + Z = 0. \tag{6}$$

Rezolvarea ecuației (4) cu introducerea condițiilor la limită și inițiale conduce la expresii complicate, din care nu se poate obține o formă simplă pentru lungimea flăcărilor. Totuși, pornind de la rezolvarea cunos-

cută a ecuaţiei (6) şi ţinînd seama de schimbarea de variabilă introdusă, se poate obţine, după introducerea condiţiilor la limită şi iniţiale,

$$\theta_f = \frac{1}{4 \ln \left[1 - C_s \left(\frac{d_f}{d_0} \right)^{-B/2} \right]}, \tag{7}$$

unde C_s reprezintă concentraţia stoechiometrică din amestecul carburant-comburant, iar d_f/d_0 raportul dintre diametrul flăcării şi diametrul iniţial al jetului la ieşirea din ajutaj.

Din relaţia (7) se poate obţine timpul în care se formează concentraţia stoechiometrică :

$$t_f = \frac{-d_0^2}{16 D \ln \left[1 - C_s \left(\frac{d_f}{d_0} \right)^{-B/2} \right]}. \tag{8}$$

Lungimea flăcării va fi $h_f = v_z t_f \simeq v_0 t_f$, unde V_z este viteza medie a jetului, care se poate lua cu aproximaţie proporţională cu viteza iniţială a jetului de combustibil :

$$h_f = - \frac{k v_0 d_0^2}{16 D \ln \left[1 - C_s \left(\frac{d_f}{d_0} \right)^{-B/2} \right]}. \tag{9}$$

Din relaţia (9) se observă că creşterea vitezei tangenţiale v_θ provoacă o creştere a valorii B, deci o mărire a lungimii flăcării h_f, iar cînd $B \to \infty$ lungimea flăcării tinde de asemenea spre infinit, separarea crescînd deci o dată cu mărirea circulaţiei cîmpului rotitor.

Desigur, experimental acest fapt nu se va observa, deoarece formula (10) nu ţine seama de creşterea intensităţii turbulenţei la valori mari ale vitezei.

4. CONCLUZII

Studiul comportării flăcărilor jeturilor de combustibil amplasate în axul unei mişcări de rotaţie tip Rankine a arătat influenţa deosebită pe care o exercită cîmpul turbionar asupra procesului de schimb de masă în flacără ; procesul respectiv fiind mult frînat, se obţine o alungire considerabilă a flăcării şi o concentrare a reacţiilor în axul flăcării.

Rezultatele obţinute se pot aplica la instalaţii care necesită lungimi mari de flacără şi cîmpuri de temperaturi uniforme în axul flăcării.

BIBLIOGRAFIE

1. N.A. Chigier, J.M. Beér, D. Grecov, K. Bassindole, *Jet Flames in Rotating Flow Fields*. Rapport XI FTCE (33) NAC, University of Sheffield, januarie 1969.
2. D. Grecov, I. Iordache, *Schimbul de masă şi de căldură în jeturi evoluînd în mediu turbionar*, St. cerc. energ. electr., *3* (1969).

CERCETĂRI PRIVIND DIAMETRUL MAXIM AL PICĂTURILOR LA INJECTOARELE TURBIONARE CU RETUR

DE

V. V. GHIA, N. LEMNEANU şi C. JIANU

C. Z. 662.68

Se determină influenţa caracteristicilor geometrice ale injectorului cu cameră de turbionare cu retur frontal şi central asupra fineţei de pulverizare. În lucrare, fineţea de pulverizare s-a caracterizat prin diametrul maxim al picăturilor pulverizate. În condiţii similare de amestec între combustibil şi aerul de ardere cu cît diametrul maxim va avea o valoare mai mare, cu atît va fi necesar un timp mai lung pentru arderea completă a picăturii. Totodată în lucrare se face o comparaţie între injectoarele cu retur frontal şi cele cu retur central.

1. INTRODUCERE

Calitatea fineţei de pulverizare este unul dintre factorii principali care determină desfăşurarea procesului de ardere a combustibililor lichizi. Această caracteristică hotărîtoare a procesului de pulverizare este determinată în special de valorile diametrelor maxim şi mediu al picăturilor pulverizate. Astfel, în condiţii similare de amestec între combustibil şi aerul de ardere, cu cît diametrul maxim va avea o valoare mai mare, cu atît va fi necesar un timp mai lung pentru arderea completă a picăturii. De aceea flacăra se va lungi, iar în cazul arzătoarelor industriale, dacă focarul nu permite aceasta, picăturile vor arde necorespunzător pe peretele acestuia, cocsificîndu-i suprafaţa.

Pentru obţinerea dimensiunilor picăturilor fin pulverizate se folosesc mai multe metode, care fiecare în parte prezintă atît avantaje, cît şi dezavantaje în funcţie de natura şi de scopul cercetărilor ce se efectuează.

Cinematografierea rapidă a jetului pulverizat, care permite studierea evoluţiei în timp şi spaţiu a picăturilor numai din zonele marginale ale jetului, necesită o tehnică experimentală şi aparataj foarte pretenţios. Avînd în vedere dezavantajele menţionate, metoda n-a găsit aplicare industrială, deşi este singura metodă care permite obţinerea formei picăturilor nedeformate prin captare. Într-adevăr, toate celelalte metode care se

folosesc în prezent, prin utilizarea dispozitivelor de captare, deformează într-o măsură mai mare sau mai mică forma reală a picăturilor pulverizate.

Astfel picăturile sînt captate :

— în medii elastice ca lichide cu diferite viscozităţi ;

— pe plăci de sticlă, care, pentru amortizarea şocului, sînt acoperite cu diferite unsori sau negru de fum ;

— pe o hîrtie specială absorbantă, pe care rămîne doar o imagine a urmei picăturii. Pentru studii comparative, de obicei se pulverizează apa sau lichide ca amestecul de glicerină cu apă, parafină topită etc, care modelează caracteristicile principale ale combustibililor arşi în focare.

De mare importanţă pentru obţinerea unor probe cît mai apropiate de condiţiile reale de funcţionare ale pulverizatorului este forma părţii terminale a sondei de captare, care trebuie să fie astfel încît să introducă o perturbare cît mai mică a jetului pulverizat.

În literatura de specialitate se prezintă unele formule pentru calculul diametrelor maxim şi mediu al picăturilor pulverizate din jet, însă valabilitatea acestora este limitată, deoarece în primul rînd se referă la un anumit tip de pulverizator şi o anumită tehnică experimentală folosită.

În cazul arzătoarelor cu cameră de turbionare şi retur nu există un punct de vedere unitar referitor la fineţea de pulverizare. După unele afirmaţii, o dată cu scăderea sarcinii injectorului fineţea de pulverizare s-ar înrăutăţi, iar după alte date această mărime caracteristică a procesului de pulverizare s-ar ameliora.

Înrăutăţirea fineţei de pulverizare şi creşterea importantă a unghiului de pulverizare o dată cu scăderea sarcinii pot constitui importante dezavantaje. Din această cauză, în ultimul timp au fost declanşate o serie de cercetări pentru perfecţionarea injectorului cu cameră de turbionare şi retur.

Unele încercări efectuate au arătat că se pot obţine îmbunătăţiri în acest sens dacă returul combustibilului se efectuează printr-o serie de orificii plasate la finele porţiunii cilindrice a camerei de turbionare, pe suprafaţa acesteia. Se realizează astfel tipul de injector mecanic cu cameră de turbionare şi retur, care a fost denumit retur frontal [5].

2. BAZA MATERIALĂ FOLOSITĂ

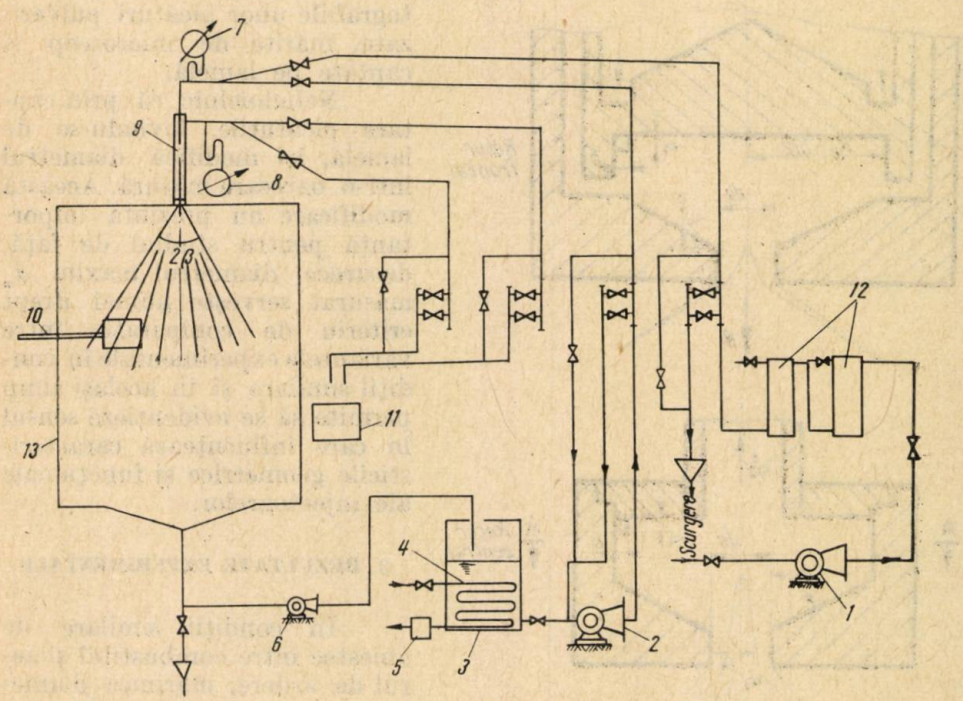
Pentru rezolvarea obiectului propus s-a conceput şi s-a realizat instalaţia experimentală a cărei schemă de principiu se prezintă în figura 1.

Se pot remarca două circuite distincte pentru pulverizarea cu apă şi cu lichide unguente (uleiuri sau amestecuri de glicerină cu apă). Se pot experimenta injectoare cu un debit pînă la circa 4 000 kgf/h. Jetul pulverizat era cinematografiat cu ajutorul unui aparat amplasat în faţa camerei de pulverizare.

În figura 2 se prezintă schiţa injectoarelor cu cameră de turbionare prevăzute cu retur printr-un orificiu central şi cu retur frontal.

S-au experimentat injectoare cu două canale tangenţiale, fiecare cu secţiunea de scurgere 2 × 2 mm, avînd diametrele camerei de turbionare $D_c = 2R_c = 18$ mm şi 12 mm, iar diametrele diuzei $d_e = 3{,}2$, 4 şi 5 mm. S-a folosit ca lichid de lucru apa, care la returul frontal era refu-

lată către sursa de alimentare prin opt orificii cu diametrul 4,2 mm, amplasate la finele porțiunii cilindrice a camerei de turbionare. La acest tip de injector s-au experimentat două variante, care difereau între ele prin lungimea l a porțiunii tronconice a camerei de turbionare. Astfel la varianta A s-a luat $l = 20$ mm, iar la varianta B s-a luat $l = 9$ mm.



1 - Pompă de apă
2 - Pompă cu roți dințate
3 - Rezervor ulei
4 - Refrigerent
5 - Termostat
6 - Pompă de recirculație
7 - Manometru (măsoară presiunea P_i)
8 - Manometru (măsoară presiunea P_r)
9 - Injector
10 - Dispozitiv de captat picături
11 - Vas de captat returul
12 - Rezervoare de amortizare
13 - Cameră de pulverizare

Fig. 1. — Instalația experimentală folosită.

La injectoarele cu cameră de turbionare și retur central, orificiul de retur a avut diametrele 12, 8 și 6 mm. S-a funcționat la presiunea de injecție de 20—30 kgf/cm², iar raportul de recirculare a fost variat de la 1 pînă la circa 0,2.

Experimentările au arătat că picăturile cu diametrul cel mai mare sînt repartizate în zona de densitate mărită a lichidului pulverizat [16]. De aceea această zonă a fost explorată în special la o distanță de diuză a injectorului între 400 mm și 750 mm, funcție de penetrația jetului pulverizat.

Picăturile fin pulverizate au fost captate pe lamele de sticlă acoperite cu un strat constituit dintr-o soluție rezultată din amestecul între vaselină

şi ulei. Lamela de captare era introdusă într-un dispozitiv special care permitea deschiderea şi obturarea rapidă a unei fante prin care se făcea admisia picăturilor pulverizate către lamelă. Picăturile captate pe lamelă erau examinate la un microscop cu reticol gradat, care le mărea dimensiunea de circa 100 de ori.

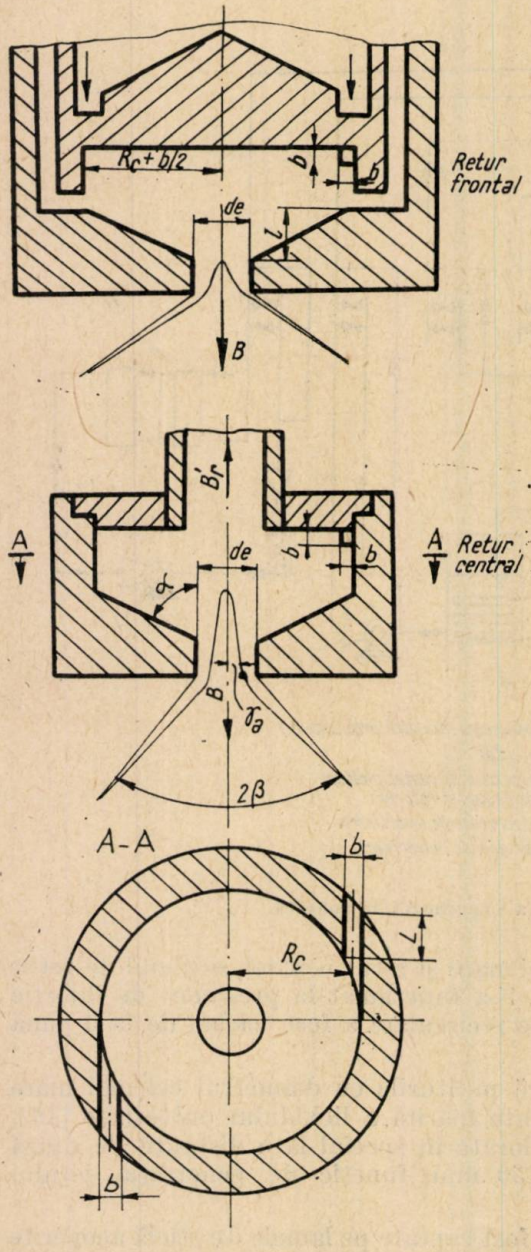


Fig. 2. — Injectoare cu retur central şi frontal.

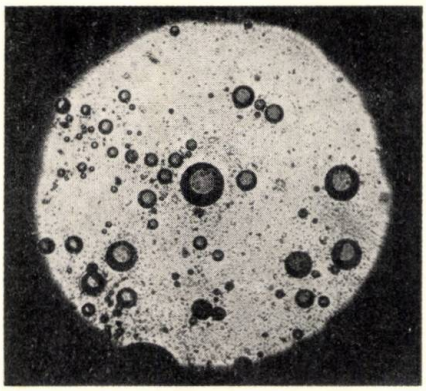
În figura 3 se prezintă fotografiile unor picături pulverizate, mărite de microscop şi captate pe lamelă.

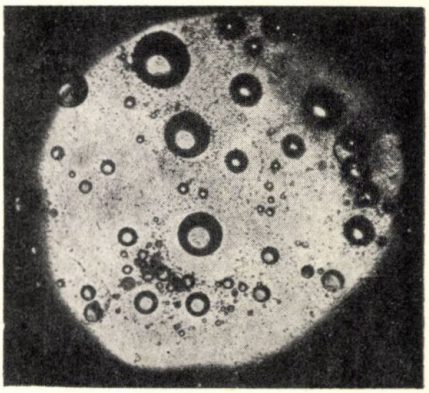
Neîndoielnic că prin captare picăturile, lovindu-se de lamelă, îşi modifică diametrul într-o oarecare măsură. Această modificare nu prezintă importanţă pentru studiul de faţă, deoarece diametrul maxim d_m măsurat serveşte numai drept criteriu de comparaţie între variantele experimentale în condiţii similare şi în acelaşi timp permite să se evidenţieze sensul în care influenţează caracteristicile geometrice şi funcţionale ale injectoarelor.

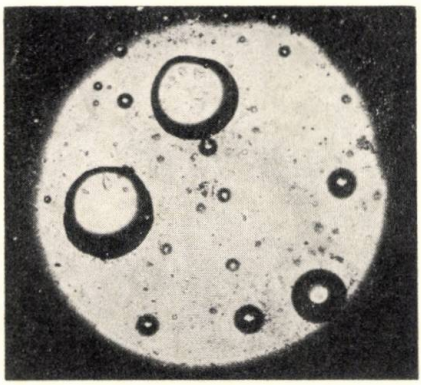
3. REZULTATE EXPERIMENTALE

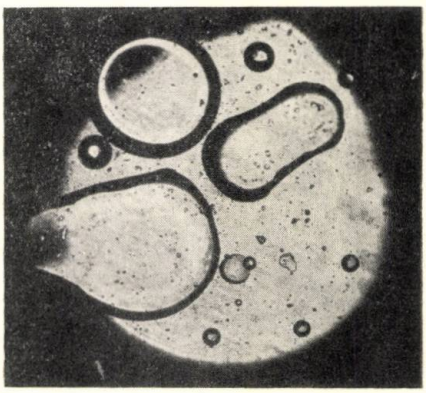
În condiţii similare de amestec între combustibil şi aerul de ardere, mărimea diametrului maxim d_m al picăturilor pulverizate este factorul principal care determină lungimea flăcării. Astfel, cu cît d_m va avea o valoare mai mare,cu atît va fi necesar un timp mai lung pentru arderea completă a picăturii. De aceea flacăra se lungeşte şi dacă focarul nu permite aceasta, picăturile vor arde necorespunzător pe peretele acestuia, cocsificîndu-i suprafaţa.

Pe baza teoriei injectoarelor cu cameră de turbionare şi retur funcţionînd cu fluid ideal se poate deduce că prin micşorarea debitului de lichid pulverizat B se oferă condiţii de pulverizare tot mai bune, ceea ce ar determina micşorarea diametrului d_m.









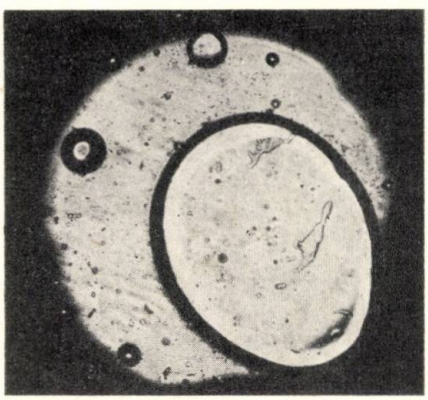


Fig. 3 — Picături captate mărite la scară.

Astfel s-a dedus că între caracteristica geometrică a camerei de turbionare A, coeficientul de umplere al diuzei φ şi raportul de recirculare n există relaţia [12]

$$n = \frac{A \cdot \varphi \sqrt{\varphi}}{2(1-\varphi)}, \tag{1}$$

unde

$$A = \frac{\pi \cdot R_c \cdot r_e}{S_t}; \qquad \varphi = 1 - \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^2; \qquad n = \frac{B}{B_t}.$$

Semnificaţia notaţiilor ce apar este următoarea:

B — debitul de lichid pulverizat prin diuză, în kgf/h;
B_t — debitul total de lichid introdus în camera de turbionare, în kgf/h;
r_e — raza diuzei, în m;
b — latura secţiunii pătrate a canalelor tangenţiale, în m;
$R_c + b/2$ — raza camerei de turbionare, în m;
r_a — raza turbionului de aer la refularea jetului în diuză, în m.

Expresia grosimii pînzei de lichid care iese din diuză este

$$\delta = r_e - r_a = r_e(1 - \sqrt{1-\varphi}), \tag{2}$$

unde $r_a = r_e\sqrt{1-\varphi}$ arată că δ se micşorează o dată cu scăderea coeficientului de umplere φ.

Deoarece

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2\varphi} \cdot A}{2(1-\varphi)^2} > 0, \tag{3}$$

pentru $0 < \varphi < 1$, rezultă că φ se micşorează atunci cînd n scade. Similar şi grosimea δ se micşorează o dată cu scăderea raportului de recirculare n, adică o dată cu scăderea debitului de lichid pulverizat B.

Deoarece diagramele funcţionale ale injectoarelor turbionare cu retur sînt de tipul celui prezentat în figura 4, rezultă că scăderea debitului pulverizat B se poate realiza prin scăderea presiunii p_r din camera de turbionare atunci cînd presiunea p_t la intrarea în aceasta se menţine constantă.

De aceea considerăm că relaţia de calcul a diametrului maxim al picăturilor pulverizate dată de A. Kapitaniak [14] poate servi doar ca orientare:

$$d_m = \frac{3{,}72\, r_e^{0{,}56} \left(\frac{\eta^2 \cdot 10^6}{2\sigma \cdot \rho}\right)^{0{,}11}}{W_e^{0{,}33}}, \tag{4}$$

unde

$$W_e = \frac{\sqrt{1-\varphi} \cdot p_i \cdot 10^4}{\sigma}.$$

Semnificaţia noilor notaţii care apar este următoarea:

η — viscozitatea dinamică a lichidului, în kgf.s/m²;
σ — tensiunea superficială a lichidului, în kgf/cm;
ρ — densitatea lichidului, în kgf.s²/m⁴.

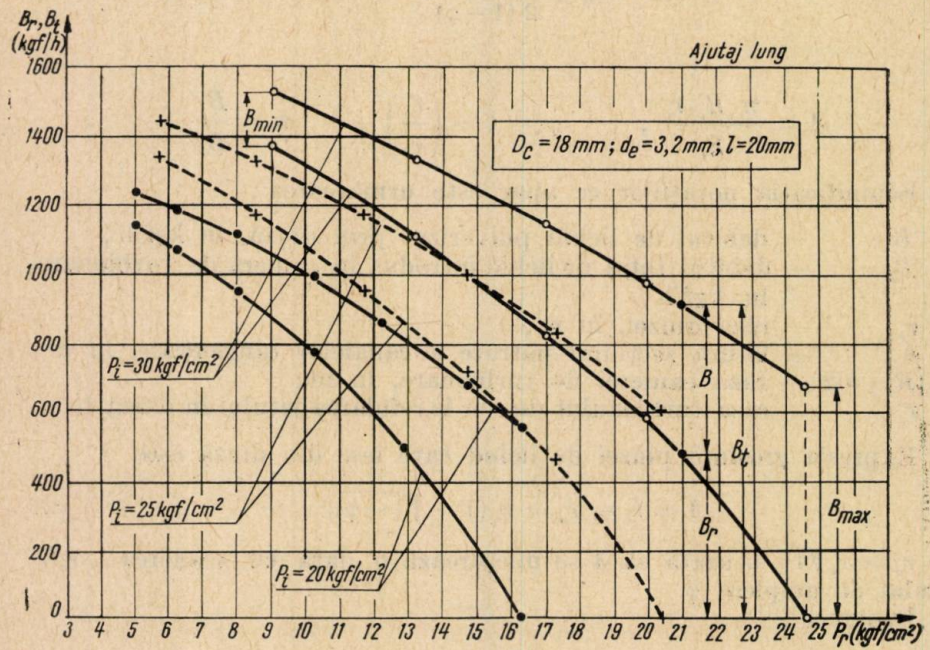


Fig. 4. — Curbele funcţionale $B_r = f(p_r)$ şi $B_t = F(p_r)$.

Remarcăm că d_m se măreşte o dată cu scăderea presiunii p_i. Într-adevăr, în special la valori relativ mici, presiunea p_i are o influenţă sensibilă asupra diametrului d_m, cînd în timpul funcţionării injectorului se menţine constantă diferenţa $\Delta p = p_i - p_r$. În cazul experimentărilor efectuate, diferenţa de presiune Δp a variat în limite mari, astfel că formula (4) nu poate fi folosită în calcule.

Menţinînd constantă presiunea p_i şi micşorînd presiunea p_r pentru a reduce debitul B, adică raportul de recirculare n, se micşorează penetraţia jetului, înrăutăţindu-se condiţiile de pulverizare ale lichidului refulat prin diuză. De aceea, prin reducerea sarcinii injectorului apar două tendinţe contradictorii care influenţează diametrul d_m. Se poate face ipoteza că, pînă la o anumită valoare n_0 a scăderii raportului de recirculare, efectul micşorării grosimii peliculei de lichid refulat din diuză este preponderent faţă de efectul scăderii presiunii p_r. Astfel, pînă la limita n_0, diametrul d_m se va micşora o dată cu scăderea raportului n, urmînd ca în continuare d_m să crească cu scăderea lui n.

Cercetările experimentale efectuate au confirmat această ipoteză şi în special caracteristicile geometrice ale injectorului. Avînd în vedere considerentele menţionate, se poate vorbi de un domeniu optim de reglaj al injectorului, cuprins între două valori n_1 şi n_2 ale raportului n, pentru

care diametrele maxime ale picăturilor pulverizate d_{m_1} și d_{m_2} sînt situate sub o anumită limită impusă.

De asemenea diametrul d_m poate servi drept criteriu de comparație între diferitele injectoare cu cameră de turbionare și retur, atît prin precizarea mărimii domeniului de reglaj optim $n = n_1 - n_2$, cît și prin valoarea minimă a diametrului maxim al picăturilor d_{m_0} corespunzătoare la n_0.

În figura 5 se prezintă rezultatele experimentale obținute la injectorul cu cameră de turbionare și retur frontal, prevăzute cu ajutajul de scurgere către diuză prelungit.

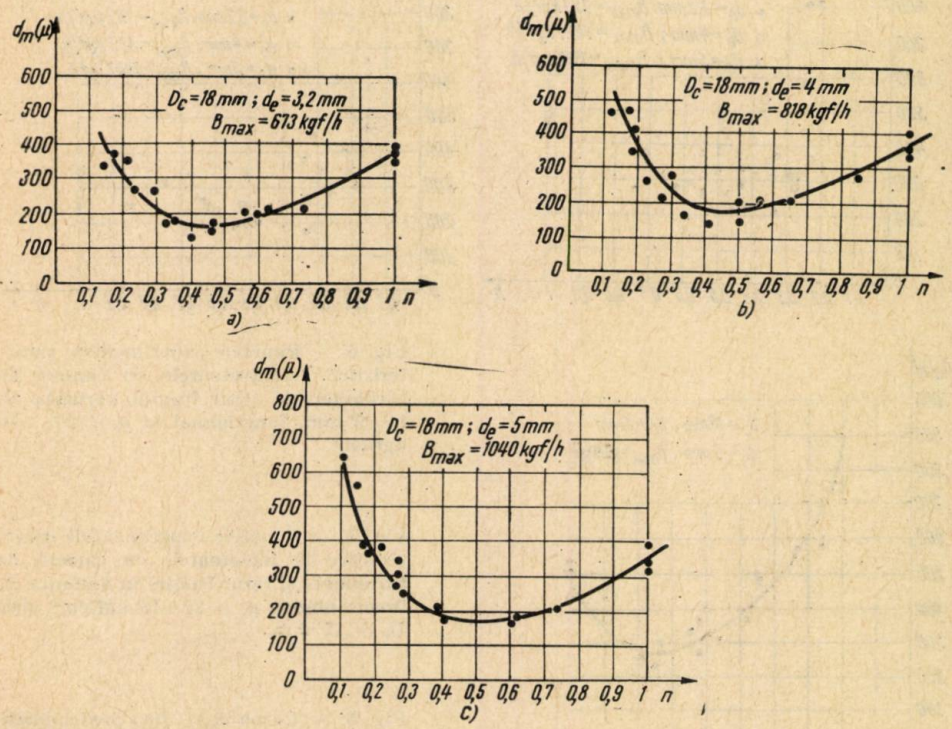
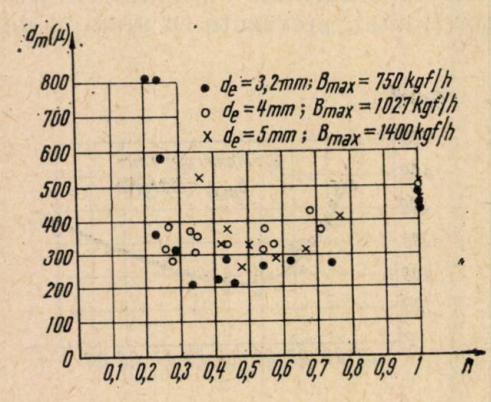


Fig. 5. — Curbele $d_m = f(n)$ pentru injectoarele cu cameră de turbionare și retur frontal varianta A, l = 20 mm, funcționînd la p_i = 20...30 kgf/cm².

Se remarcă faptul că valoarea minimă n_0 este situată aproximativ în jurul valorii $n = 0{,}4$, iar picăturile cele mai grosier pulverizate, pentru rapoarte de recirculare mici, apar la diametrul diuzei injectorului d_e=5 mm.

Micșorarea înălțimii l a porțiunii tronconice aferente diuzei nu permite ameliorarea caracteristicilor de pulverizare. Într-adevăr, așa cum se va constata, prin variația debitului pulverizat B se realizează o mare variație a unghiului de pulverizare. Din figura 6 rezultă că diametrul maxim d_m are valori întrucîtva mai mari ca la injectoarele precedente. Această situație este explicabilă dacă avem în vedere înrăutățirea condițiilor de scurgere a lichidului către diuză ca urmare a variației mai bruște de la secțiunea camerei de turbionare la secțiunea diuzei.

Prin micşorarea diametrului camerei de turbionare astfel că $D_c = 12$ mm, apar pulsaţii în jet, care devin cu atît mai perturbatoare, cu cît diametrul diuzei se măreşte. De aceea aceste injectoare nu se pot recomanda pentru a se aplica în practică, deşi, aşa cum apare din figura 7, rezultatele asupra diametrului d_m sînt apropiate de cele mai bune obţinute anterior.



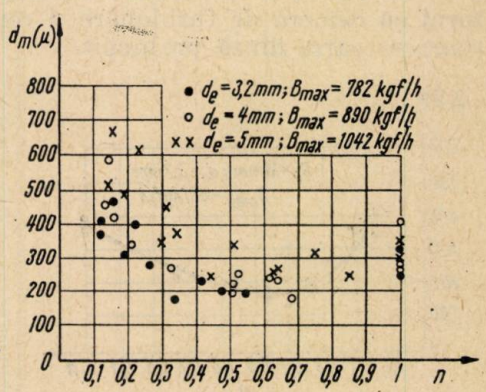


Fig. 6. — Punctele experimentale caracteristice la injectoarele cu cameră de turbionare şi retur frontal varianta B, $l = 9$ mm, funcţionînd la $p_i = 20...30$ kgf/cm².

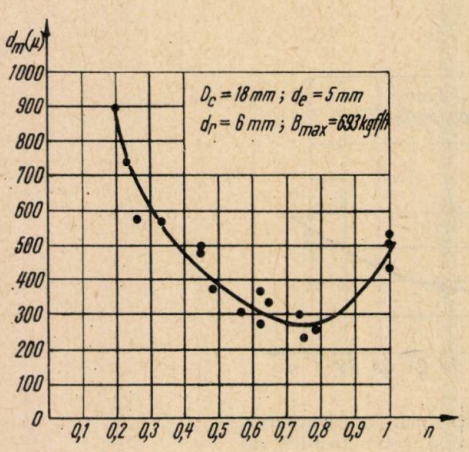


Fig. 7. — Punctele experimentale caracteristice la injectoarele cu cameră de turbionare şi retur frontal în varianta B, funcţionînd la $p_i = 20-30$ kgf/cm², cînd $D_c = 12$ mm.

Fig. 8. — Curba $d_m = f(n)$ pentru injectorul turbionar cu retur central ($d_e = 5$ mm), funcţionînd la $p_i = 20...30$ kgf/cm².

La variantele B, realizîndu-se returul printr-un orificiu central cu aceeaşi secţiune de scurgere ca a orificiilor de la returul frontal, s-au obţinut injectoare care dădeau jeturi pulverizate cu pulsaţii deosebit de accentuate. Pulsaţiile îşi micşorau amplitudinea pe măsură ce se micşora diametrul orificiului central de retur d_r. La $d_r = 6$ mm s-a realizat o funcţionare sigură şi liniştită astfel că aceste rezultate le vom compara cu rezultatele bune obţinute anterior. În figura 8 se prezintă rezultatele experimentale pentru $D_c = 18$ mm şi valoarea cea mai mare a diametrului diuzei $d_e = 5$ mm, ceea ce ne permite să facem o comparaţie cu rezultatele din figurile 5 şi 6.

În conformitate cu datele din figura 9 se poate aprecia că se realizează o oarecare ameliorare la injectoarele cu cameră de turbionare şi retur frontal prin micşorarea diametrului diuzei.

Se remarcă faptul că la injectorul cu retur central caracteristicile de pulverizare sînt inferioare faţă de injectorul cu retur frontal, deoarece :

— diametrul d_m are valori mai mari ;

— valoarea minimă a lui d_m se realizează pentru $n_0 = 0{,}7$, astfel că domeniul de reglaj, la o finețe de pulverizare acceptabilă, este mai îngust ;

— consumul de energie pentru pulverizare este mult mai mare.

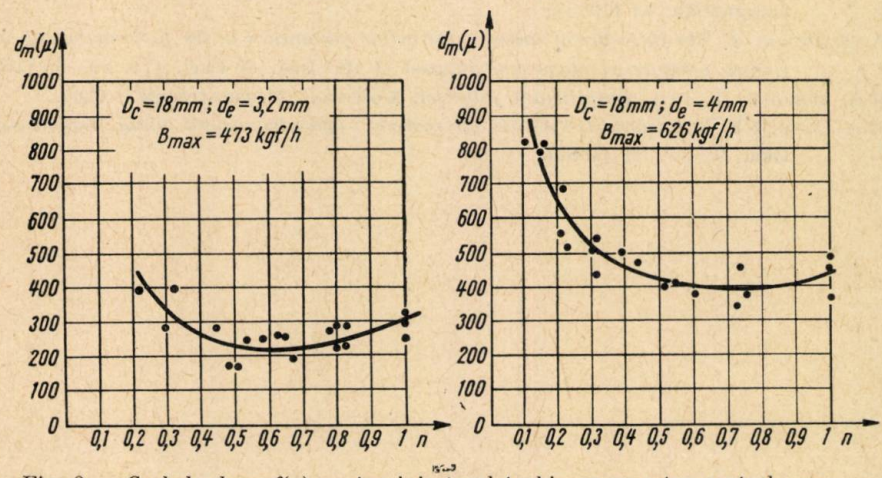


Fig. 9. — Curbele $d_m = f(n)$ pentru injectorul turbionar cu retur central = şi 4 mm), funcţionînd la $p_i = 20...30$ kgf/cm².

Această ultimă afirmaţie apare evidentă dacă remarcăm că pentru $p_i = 30$ kgf/cm² la returul printr-un orificiu central $B_{max} = 693$ kgf/h, iar la returul frontal în varianta A, $B_{max} = 1\,040$ kgf/h, iar în varianta B, $B_{max} = 1\,400$ kgf/h. Rezultă de aici că şi la $n = 1$ poziţia orificiilor de retur au o mare influenţă asupra valorii debitului, deşi prin acesta apar modificări mici ale camerei de turbionare.

Aşa după cum s-a constatat experimental, în varianta A se realizează o variaţie cu sarcina mult mai mică a unghiului de pulverizare.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bowen, *The spill pressure-jet atomizer*, Journal of the Inst. of Fuel, *262* (1962).
2. — *Fuel supply systems*, brevet S.U.A. nr. 395/611 din 20 iulie 1965.
3. — *Automatic gun system*, brevet S.U.A. nr. 3 212 555 din 28 decembrie 1964.
4. A.I. Karabin, *Sjiganie jidkogo topliva v promîşlenîh ustanovkah*, Moscova, Metallurghizdat, 1967.
5. V. Ghia, C. Jianu, *Calculul coeficientului de debit la injectoarele cu cameră de turbionare şi retur*. St. cerc. energ. electr., **19**, *1*, ... (1969).
6. N.G. Abramovici, *Prikladnaia gazovaia dinamika*, Moscova, GITT, 1951.
7. T.D. Karpuhovici, *O vîbore naivîgodneisego diametra kamerî zavihreniia fentrobejnoi forsunki*, Teploenerghetica, *11*, 79—82, 1960.

8. H. GEBHARDT, *Die Tropfengrössen bei Drallzerstäulung*, Maschinenbautechnik, *1*, 37—39 (1959); *3*, 83—91 (1959).
9. V.V. TALAKVAZE, *Teoria i rasciot ţentrobejnoi forsunki*, Teploenerghetika, *2*, 43—50 (1961).
10. A.L. KLIACIKO, *K teorii ţentrobejnoi forsunki*, Teploenerghetika, *3*, 34—37 (1962).
11. A.M. PRAHOV, *O novom napravlenii v teorii ţentrobejnoi forsunok*, Teploenerghetika, *2* (1963).
12. V. GHIA, *Determinarea unghiului de pulverizare la injectoarele cu cameră de turbionare cu întoarcere*, Energetica, *9*, 389—394 (1966).
13. L.S. BRISKIN, *K opredelenia koefiţienta rashoda ţentrobejnih forsunok obitnih slivom*, Teploenerghetika, *10* (1963).
14. A. KAPITANIAK, *The influence of chosen construction parameters in the performance of spill-control pressure-jet atomizers*, Journal of the Inst. of Fuel, *312*, 26—35 (1967).
15. V.A. BORODIN şi ALŢII, *Raspilivanie jidkostei*, Moscova, „Maşinostroenie", 1967.
16. G.A. BLOH, S.E. KICIGHINA, *O koeffiţientah rashoda i uglah konusnosti fakela*, Teploenerghetika, *10*, 35—41 (1957).

INFLUENȚA UNOR CARACTERISTICI FIZICE ALE COMBUSTIBILULUI ȘI MEDIULUI ASUPRA GRADULUI DE ARDERE A COMBUSTIBILILOR SOLIZI ÎN FOCARUL-CICLON ORIZONTAL

DE

N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, ȘT. KOȘA și N. POPESCU

C. Z. 662.921

Pornind de la ecuațiile timpului de separare și ale timpului de ardere a particulelor de combustibili solizi în volumul focarului-ciclon, s-a calculat cu ajutorul unui model analogic pe calculatorul analogic gradul de ardere al combustibilului.

Se dau rezultatele obținute pentru calculul gradului de ardere în condițiile variației unor caracteristici fizice ale combustibilului și mediului în cazul arderii unui combustibil polidispers în volumul unui focar-ciclon orizontal avînd diametrul de 500 mm.

Întrucît procesul de ardere a combustibililor solizi în focare-ciclon se desfășoară cu viteze mari, este necesar ca pentru menținerea unui randament de ardere ridicat să fie cunoscute influențele caracteristicilor combustibilului și mediului asupra evoluției procesului de ardere.

Este cunoscut că în focarul-ciclon procesul de ardere are loc parțial în timpul cît faza solidă se găsește în suspensie și parțial cît aceasta se găsește pe pelicula de zgură. Procesele de schimb de căldură și schimb de masă care au loc în cele două perioade sînt diferite, ca și legile care le determină. Perioada cea mai importantă a timpului de ardere a particulelor de combustibil este perioada de ardere în suspensie. Întrucît în această perioadă mijloacele hidrodinamice permit o intensificare importantă a proceselor de schimb de masă și schimb de căldură, în lucrarea de față vom analiza influența unor caracteristici fizice ale combustibilului și mediului pentru această perioadă.

Așa cum am arătat într-o lucrare anterioară [1], cercetarea evoluției procesului de ardere în focarul-ciclon orizontal la funcționarea neizotermică bifazică, ca și studiul influenței caracteristicilor combustibilului și mediului asupra gradului de ardere, poate fi făcută pe două căi :

— cercetarea experimentală a fenomenului de ardere și trasarea curbelor de izoconcentrații și izograde de ardere a combustibilului [2]—[5];

— cercetarea procesului de ardere pornind de la evoluţia hidrodinamică a suspensiei solide şi de la evoluţia procesului de ardere a particulei de combustibil solid [6], [7].

În cadrul primei grupe de cercetări, studiul influenţei caracteristicilor fizice ale combustibilului şi mediului asupra gradului de ardere se analizează pe instalaţii de laborator sau industriale, iar în cadrul celei de-a doua grupe acest studiu se face pe cale teoretică. În acest caz este necesar să se cunoască, pe de o parte, structura aerodinamică a spaţiului în care se mişcă particula şi, pe de altă parte, legea de ardere a particulei de combustibil.

Într-o serie de lucrări anterioare [8]—[13] s-a prezentat structura aerodinamică a focarului-ciclon la funcţionarea izotermică, monofazică şi bifazică, iar în lucrările [14]—[16] s-a prezentat influenţa caracteristicilor combustibilului şi mediului asupra vitezei de ardere a particulei de combustibil în diverse condiţii. De asemenea, în lucrările [1]—[3],[5] s-au prezentat influenţa neizotermicităţii şi concentraţiei combustibilului asupra structurii aerodinamice a spaţiului focarului-ciclon.

Ţinînd seama de aceste rezultate, se va încerca în continuare să se studieze influenţa unor caracteristici ale combustibilului şi mediului asupra gradului de ardere a combustibilului în focarul-ciclon orizontal în ipoteza că nu există influenţă mutuală între diverse particule.

Cu aceste precizări, evoluţia mişcării unei particule solide în volumul focarului-ciclon orizontal la funcţionarea neizotermică (ţinînd seama de uniformizarea temperaturii în volumul focarului) ia următoarele forme:

— pentru domeniul cvasisolid:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_p^2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_p} \frac{dr}{d\tau} - \omega^2 r = 0; \tag{1}$$

— pentru domeniul cvasipotenţial:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_p^2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_p} \frac{dr}{d\tau} - \frac{w_i^2 r_i^2}{r^3} = 0, \tag{2}$$

unde

r este raza curentă,
ν — viscozitatea dinamică a fluidului portant,
φ — factorul de formă al particulei,
d_p — diametrul particulei,
γ — greutatea specifică a fluidului portant,
γ_p — greutatea specifică a particulei,
ω — viteza unghiulară a mişcării fluidului,
w_i — viteza de insuflare a fluidului portant,
r_i — raza de insuflare a fluidului portant,
τ — timpul.

În cazul funcţionării bifazice a ciclonului, concentraţia k a combustibilului influenţează asupra vitezei tangenţiale conform relaţiei

$$w_i^* = ak^n w_i. \tag{3}$$

În acest caz, ecuaţiile (1) şi (2) devin

— pentru domeniul cvasisolid :

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_p^2}\frac{\gamma}{\gamma_p}\cdot\frac{dr}{d\tau} - (ak^n)^2\omega^2 r = 0; \tag{4}$$

— pentru domeniul cvasipotenţial

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_p^2}\frac{\gamma}{\gamma_p}\frac{dr}{d\tau} - (ak^n)^2\frac{w_t^2 r_t^2}{r^3} = 0. \tag{5}$$

Ecuaţiile (4) şi (5) reprezintă ecuaţiile traiectoriei unei particule solide la funcţionarea ciclonului în regim bifazic.

În conformitate cu rezultatele obţinute în lucrările [14]—[16], timpul total de ardere al particulei are expresia

$$\tau_{tot} = \tau_p + \tau_v + \tau_r, \tag{6}$$

în care

$$\tau_p = k_{p_0}\frac{d_{pm}^{0,62}}{T^{4,05}T_a^{1,75}O_2^{0,66}w_r^{1,16}}B_1 \tag{7}$$

este timpul de pregătire

$$\tau_v = k_v d_{p_m}^2 \tag{8}$$

este timpul de ardere al volatilelor şi

$$\tau_r = \frac{Br}{T_a^{0,78}w_r^{0,32}}\left(\frac{2090}{T} - 0{,}64\right)\left(\frac{46{,}7}{O_2} - 1{,}23\right)K_{D\left(\substack{1000°C\\21\%O_2}\right)}d_{p_m}^2 \tag{9}$$

este timpul de ardere al reziduului carbonos, unde

K_{p_0} este constantă funcţie de natura combustibilului,
K_v — constanta timpului de ardere a volatilelor,
$K_{D\left(\substack{1000°C\\21\%O_2}\right)}$ — constanta timpului de ardere a reziduului carbonos,
d_{pm} — diametrul mediu al particulei,
T — temperatura,
T_a — temperatura de preîncălzire a aerului,
O_2 — concentraţia oxigenului,
w_r — viteza relativă mediu-particulă,
B_1 — constantă funcţie de natura combustibilului,
B_r — constantă funcţie de natura combustibilului.

Considerînd particula sferică, diametrul particulei funcţie de greutate are expresia

$$d_{p_0}^2 = \frac{6G_p}{\gamma_p \pi d_{p_0}}, \tag{10}$$

unde G_p este greutatea particulei, d_{p_0} 4 diametrul iniţial al particulei şi γ_p greutatea specifică a particulei.

Înlocuind ecuaţia (10) în ecuaţia (9), după o serie de calcule se obţine

$$G_p = \frac{\pi \gamma_p d_{p_0} T_a^{0,78} w^{0,32}}{6 B_r K_{D\left(\substack{1000^\circ C \\ 21\% O_2}\right)} \left(\frac{2090}{T} - 0,64\right) \left(\frac{46,7}{O_2} - 1,23\right)} \tau_r. \qquad (11)$$

Cantitatea de combustibil care a ars după timpul elementar $d\tau$ are expresia

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{\pi \gamma_p d_{p_0} T_a^{0,78}}{6 B_r K_{D\left(\substack{1000^\circ C \\ 21\% O_2}\right)} \left(\frac{2090}{T} - 0,64\right) \left(\frac{46,7}{O_2} - 1,23\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{0,32}, \qquad (12)$$

în care d_{p_0} se consideră constantă.

În relaţia (12), $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)$ reprezintă viteza relativă mediu-particulă, care, în cazul focarului-ciclon şi cu simplificările introduse în lucrările [8], [9], reprezintă chiar viteza radială a particulei, care poate fi calculată prin integrarea ecuaţiilor (1), (2) în cazul unei singure particule ($k = 0$), respectiv (4), (5) în cazul unei concentraţii k de combustibil.

În vederea integrării ecuaţiei (12) s-a apelat la modelarea acesteia pe calculatorul analogic MECAN-2 al Institutului de energetică al Academiei R.S. România *).

În lucrarea anterioară [1] s-a prezentat acest model de calcul. Cu ajutorul modelului au fost studiate : influenţa concentraţiei şi diametrului particulelor, precum şi influenţa temperaturii medie din volumul focarului asupra gradului de ardere a combustibilului. Astfel, în figura 1 se prezintă influenţa concentraţiei combustibilului asupra cantităţii de combustibil ars în condiţiile $W_t = 25$ m/s, $d_p = 500$ μ, $t = 1\,400$°C, $\gamma_p = 1\,300$ kgf/m³, $\frac{d_e}{D} = 0,4$, $t_{ap} = 500$°C, lignit de Rovinari.

Este de observat influenţa negativă a creşterii concentraţiei de combustibil asupra gradului de ardere a acestuia, ceea ce se explică prin faptul că creşterea concentraţiei de combustibil duce la scăderea vitezei relative mediu-particulă şi deci la scăderea vitezei de ardere.

S-a analizat în continuare influenţa diametrului echivalent al particulei de combustibil asupra gradului de ardere a acestuia (fig. 2) pentru condiţiile $W_t = 25$ m/s ; $t = 1\,200$°C ; $\gamma_p = 1\,300$ kgf/m³ $\frac{d_e}{D} = 0,4$; $t_{ap} =$ $= 500$°C, lignit de Rovinari.

Din această diagramă se observă arderea completă a particulei de 100 μ în stare de suspensie şi arderea numai parţială în suspensie a particulelor de 500 μ.

În figura 3 este reprezentată influenţa temperaturii din volumul focarului-ciclon asupra gradului de ardere a combustibilului format din particule de $d_p = 100$ μ, la concentraţii $k = 0$ şi $W_t = 25$ m/s, $\gamma_p = 1\,300$ kgf/m³, $\frac{d_e}{D} = 0,4$, $t_{ap} = 500$°C, lignit de Rovinari.

* La efectuarea calculelor a participat tov. ing. Napu Sebastian de la Institutul de energetică.

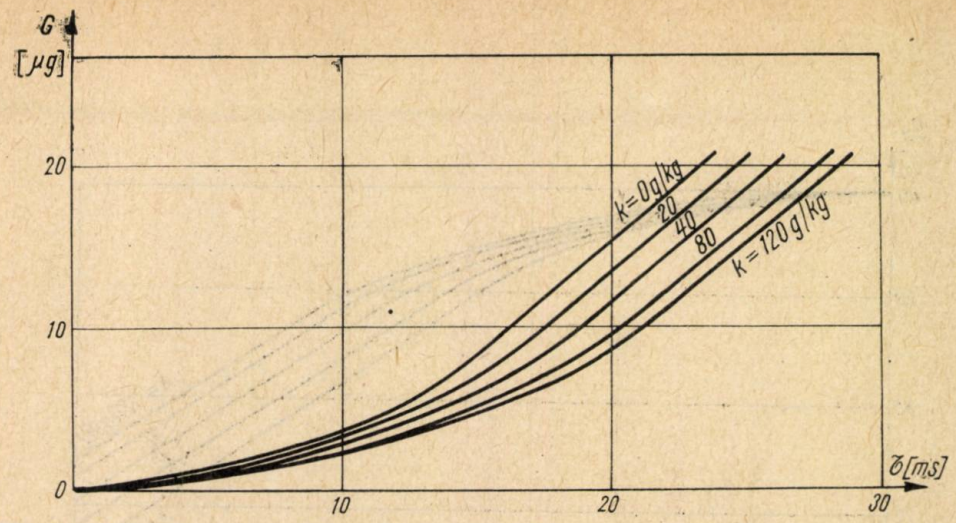


Fig. 1. — Influența concentrației combustibilului solid asupra cantității de combustibil ars pentru particula cu $d_p = 500\ \mu$ ($g_{500\,\mu} = 85\ \mu g$).

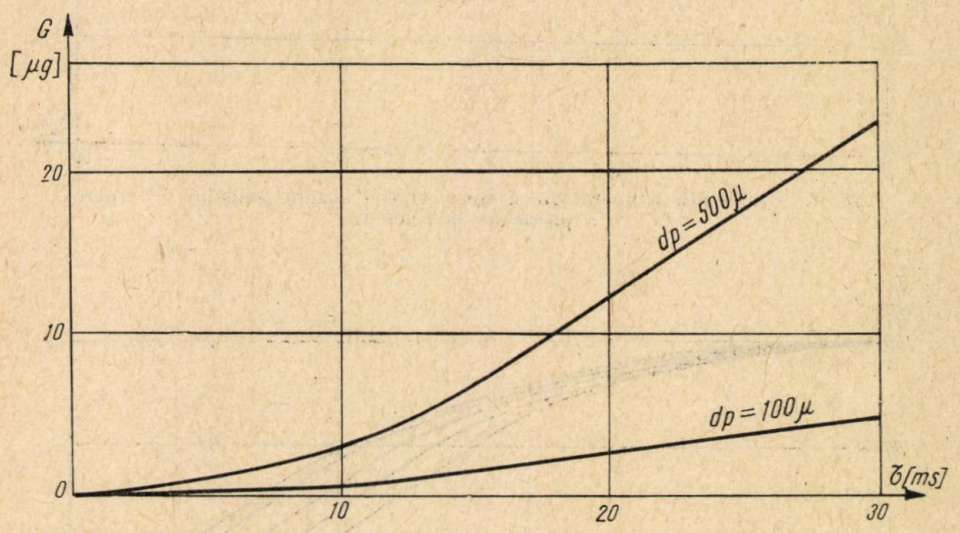


Fig. 2. — Influența diametrului particulelor asupra gradului de ardere a particulei ($g_{500\,\mu} = 85\ \mu g$, $g_{100\,\mu} = 0{,}68\ \mu g$).

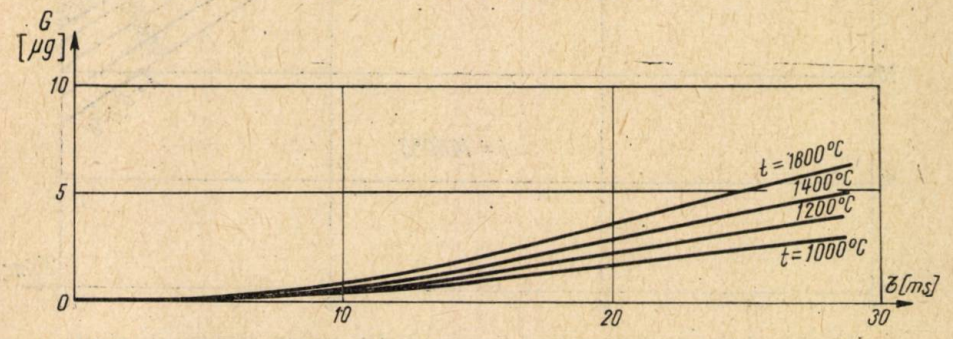


Fig. 3. — Influența temperaturii incintei de ardere asupra cantității de combustibil ars din particula cu $d_p = 100\ \mu$ ($g_{100\,\mu} = 0{,}68\ \mu g$).

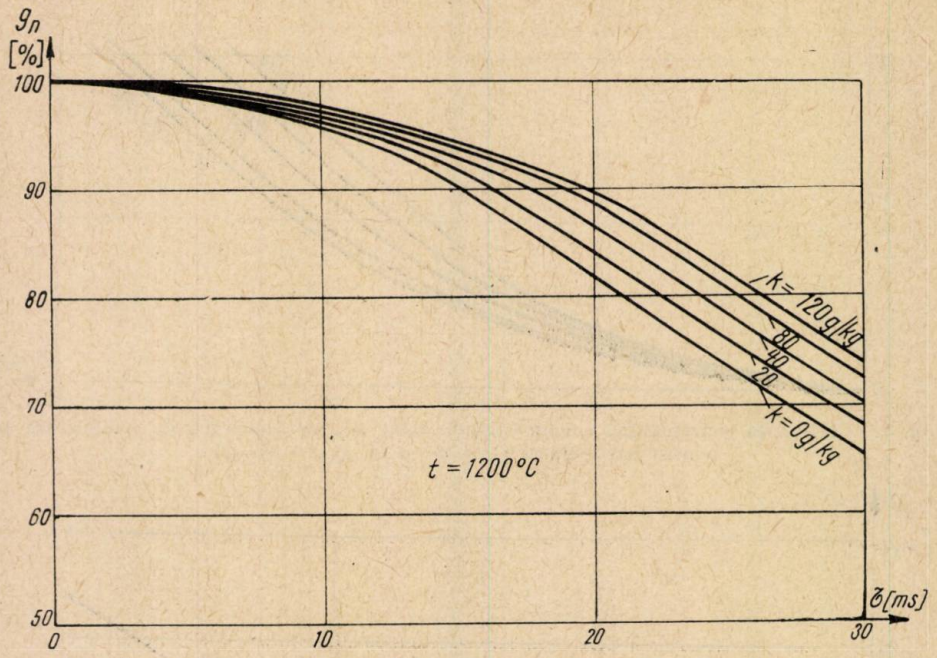


Fig. 4. — Influența temperaturii și concentrației asupra gradului de ardere a particulei la 1 200°C.

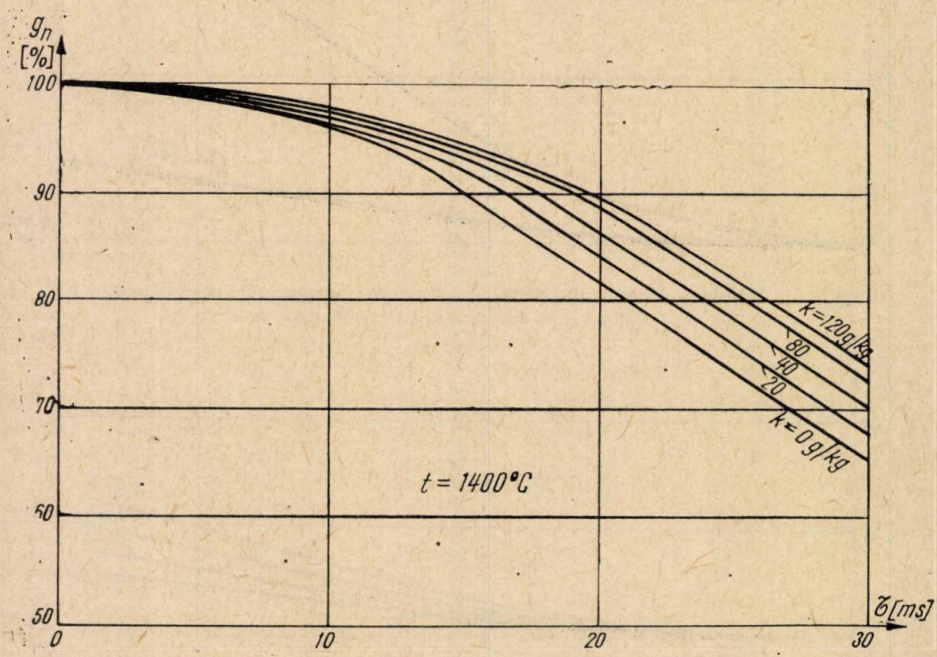


Fig. 5. — Influența temperaturii și concentrației asupra gradului de ardere a particulei la 1 400°C.

Este de observat creşterea gradului de ardere a combustibilului cu creşterea temperaturii din volumul focarului ca urmare a creşterii vitezei de ardere cu temperatura, caracteristică regimului difuziv de ardere.

În continuare s-a analizat influenţa caracteristicilor combustibilului şi mediului asupra conţinutului de material nears, exprimat prin relaţia

$$g_n = \frac{G_0 - G}{G_0} 100 \ [\%], \tag{13}$$

unde G_0 este greutatea iniţială a particulei şi G greutatea părţii care arde din particulă.

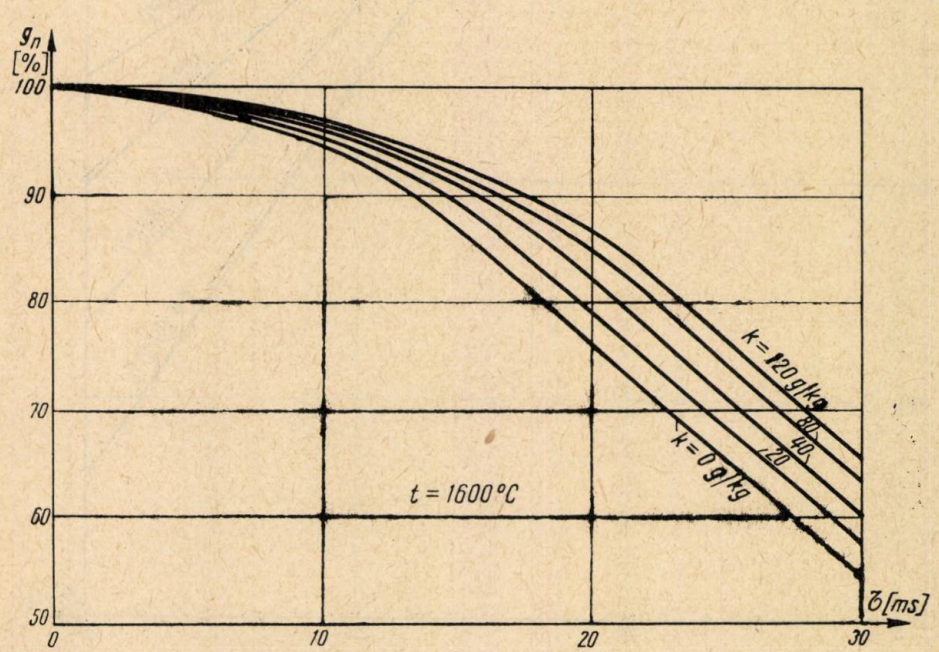


Fig. 6. — Influenţa temperaturii şi concentraţiei asupra gradului de ardere a particulei la 1 600°C.

Astfel, în figura 4 se prezintă influenţa concentraţiei combustibilului asupra procentului de nearse pentru o temperatură din volumul ciclonului egală cu $t = 1\,200$°C. Este evidenţiat şi sub această formă efectul negativ al creşterii concentraţiei asupra gradului de ardere a combustibilului.

În figurile 5 şi 6 se prezintă aceeaşi influenţă pentru temperaturile de 1 400, respectiv 1 600°C, în cazul arderii particulelor cu diametrul $d_p = 500\ \mu$, iar în figura 7 se prezintă influenţa variaţiei temperaturii în intervalul $t = 1\,000 \ldots 2\,000$°C asupra gradului de ardere a particulei cu diametrul $d_p = 500\mu$ şi concentraţia $k = 40$ g/kg aer.

Aceste diagrame evidenţiază efectul de scădere a gradului de ardere cu creşterea concentraţiei combustibilului şi efectul de creştere a acestuia cu creşterea temperaturii.

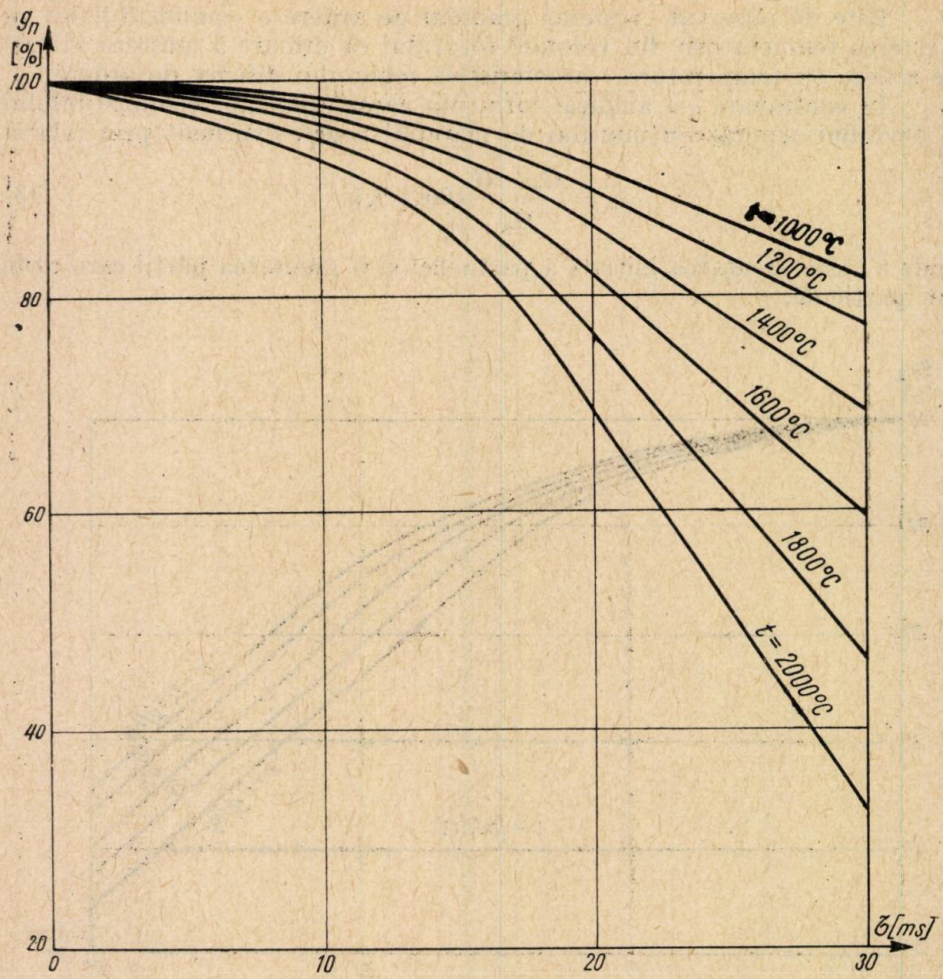


Fig. 7. — Influența temperaturii asupra gradului de ardere a particulelor cu $d_p = 500\mu$.

Ca urmare a cercetărilor efectuate se pot trage următoarele concluzii :

a) variația concentrației fazei solide duce la variația cantității de nearse a particulei. Creșterea concentrației conduce la scăderea cantității de combustibil ars ;

b) temperatura din interiorul focarului-ciclon are o influență hotărîtoare asupra gradului de ardere. Astfel la creșterea temperaturii se observă o ardere mult mai rapidă a particulelor de combustibil solid și o reducere a timpului de ardere, ceea ce întărește presupunerea de a ridica temperatura aerului preîncălzit ;

c) diametrul particulelor, fracția granulometrică, influențează sensibil gradul de ardere. Se poate trage concluzia că la arderea prafului de cărbune polidispersă se va ajunge la o repartizare foarte diferită a parti-

culelor : particulele cu $d_p = 100\mu$ ard în suspensie, iar cele cu $d_p = 500\mu$ ard parţial în suspensie şi parţial pe pelicula de zgură. Avînd însă în vedere faptul că timpii reali de separare sînt cu mult mai mari decît cei determinaţi teoretic, este de aşteptat o îmbunătăţire a gradului de ardere în volumul ciclonului faţă de rezultatele teoretice prezentate;

d) o parte a materiei combustibile la particule mai mari $d_p = 500\mu$ arde la periferia ciclonului pe pelicula de zgură şi, ca urmare, este necesar ca să existe viteze relative ridicate, temperaturi în volumul focarului ridicate şi oxigen suficient în zona periferică;

e) rezultatele obţinute în prezenta lucrare nu ţin seama că în timpul arderii greutatea particulei, deci şi diametrul ei, se reduce pînă la valoarea-limită

$$d_{p_F} = d_{p_0} \sqrt[3]{\frac{A}{100} \cdot \frac{\gamma_p}{\gamma_A}} \text{ [m]}, \tag{14}$$

unde

d_{p_F} este diametrul final al particulei, A conţinutul procentual de cenuşă şi γ_A greutatea specifică a cenuşii. Conform cercetărilor anterioare, scăderea diametrului particulei duce la o creştere a timpului de separare, deci la creşterea timpului în care particula se află în suspensie şi, ca urmare, la creşterea corespunzătoare a gradului de ardere;

f) din legarea cercetărilor privind funcţionarea izotermică bifazică a focarului-ciclon cu cercetările privind arderea particulei de combustibil solid, s-a ajuns la rezultate teoretice care constituie o bază de plecare în dezvoltarea cercetărilor experimentale pe modele de focare-ciclon la funcţionarea bifazică neizotermică. Apare posibilitatea alegerii în prima fază a cercetării a unei granulaţii optime şi posibilitatea prevederii desfăşurării proceselor de ardere.

În continuarea cercetărilor pe modele neizotermice bifazice se vor obţine în cadrul Institutului de energetică al Academiei R.S. România verificări experimentale ale cercetărilor teoretice care vor introduce o serie de corecţii ţinînd seama de simplificările admise în această primă fază şi care vor permite aprofundarea teoretică a ecuaţiilor rezolvate şi confruntarea rezultatelor teoretice cu cele experimentale.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Păroiu, I. Carabogdan, Şt. Koşa, N. Popescu, *Model pentru calculul evoluţiei procesului de ardere în focarul-ciclon orizontal*, comunicare la cea de-a XV-a sesiune de comunicări ştiinţifice a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, 14—16 mai 1969.
2. В. И. Хвостов, *Изучение структуры процесса горения в циклонной топке при сжигании жидкого топлива. Исследование котельно-топочных процессов*, Москва, 1958, p. 23—45.
3. Л. Л. Калишевский, Г. Г. Ганчев, *Исследование процесса горения в горизонтальной циклонной топке с жидким шлако удалением*, Теплоэнергетика, 6, 75—78 (1965).

4. Л. Л. Калишевский, Г. Б. Ганчев, *Исследование полноты сгорания твердого топлива в циклонной камере*, Теплоэнергетика, 2, 23—27 (1966).
5. Л. Л. Калишевский, Г. Б. Ганчев, *Исследование аэродинамической структуры циклонной топки при горении твердого топлива*, Теплоэнергетика, 8, 72—75 (1966).
6. И. П. Басина, Е. А. Тононкогий, *О горении и сепарации частиц топлива в циклонной топке. Запросы аэродинамики и теплопередачи в котельных процессах*, Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1958.
7. M. Ledinegg, *Factors for determination of the Heat Release Pulverized Coal and Oil Fired Furnaces Combustion*, 1966, p. 16—23.
8. N. Pănoiu, *Contribuții la studiul focarului-ciclon*, Teză de doctorat, 1965.
9. — *Influența caracteristicilor fizice ale suspensiei solide asupra traiectoriei și timpului de separare din focarul-ciclon orizontal la funcționarea izotermică*, St. cerc. energ. electr., *2* (1967).
10. — *Contribuții la studiul traiectoriei și timpului de separare a suspensiei solide în focarul-ciclon la funcționarea izotermică*, St. cerc. energ. electr., *4* (1967).
11. N. Pănoiu, Șt. Koșa, *Distribuția fazei solide în volumul focarului-ciclon orizontal la funcționarea în regim izotermic*, memoriu I.E., 1967.
12. — *Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra funcționării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic bifazic*, comunicare la sesiunea științifică a Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", 1—3 noiembrie 1968.
13. N. Pănoiu, *Studiul fazei solide în focarul-ciclon orizontal. Studiu asupra aspectelor teoretice ale problemei*, lucrare I.E., 1964.
14. I. Carabogdan, *Timpul de ardere a particulei de combustibil solid și influența factorului geometric*, St. cerc. energ., *2*, 397—412 (1965).
15. — *Studiul vitezei de ardere a particulei de combustibil solid*, lucrare I.E., 1967.
16. — *Studiul vitezei de ardere a particulei de combustibil solid în cazul în care viteza relativă mediu-particulă este nulă*, Teză de doctorat, București, 1967.

MODEL FIZIC AL PROCESULUI DE FIERBERE ÎN CONDIŢII DE REACTOR NUCLEAR ENERGETIC

DE

C. HAIDUC şi V. VINIŢCHI

În lucrare se prezintă un model fizic calitativ al procesului de fierbere pe elemente de combustibil nuclear cilindric în cazul circulaţiei naturale. Se dau rezultate experimentale obţinute pe o buclă termică experimentală privind influenţa unghiului de înclinaţie a elementului asupra diagramei $q = f(\Delta t)$ în cazul fierberii la circulaţia naturală. Se prezintă rezultate experimentale asupra fenomenului de histerezis la fierbere pe elemente cilindrice şi se dă explicaţia fenomenului prin variaţia complexă a subrăcirii lichidului în timpul variaţiei fluxului termic.

Problemele legate de diferite aspecte ale modelului procesului de fierbere în condiţii de reactor nuclear existente în literatura de specialitate au fost analizate în lucrarea [1], pe care am elaborat-o în 1967. Din această cauză nu am considerat necesar de a prezenta din nou aceste rezultate în lucrarea de faţă.

Modelul fizic al procesului de fierbere pe elemente de combustibil nuclear în cazul circulaţiei naturale se prezintă pe baza cercetărilor efectuate în cadrul sectorului de energetică nucleară a Institutului de energetică în 1968 [6] şi pe baza rezultatelor unor cercetători străini în acest domeniu [2] — [5].

Procesul de fierbere în cazul circulaţiei naturale se consideră identic cu procesul de fierbere în volum mare, acest lucru fiind demonstrat printr-o serie de rezultate publicate [5]. Spre deosebire de procesul de fierbere în volum mare cu circulaţie naturală, delimităm, spre deosebire de alţi autori, procesul de fierbere în volum mare cu circulaţie forţată, pentru care datele experimentale nu pot coincide cu cele care se obţin în ţevi la circulaţie forţată datorită condiţiilor hidrodinamice diferite în cele două cazuri.

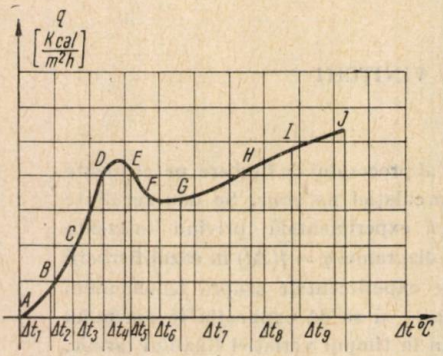
La elaborarea modelului fizic al procesului de fierbere la circulaţia naturală pornim de la faptul că el trebuie localizat în fiecare caz în parte prin definirea combinaţiei geometriei elementului de combustibil şi a canalului înconjurător, natura lichidului, presiunea, temperatura, viteza

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 33—42, 1970

3—c. 4111

la care are loc procesul şi modul de prelucrare al suprafeţei de transfer de căldură. Considerăm că procesul de fierbere în canale de reactor nuclear poate fi caracterizat, în linii generale, prin intermediul diagramelor $q=f(\Delta t,\vartheta)$, $\alpha=f(\Delta t,\vartheta)$ şi $\varphi=f(l)$, unde q reprezintă fluxul termic în regim de fierbere, Δt diferenţa dintre temperatura peretelui şi lichidului, ϑ gradul de subrăcire al lichidului, α coeficientul de cedarea căldurii de la perete la lichid, φ conţinutul volumetric de vapori în canal, l lungimea elementului de combustibil.

Alura acestor curbe este dată în figurile 1, 2 şi 3.



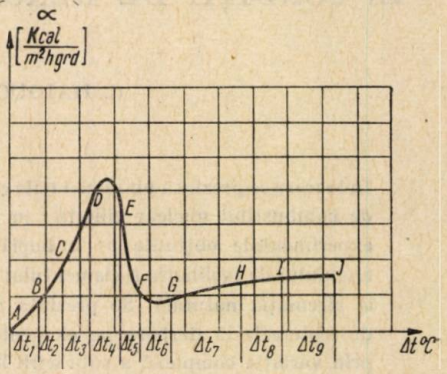


Fig. 2. — Variaţia coeficientului de cedarea căldurii de la peretele elementului de combustibil la lichidul în fierbere în funcţie de Δt pentru $p=\text{const}$ şi $W=\text{const}$.

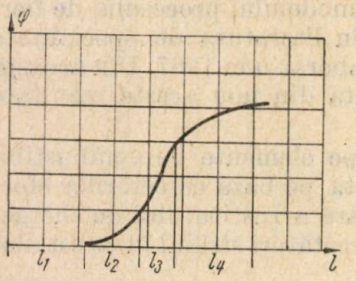


Fig. 1. — Variaţia fluxului termic la fierberea în canale de reactor nuclear în funcţie de Δt pentru $p=\text{const}$ şi viteza lichidului la intrare în canal $W=\text{const}$.

Fig. 3. — Variaţia conţinutului volumetric de vapori pe lungimea elementului de combustibil nuclear pentru $p=\text{const}$ şi $W=\text{const}$.

Ţinînd seama de alura acestor diagrame, pot fi definite următoarele zone pe lungimea elementelor de combustibil:

1) zona de convecţie,
2) zona de început de fierbere şi fierberii nucleice,
3) zona fierberii cu bule,
4) zona primului regim termic critic,
5) zona fierberii peliculare cvasistabile,
6) zona celui de-al doilea regim termic critic.
7) zona fierberii peliculare stabile,
8) zona fierberii sferoidale,
9) zona fierberii bulelor de lichid în abur supraîncălzit.

Fiecărei zone specifice din diagramele $q=f(\Delta t,\vartheta)$ şi $\alpha=f(\Delta t,\vartheta)$ şi fiecărei combinaţii dintre geometria suprafeţei, natura lichidului, modul

de prelucrare al suprafeței, presiunea lichidului și viteza lichidului îi corespund ecuații criteriale bine determinate.

Al treilea parametru care definește procesul îl considerăm conținutul volumetric de abur φ, definit prin raportul W_c''/W'' unde W_c'', care reprezintă viteza calculată a aburului și $\overline{W''}$ viteza medie a aburului.

Pentru condițiile menționate mai sus, alura curbei $\varphi = f(l)$ este diferită. Mărimile l_1, l_2, l_3 și l_4 din figura 3 reprezintă, respectiv, lungimea de economizor în care transferul de căldură se face prin convecție, lungimea de început de fierbere și de fierbere nucleică, lungimea fierberii cu bule, lungimea fierberii intense cu bule.

În zona de convecție, mecanismul procesului este dezvoltat în literatura de specialitate, iar mărimile q și α se determină cu ecuațiile cunoscute.

În zona de fierbere incipientă și nucleică cu ridicarea diferenței de temperatură dintre învelișul elementului de combustibil și lichid regimul de microconvenție naturală, se îmbină treptat cu un regim combinat de fierbere, intrînd în funcțiune primii centri de vaporizare. Acest proces de formare a bulelor și de intrare treptată în acțiune a centrilor de vaporizare a fost studiat calitativ cu ajutorul unei instalații de televiziune și prin filmări ultrarapide (fig. 4) [6].

Cu mărirea sarcinii termice, numărul de centri de vaporizare care intră în funcțiune se amplifică. Prin ridicarea pe mai departe a sarcinii termice, numărul de centri de vaporizare care intră în acțiune crește vertiginos, acoperind întreaga suprafață a elementului de combustibil.

În cazul ridicării fluxului termic pe elementul de combustibil pînă în apropierea zonei fluxului termic critic au loc unirea completă a coloanelor de bule de pe suprafața elementului de combustibil și formarea unei pelicule de vapori în jurul elementului care capătă o mișcare de rotație și se ridică în sus, formînd un înveliș care înrăutățește accesul apei la suprafața elementului (fig. 5) [6].

La fluxul termic critic, procesul de deplasare a aburului în jurul elementului de combustibil are caracter rotativ și foarte haotic, înrăutățindu-se mult accesul lichidului la element, ceea ce conduce la creșterea bruscă a temperaturii peretelui și la arderea materialului respectiv.

Elementele esențiale care determină apariția centrilor de vaporizare pe suprafața elementelor de combustibil o constituie curburile locale ale suprafeței, asperitățile acesteia și supraîncălzirea locală a unor părți din suprafață. Pe centrii de vaporizare se obțin la fierberea cu bule coloane de bule, al căror diametru de desprindere poate fi exprimat

$$d_0 = C\theta \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma' - \gamma''}}, \qquad (1)$$

unde C reprezintă un coeficient (după unii autori $C = 0{,}0206$),

θ — supraîncălzirea aburului din bulă față de lichid ($0 < \theta < 140°C$),

σ — tensiunea superficială a aburului,

γ', γ'' — greutatea specifică a apei și aburului.

Pe suprafața exterioară a bulei în creștere pe suprafața elementului de combustibil, pe de o parte, se transmite căldura de la element care conduce la creșterea acesteia, iar pe suprafața dintre lichid are loc procesul

de condensaţie a unei părţi din aburul format. După desprinderea bulei, procesul de condensaţie se răspîndeşte pe toată suprafaţa bulei şi astfel viteza de condensaţie a vaporilor din bulă creşte.

Diametrul de desprinderea bulei de pe suprafaţă se poate exprima de asemenea prin ecuaţia lui Toletov :

$$d_0 = \sqrt{\psi^2(\theta)\frac{\sigma}{\gamma' - \gamma''} + \xi\frac{W_0^4}{g^2}} - \frac{\xi W_0^2}{g}, \qquad (2)$$

unde ξ reprezintă coeficientul de rezistenţă la mişcarea bulei în lichid, W viteza medie a lichidului şi $\psi(\theta)$ o funcţie de θ.

O dată cu desprinderea bulei de suprafaţa elementului, locul este luat instantaneu de lichid, ceea ce conduce la turbulizarea intensă a stratului-limită.

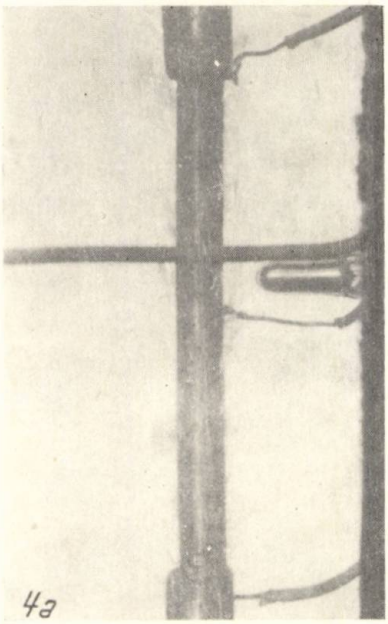
Frecvenţa de formare a bulelor este funcţie de sarcina termică specifică. De această sarcină depinde de asemenea şi numărul de centri de vaporizare în funcţiune şi deci numărul de coloane de vapori. Frecvenţei de formare a bulelor îi corespunde o vibraţie cu o anumită frecvenţă a stratului de lichid, însoţită de un efect acustic şi de o frecvenţă a acestuia. Efectul acustic a fost observat calitativ în timpul experienţelor. Atît frecvenţa sunetului, cît şi intensitatea acestuia cresc cu creşterea sarcinii termice.

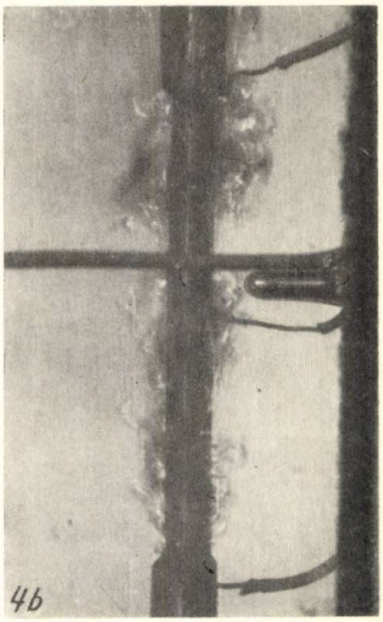
Vibraţia stratului-limită de lichid a fost observată în experienţe şi considerăm că are o influenţă importantă asupra procesului de transfer de căldură prin turbulizarea acestuia. Trebuie menţionat faptul că proprietatea lichidelor de a avea o căldură de vaporizare ridicată conduce la preluarea căldurii de către apa subrăcită atît de la perete, cît şi de la bule. Cercetările efectuate de Bencov şi Mezon cu privire la transferul de căldură de la bula de abur la un curent turbulent de apă subrăcită au confirmat faptul că acest efect are o pondere mare în preluarea căldurii de către lichid. Acest efect creşte în apropierea fluxului critic.

Procesul de fierbere cu bule în cazul elementelor de combustibil orizontale diferă substanţial de cazul elementelor verticale (fig. 6) [6]. În acest caz are loc o asimetrie a procesului pe suprafaţă. Datorită neuniformităţii degajării de căldură, temperatura pe generatoarea superioară a elementului este mai ridicată. În schimb, ea este relativ uniformă pe toată lungimea elementului.

Regimul incipient de fierbere este caracterizat printr-o stabilitate mai mare a bulelor pe suprafaţa de jos a elementului, datorită rezistenţei pe care o opune elementul la desprinderea acestora. Din această cauză, diametrul de desprinderea bulelor de pe faţa inferioară este mai mare în acest caz şi se micşorează treptat pe feţele laterale atingînd valoarea minimă. Acest efect de neuniformitate a diametrului bulelor pe circumferinţă a fost studiat cu ajutorul instalaţiei de televiziune. Cu mărirea fluxului termic în partea superioară a elementului are loc o unire a bulelor în bule mari şi sub forma unor pelicule neuniforme de vapori, care se ridică deasupra generatoarei superioare a elementului.

Ridicînd în continuare fluxul termic, se ajunge la situaţia în care procesul de răcire a elementului cu lichid este mult îngreuiat, datorită peliculei de vapori care înconjură elementul şi care conduce la creşterea temperaturii peretelui. Pelicula de vapori care se formează este ruptă pe alo-





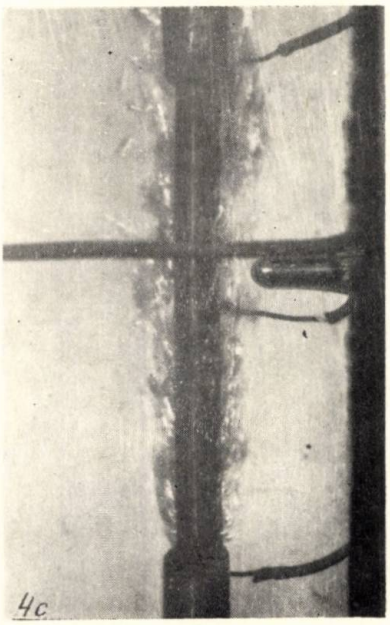
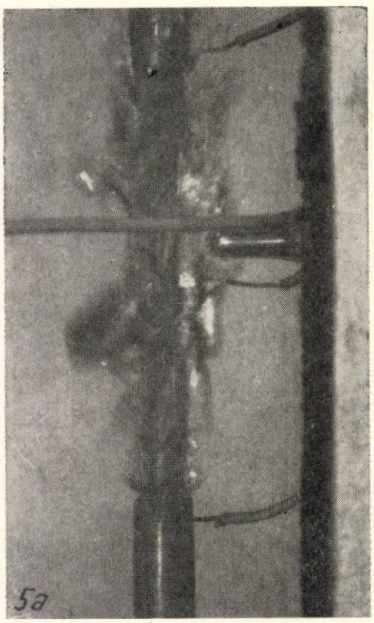
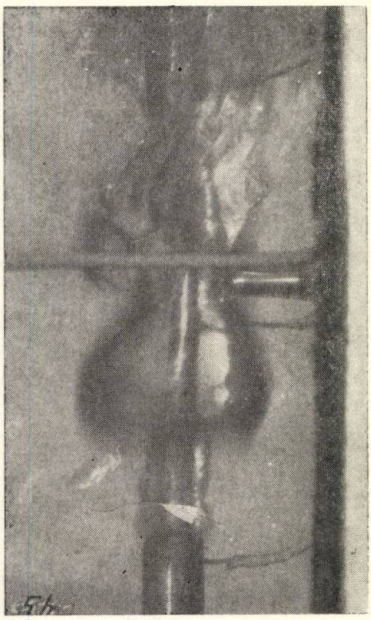


Fig. 4. — Diferite stadii ale regimului de fierbere pe elemente cilindrice, netede și verticale cu diametrul $d_e = 8$ mm și lungimea $l = 90$ mm ; $p = 1$ ata.





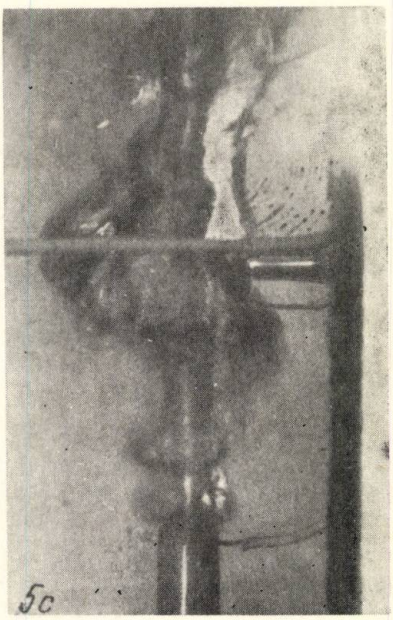


Fig. 5. — Diferite stadii ale regimului de fierbere la fluxuri termice apropiate de fluxul termic critic pe elemente cilindrice, netede și verticale cu diametrul $d_e = 8$ mm; lungimea $l = 90$ mm; $p = 1$ ata.

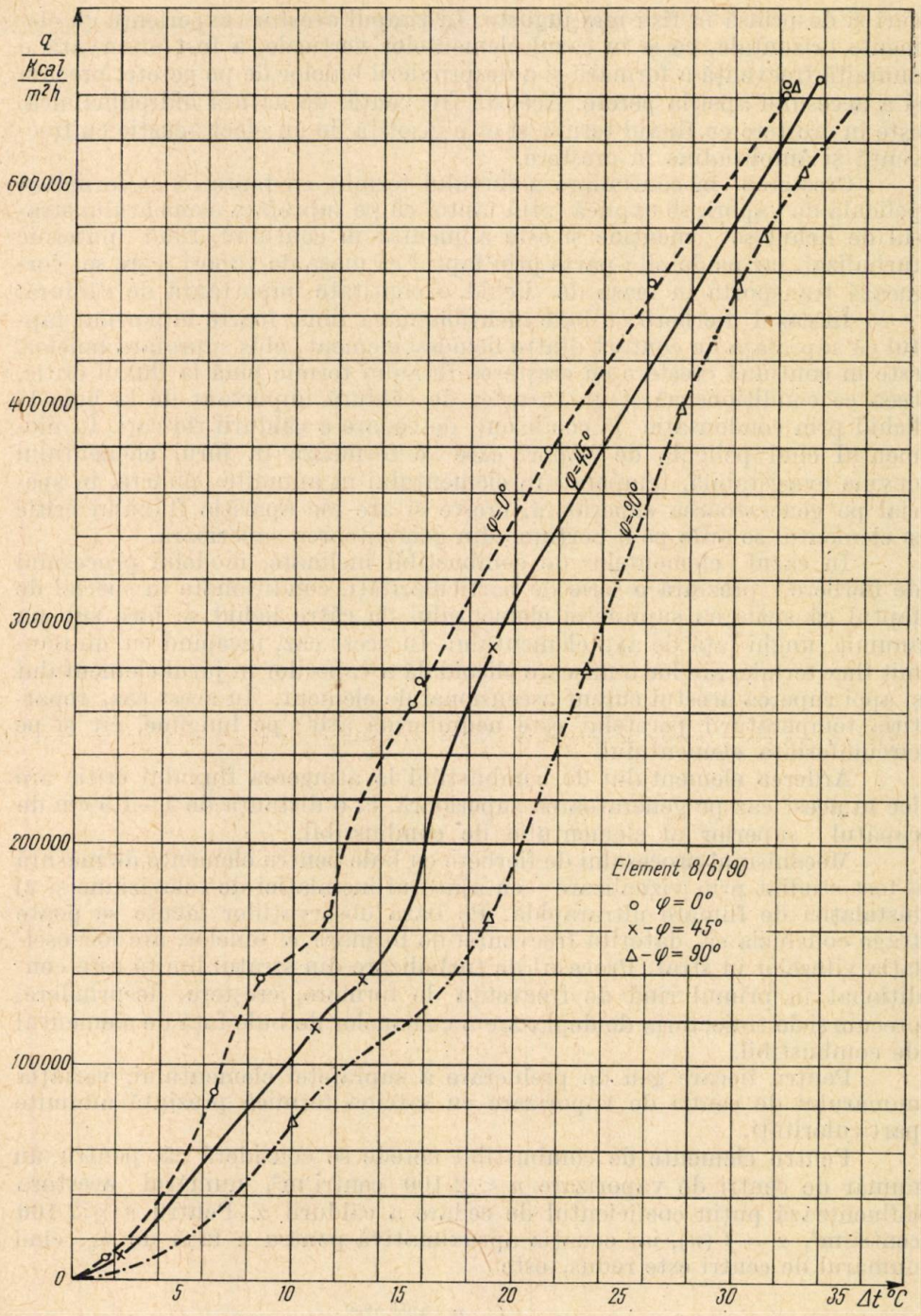


Fig. 6. — Variaţia fluxului termic în funcţie de Δt la fierberea apei pe elemente de combustibil cilindrice şi netede la diferite unghiuri de înclinaţie a elementului : $\varphi = 0°$; $\varphi = 45°$; $\varphi = 90°$; $d_e = 8$ mm ; $l = 90$ mm ; $p = 1$ ata.

curi şi desprinsă în fîşii mai înguste. În timpul acestor experienţe cu elemente orizontale, ca şi în cazul elementelor verticale, a fost observată o anumită frecvenţă a formării şi a desprinderii bulelor de pe perete, precum şi a accesului apei la perete. Această frecvenţă, de natură hidrodinamică, este în creştere cu fluxul termic şi este însoţită de un efect acustic cu frecvenţă şi amplitudine în creştere.

Creşterea în continuare a fluxului termic, cu toate că se formează pelicula de vapori, se explică prin faptul că pe suprafaţa elementului stratul de lichid se menţine şi este alimentat în continuu, fiind puternic turbulizat, iar pe de altă parte prin faptul că masa de vapori care se formează transportă în masa de lichid o cantitate importantă de căldură.

În cazul fierberii cu bule menţionăm ca fiind foarte important faptul că suprafaţa de contact dintre lichid şi element, plus suprafaţa bulelor, este în continuă creştere cu creşterea fluxului termic pînă la fluxul critic, ceea ce condiţionează şi un transfer de căldură important de la bule la lichid prin condensaţie la coeficienţi de cedare a căldurii ridicaţi. În momentul cînd pelicula de vapori care se formează în jurul elementului devine cvasistabilă, temperatura elementului în anumite puncte, în special pe generatoarea superioară, creşte şi are loc apariţia fluxului critic şi elementul se arde pe o porţiune din generatoarea superioară.

În cazul elementelor de combustibil înclinate, modelul procesului de fierbere prezintă o serie de particularităţi, condiţionate în special de faptul că spălarea suprafeţei elementului de către lichid se face sub un anumit unghi faţă de axa elementului. În acest caz, începînd cu un anumit flux termic, are loc o mişcare elicoidală a vaporilor în jurul elementului şi apoi ruperea acestui curent ascensional de element. În acest caz, repartiţia temperaturii peretelui este neuniformă atît pe lungime, cît şi pe circumferinţa elementului.

Arderea elementului de combustibil la atingerea fluxului critic are loc în acest caz pe generatoarea superioară, la o distanţă de 1—1,5 cm de capătul superior al elementului de combustibil.

Mecanismul procesului de fierbere cu bule pentru elemente de măsură a fost studiat prin vizualizare cu ajutorul instalaţiei de televiziune şi al instalaţiei de filmare ultrarapidă. Pe baza observaţiilor făcute se poate trage concluzia că, datorită frecvenţei de formare a bulelor, are loc oscilaţia vitezelor în strat. Procesul de turbulizare din stratul-limită este condiţionat în primul rînd de frecvenţa de formare, creştere, desprindere, precum şi de traiectoria de deplasare a coloanelor de bule faţă de elementul de combustibil.

Pentru fiecare gen de prelucrare a suprafeţei elementului, variaţia numărului de centri de vaporizare cu sarcina termică prezintă anumite particularităţi.

Pentru elemente de combustibil netede se consideră că, pentru un număr de centri de vaporizare $n < 2\,100$ centri/m^2, numărul acestora influenţează puţin coeficientul de cedare a căldurii α. Pentru $n > 2\,100$ centri/m^2, $\alpha = f(n)$, iar ecuaţia aproximativă pentru α faţă de α_0, cînd numărul de centri este redus, este

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{n}{2\,100} \right)^{(0,3-0,5)} . \qquad (3)$$

Ecuația (3) este dată în literatura de specialitate și are un caracter aproximativ.

Un fenomen deosebit de important care a fost cercetat și în care se aduc contribuții importante în elucidarea mecanismului procesului de fierbere este efectul de histerezis la fierbere. Acest fenomen este semnalat în lucrarea [2], fără însă a i se putea da o explicație. În timpul experiențelor pe care le-am efectuat a fost pus în evidență fenomenul de histerezis la fierberea cu bule atît pentru elemente de combustibil verticale, cît și pentru elemente orizontale și înclinate [6]. Fenomenul de histerezis la fierberea cu bule se manifestă în modul următor. Dacă se ridică treptat sarcina termică pînă la fluxul critic și apoi se coboară treptat acest flux pînă la zero, funcția $q = f(\Delta t)$, unde Δt reprezintă diferența dintre temperatura peretelui elementului și a lichidului, este diferită de forma acestei funcții la coborîre (fig. 7).

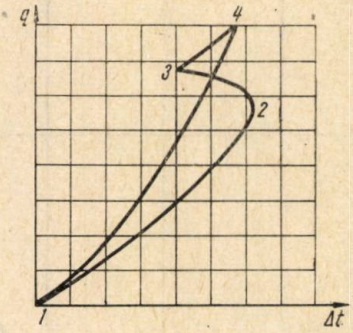


Fig. 7. — Curba de histerezis la fierberea cu bule a apei pentru p = const.

Curba *1—2—3—4* este corespunzătoare ridicării sarcinii termice pe elementul de combustibil, iar curba *4—1* corespunde micșorării sarcinii termice. Pentru porțiunea *1—2* a curbei este caracteristică ridicarea cu o anumită viteză a sarcinii termice, iar procesul de transfer de căldură este la început prin convecție naturală, apoi fierberea devine tot mai intensă pînă în punctul *2*, unde transferul de căldură datorită intensificării substanțiale a procesului de fierbere, mărimea Δt, scade cu creșterea ușoară a fluxului termic, atingîndu-se punctul 3. În continuare, ridicării fluxului termic îi corespunde o creștere a lui Δt (curba *3—4*) pînă la fluxul termic critic q_{cr}. Prin micșorarea apoi treptată a fluxului termic se obține curba *4—1*. O asemenea curbă de histerezis obținută experimental este dată în figura *8a*, în care este reprezentată o diagramă cu histerezis la fierbere pentru un element neted în poziție orizontală. Din figura 8 *a* rezultă, evident, trecerea la diferite stadii ale procesului de fierbere pe porțiunea A, B, C, D, corespunzătoare unei temperaturi a apei între 20 și 60°C. Diagrama *E*, *D*, *A* corespunde temperaturii t_i = 100°C (saturație) [6].

Aceste rezultate dovedesc complexitatea deosebită a acestui fenomen și incorectitudinea de care dau dovadă unii autori de a propune pentru fierberea cu bule ecuații de forma $q = C_1 \Delta t^n$ sau $\alpha = C_2 q^m$, unde C_1 și C_2 reprezintă constante, iar n și m reprezintă mărimi constante.

Forma curbelor de histerezis la fierberea cu bule este funcție în mare măsură de viteza de ridicare a fluxului termic și de atingere a fluxului ter-

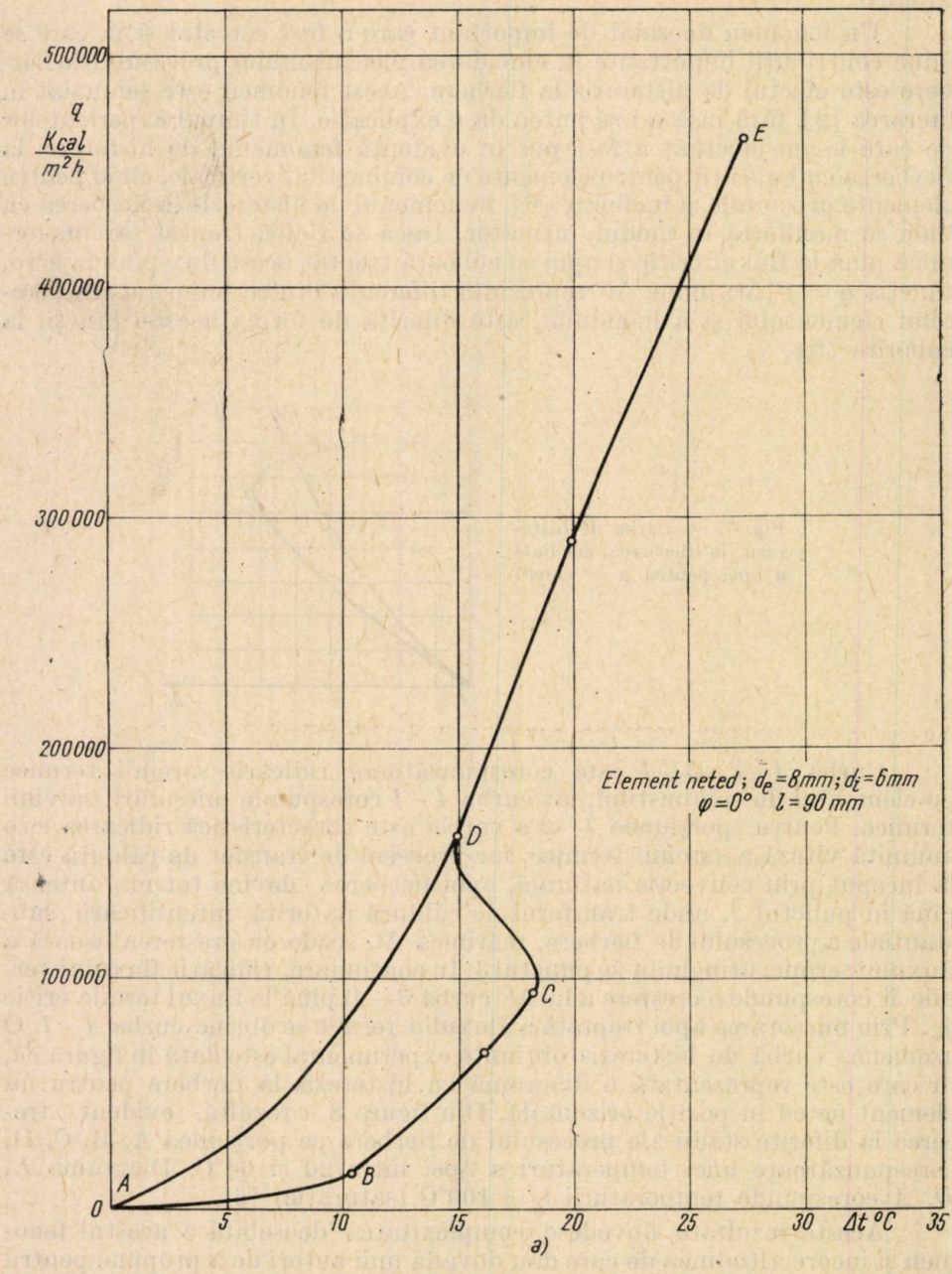
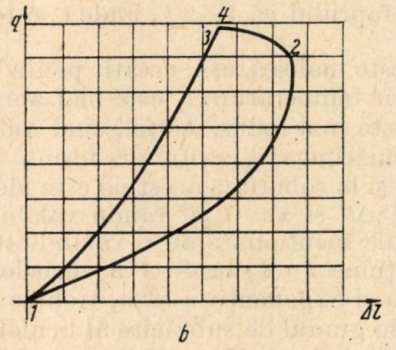


Fig. 8*a*. — Diagrama $q = f(\Delta t)$ cu porţiunea de histerezis obţinută pentru un element neted; $d_e = 8$ mm; $d_i = 6$ mm; $l = 90$ mm în poziţie orizontală.

mic critic. Pentru viteze mari de ridicare a fluxului termic se pot obține curbele din figura *8 b*.

Curba din figura 8 *b* corespunde ridicării foarte rapide a fluxului termic. Din aceste curbe rezultă că suprafața înconjurată de curba $q = f(\Delta t)$ este maximă în cazul vitezelor mari de ridicare a fluxului termic. Această suprafață poate fi definită prin funcția



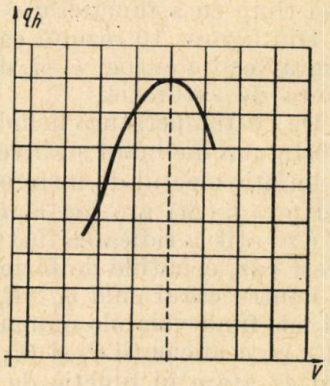


Fig. 9. — Variația efectului de histerezis la fierberea lichidelor în funcție de viteza *V*.

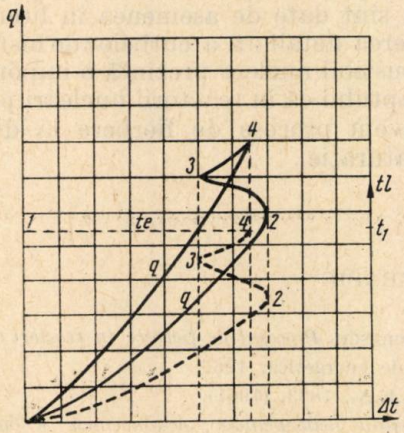


Fig. 8*b*. — Curbele de histerezis la fierberea lichidelor, obținute la viteze mari de ridicare a fluxului termic pentru p = const.

Fig. 10. — Variația funcțiilor $q = f(\Delta t)$ și $t_l = f(\Delta t)$ în cazul fenomenului de histerezis la fierberea lichidelor.

$$q_h = \frac{1}{\Delta t_0} \oint q\,(\Delta t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Mărimea q_h caracterizează creșterea cantității medii de căldură cedată pe m² și oră pentru 1°C de creșterea diferenței dintre temperatura suprafeței elementului și lichidului. Mărimea q_h poate fi obținută prin planimetrarea funcției $q = f\,(\Delta t)$, iar Δt_0 este plaja de variație a lui Δt. Evident că mărimea q_h poate fi determinată și prin cunoașterea curbelor $\alpha = f\,(\Delta t)$, sub forma

$$q'_h = \oint \alpha\,(\Delta t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

În acest caz rezultatul obţinut nu se referă la 1°C, ci la toată cantitatea de căldură transmisă pe unitatea de suprafaţă. Mărimea q_h variază cu viteza V de creştere a lui q după o funcţie parabolică dată în figura 9.

Explicaţia fenomenului de histerezis la fierberea lichidelor poate fi făcută prin urmărirea variaţiei temperaturii lichidului $t_l = f(\Delta t)$ în acelaşi timp cu a funcţiei $q = f(\Delta t)$ (fig. 10).

Din figura 10 rezultă că panta curbei fluxului termic *1—2* este mai înclinată decît a curbei *1—4*, datorită faptului că $t_l < t_s$, unde t_s este temperatura de saturaţie.

Cu cît temperatura lichidului t_l este mai scăzută, cu atît panta curbei lui q este mai înclinată şi, invers, cu cît temperatura t_l este mai apropiată de t_s, cu atît efectul de histerezis q_h este mai redus. Astfel, cînd ridicarea curbei $q = f(\Delta t)$ are loc la $t_l = t_s$, mărimea $q_h = 0$, iar forma curbei $q = f(\Delta t)$ atît la ridicarea fluxului, cît şi la coborîrea acestuia este identică. În acest caz, ecuaţiile de forma $q = C_1 \Delta t^n$ şi $\alpha = C_2 q^m$ rămîn valabile.

Pentru cazul cînd $q_h > 0$, ecuaţiile menţionate au o valabilitate restrînsă, ele fiind valabile numai pe porţiune *1—2* sau *4—1* a curbelor $q = f(\Delta t)$, iar coeficienţii C_1 şi C_2, precum şi exponenţii n şi m, trebuie determinaţi ca atare în funcţie de t_l sau de gradul de subrăcire al lichidului ϑ.

Ecuaţiile pentru porţiunile *2—3* şi *3—4* din curbele $q = f(\Delta t)$ şi $\alpha = f(\Delta t)$ sînt greu de obţinut şi nu sînt date de asemenea în literatura de specialitate. În acest caz, cunoaşterea detaliată a curbelor de histerezis la fierbere pentru elementele de combustibil nuclear prezintă o importanţă mare ştiinţifică şi practică, datorită faptului că în reactorii nucleari pe lungimea elementelor de combustibil avem procese de fierbere la diferite temperaturi pînă la temperatura de saturaţie.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Haiduc, V. Viniţchi, S. Ghilea, G. Teodorescu, *Procesul de fierbere în reactori nucleari energetici*, memoriu la Institutul de energetică, 1967.
2. P. Perroud, A. de la Harpe, S. Rebière, C.E.A., 1853, (1961).
3. И. Я. Ерщов, *Теплопередача при кипении недогретых жидкостей в большом объеме при высоких тепловых нагрузках*, „Известия высших учебных заведений, Энергетика", 5 (1965).
4. I. Collier, *A review of two-phase heat transfer* (1935—1957), Berkshre Atomic Energy Researchi Establisement Harwell, 1958.
5. Дж. Колльер, *Обзор работ по теплообмену к двух-фазным системам*, Москва, Изд. Иностран. лит., 1962.
6. C. Haiduc, V. Viniţchi, *Cercetări pe modele a procesului de fierbere în condiţii de reactor nuclear energetic*, Partea I şi II, memoriu la Institutul de energetică, 1958.

METODE DE MĂSURARE A GROSIMII FILMELOR LICHIDE

DE

V. PIMSNER şi P. TOMA

621.438 :621.45 :621.56

Se prezintă cîteva metode mecanice, electrice şi optice care au fost dezvoltate pentru estimarea grosimii unui film lichid în curgere. Autorii s-au concentrat asupra sondelor cît şi asupra mijloacelor electronice de prelucrare a informaţiilor convenabile măsurării unei grosimi medii a filmului pe o lungime cunoscută a filmului cît şi a unei grosimi locale. Dispozitivele descrise sînt în legătură cu un tunel de încercări hidro-aerodinamice care a fost conceput pentru a permite determinarea condiţiilor optime de protejare cu ajutorul unui film lichid a unor suprafeţe expuse acţiunii unor gaze fierbinţi în curgere.

Creşterea temperaturii fluidului de lucru, factorul principal al măririi performanţelor turbomotoarelor cu ardere internă, este limitată de rezistenţa paletelor fixe şi mobile ale turbinei, ceea ce explică atenţia deosebită ce trebuie acordată metodelor şi soluţiilor de răcire a acestora. Mărirea sensibilă a temperaturii fluidului de lucru la valori de 1 000—1 300°C impune elaborarea unor noi soluţii care să asigure răcirea satisfăcătoare a elementelor turbinei. Protejarea suprafeţelor metalice printr-un strat pelicular lichid poate constitui o rezolvare, aplicabilă şi în alte domenii ale tehnicii.

Studiile efectuate scot în relief că intensitatea solicitărilor termice este în directă legătură cu grosimea stratului pelicular şi că, spre exemplu, neglijînd forţele rezultate din acceleraţiile proprii sau Coriolis şi considerînd temperatura gazului cald constantă, se obţine relaţia dintre coeficientul total al schimbului de căldură [1] α_r şi cantitatea de fluid ΔM vaporizată pe unitatea de suprafaţă şi grosimea filmului la intrare y_{00} :

$$\frac{\alpha_r}{\Delta M} = \frac{r + \dfrac{2\lambda x\,(T_f - T_s)}{Gl_1\, y_{00}}}{T_g^* - T_f}, \tag{1}$$

în care λ şi r reprezintă coeficientul de conducţie termică şi căldura de vaporizare a lichidului, T_g^* temperatura de frînare a gazului fierbinte, T_f temperatura de saturaţie a gazului corespunzătoare presiunii de cameră

şi G_{l_1} debitul de lichid raportat la unitatea de lungime. Se presupune existenţa unei relaţii între G_{l_1} şi y_{00}, care se poate determina experimental sau teoretic în funcţie de numărul şi forma orificiilor de intrare.

Verificarea experimentală a relaţiilor de tipul $y = y(x)$ în diverse condiţii de temperatură T_g^* şi de viteză a gazului antrenat reprezintă calea rezolvării problemelor privind răcirea peliculară.

În acest scop au fost dezvoltate cîteva procedee de măsurare, urmărind atît determinarea unei grosimi medii a filmului $\overline{y}$, cît şi a unei grosimi punctiforme y variabile în timp, mărimi care urmează să fie corelate cu coeficienţii de transfer de căldură în diverse condiţii hidrodinamice ale sistemului bifazic.

Pentru simularea condiţiilor de schimb de căldură de la gazul cald la peretele metalic prin intermediul unui film lichid, a fost construit un tunel hidroaerodinamic (fig. 1), compus dintr-o cameră de ardere (*a*), un sistem de omogenizare cu grătare (*b*), o zonă de lucru propriu-zisă cu secţiunea

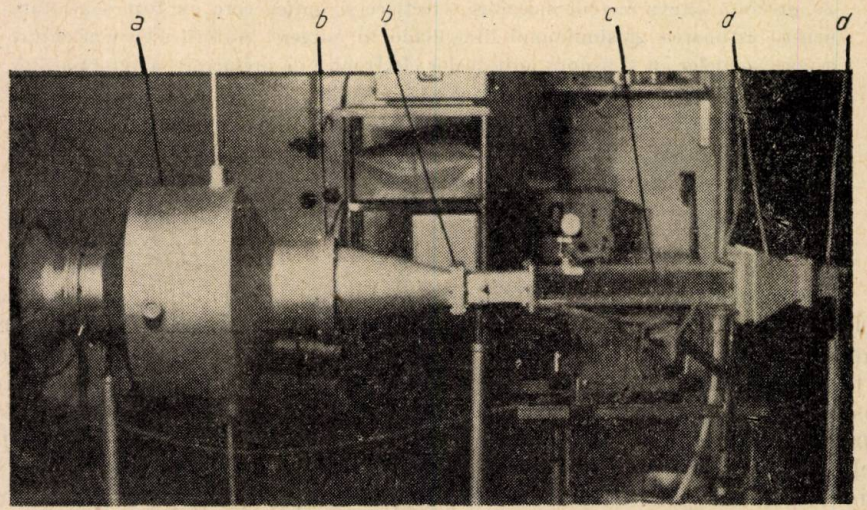


Fig. 1. — Vedere de ansamblu a tunelului hidrodinamic.

dreptunghiulară 100×80 mm şi lungimea de circa 500 mm (*c*), o galerie de aspiraţie prevăzută cu un separator de picături, un amortizor de vibraţii şi o suflantă (*d*).

Punerea la punct a sistemelor de măsură şi stabilirea unor corelaţii hidrodinamice în regim izotermic se fac folosind o secţiune de lucru executată din stiplex. Pentru experimentările la cald se foloseşte un tronson identic, executat din oţel inoxidabil, cu posibilităţi de vizualizare prin ferestre termorezistente. În figura 2 s-a prezentat sistemul de alimentare a filmului lichid în zona de lucru a tunelului şi parametrii mai importanţi urmăriţi în desfăşurarea experimentărilor.

În prezentarea de faţă se vor expune metodele folosite în cadrul experimentărilor pentru măsurarea grosimii filmului lichid. Alegerea şi aplicarea metodelor au ţinut seama de unele condiţii specifice desfăşurării programului de experimentări, şi anume :

a) filmul lichid are o grosime cuprinsă între 0,015 şi 2 mm ;

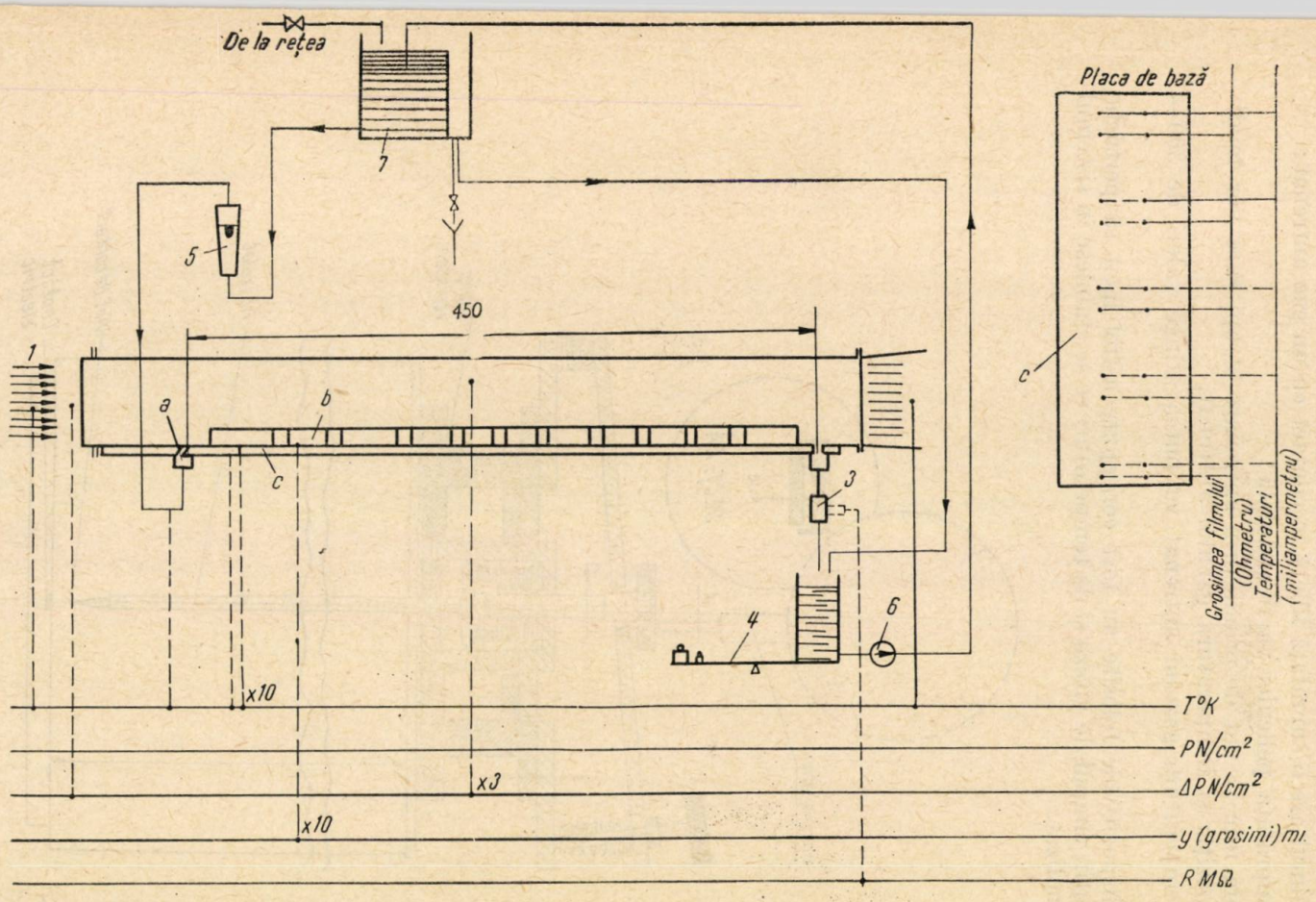


Fig. 2. — Tunel hidro-aerodinamic experimental :

1 — gaze fierbinți ;

2 — tunel hidro-aerodinamic (zona de lucru) : *a* — admisie lichid de protecție (film), *b* — vizori din sticla termorezistentă, *c* — placă de bază echipată cu ploturi pentru măsurarea rezistenței electrice a filmului și termocuplu ;

3 — rezistență fixă pentru compensarea efectului temperaturii ;

4 — sistem de măsurare a debitului ;

5 — rotametre ;

6 — pompă ;

7 — vas de nivel constant.

b) filmul curge pe o suprafaţă solidă metalică;

c) filmul are o suprafaţă liberă în contact cu un gaz antrenat;

d) suprafaţa peliculei va fi ondulată;

e) din film se pot desprinde prin antrenare stropi care vor modifica compoziţia şi temperatura gazului antrenat;

f) temperatura gazului antrenat va putea atinge valori de 300—700°C;

g) dispozitivele folosite au fost concepute astfel încît să perturbe cît mai puţin cîmpul de viteze şi de temperaturi ce se stabilesc în sistemul bifazic analizat.

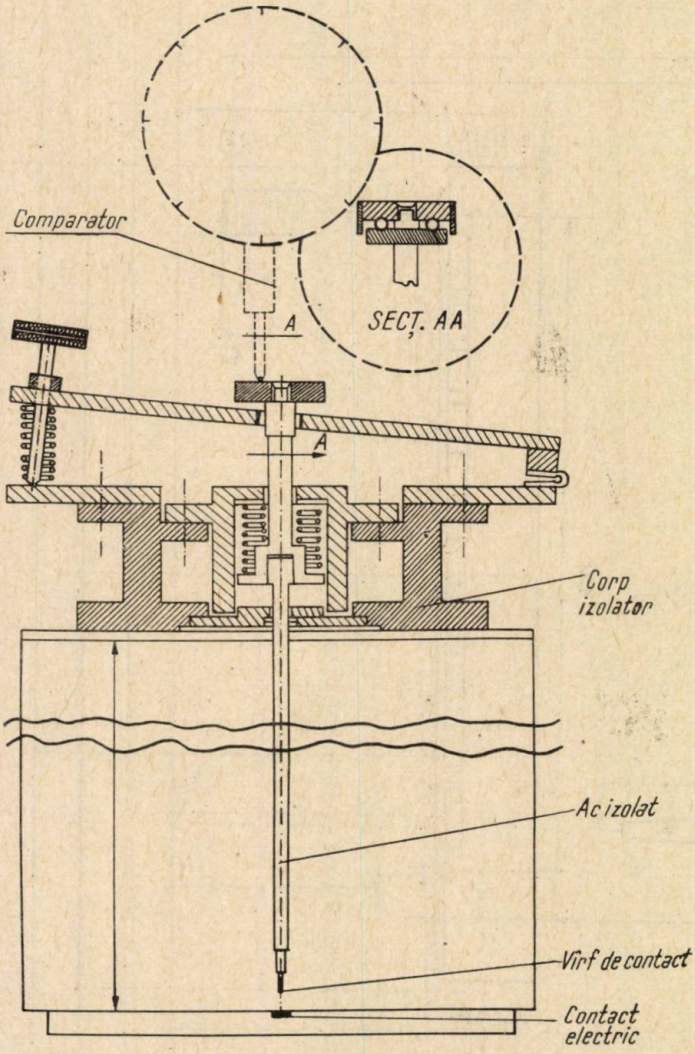


Fig. 3. — Dispozitivul de măsurare a grosimii filmului prin metoda acului de contact.

Pentru obținerea și prelucrarea informațiilor s-au prevăzut atît dispozitive care permit măsurarea directă a grosimii filmului, cît și transformarea și prelucrarea unor mărimi electrice legate de grosimea filmului. Din prima categorie face parte dispozitivul mecanic cu ac de contact, care va fi prezentat în continuare.

S-a realizat (vezi fig. 3) un dispozitiv de măsură directă care permite citirea pe cadranul unui comparator a grosimii filmului. Momentul stabilirii contactului dintre suprafața filmului și vîrful acului este evidențiat printr-un contact electric (lichidul utilizat fiind un bun electrolit). Un alt contact electric permite stabilirea precisă a momentului cînd acul a atins peretele solid pe care este antrenat filmul. Se poate fixa astfel cu precizie originea ordonatei pe cadranul comparatorului. Precizia sistemului utilizat este legată în special de clasa de precizie a comparatorului utilizat, cuprinsă în limitele 0,01 și 0,001 mm.

Dezavantajul metodei rezidă în stabilirea imprecisă a momentului desprinderii acului de suprafața filmului, desprindere afectată mult de fenomenele de capilaritate și de viteza gazului, care rupe coloana lichidă formată între vîrful acului și film. Pentru a localiza contactul electric numai între vîrful acului și film, suportul și acul au fost izolate electric. Pentru a evita polarizarea, sursa de curent folosită în circuitul de semnalizare a fost un curent alternativ de circa 1000 Hz.

În figura 4 se prezintă dispozitivul de măsură cu ac montat în zona de lucru a tunelului.

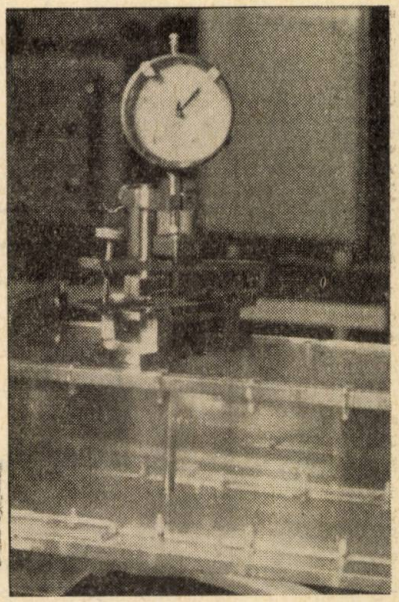


Fig. 4. — Dispozitivul de măsurare cu ac montat în zona de lucru a tunelului.

Avantajele principale ale dispozitivului de măsurare cu ac constau în simplitatea obținerii informațiilor și în contactul aproape punctiform cu filmul ; el nu necesită străpungeri în placa de bază pe care este antrenat filmul, evitînd discontinuități în această zonă.

Dezavantajele dispozitivului sînt legate în special de efectul de histerezis care apare la desprinderea filmului de ac, de o ușoară perturbație a cîmpului de viteze în gazul antrenat, legată de introducerea acului în tunel, de imposibilitatea utilizării procedeului în cazul unor construcții mai complicate, de dificultatea obținerii unor informații relative la variația grosimii filmului în curgerea ondulată a acestuia. Cu toate acestea, dispozitive similare au fost larg utilizate [2]. Pentru a elimina o serie din aceste dezavantaje, concomitent cu dispozitivul prezentat au fost preconizate și alte dispozitive, utilizînd în special metode bazate pe transformarea electrică a informațiilor.

Se vor prezenta în continuare, pe baza schemei generale de prelucrare a informației, dispozitivele prevăzute și unele particularități.

În cazul cel mai frecvent întîlnit în tehnică, filmul lichid are în curgere un aspect ondulat. Urmărind analiza valurilor ce se propagă pe suprafață,

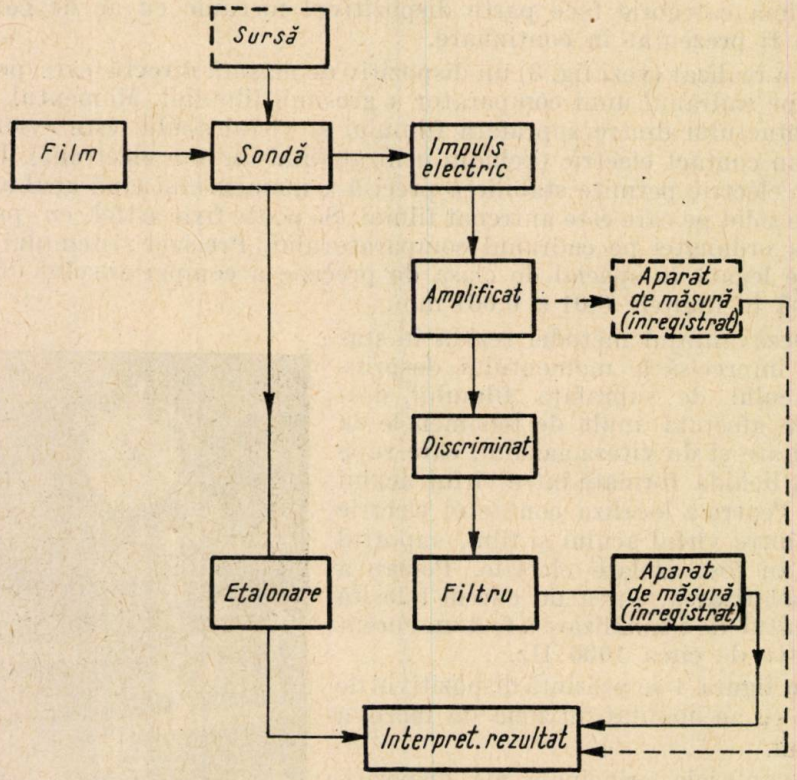


Fig. 5. — Schema fluxului de informații privind măsurarea și analiza grosimii filmului lichid.

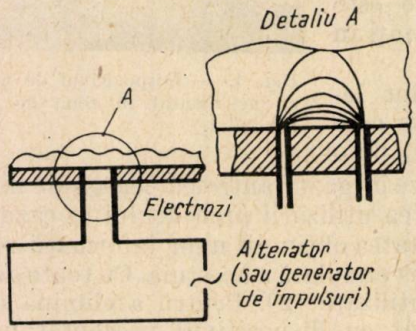


Fig. 6. — Închiderea circuitului electric prin filmul lichid.

s-a dezvoltat o tehnică de măsurătoare mai complexă, urmărind în final corelarea fenomenelor ondulatorii specifice dinamicii filmului de procesele de transport de energie caracteristice mașinilor energetice.

În figura 5 se prezintă o schemă care a stat la baza dispozitivelor de măsurare preconizate în cadrul Institutului de energetică al Academiei R.S. România. S-au realizat astfel două tipuri de dispozitive, şi anume :

a) dispozitiv bazat pe măsurarea rezistenţei electrice a filmului ;

b) dispozitiv bazat pe măsurarea absorbţiei unui fascicul luminos în film.

Corelaţia ce se poate stabili între conductivitatea electrică a filmului lichid c şi grosimea sa medie $\overline{y}$ între doi electrozi montaţi în placa de bază (vezi fig. 6) este de forma

$$C = A\gamma\overline{y} \text{ ohm}^{-1}, \tag{2}$$

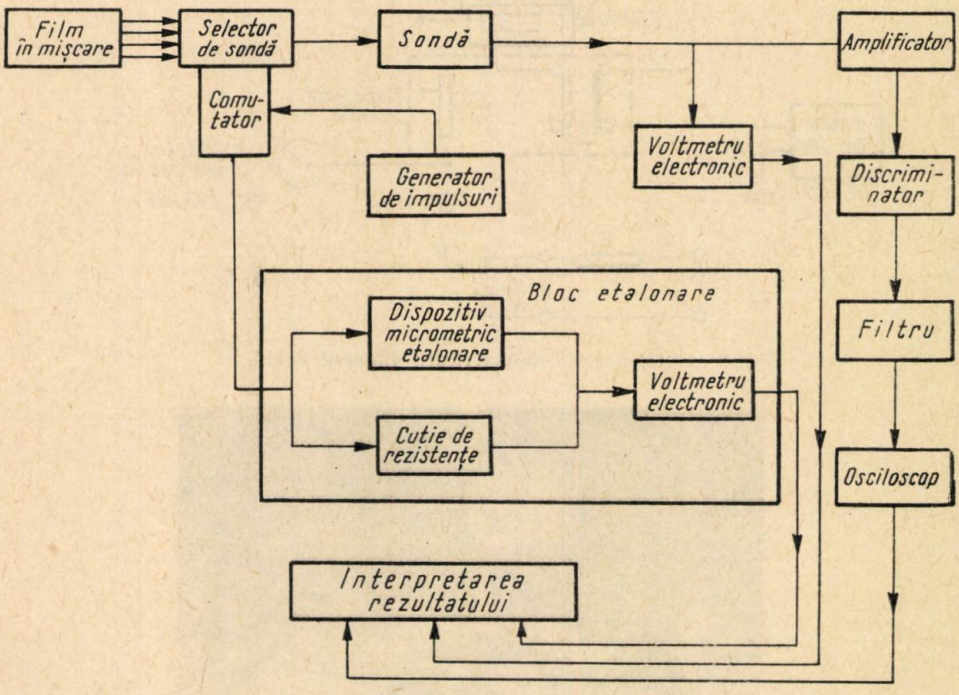


Fig. 7. — Schema fluxului de informaţii la analiza grosimii filmului prin metoda sondei electrice.

unde C este conductivitatea electrică a filmului măsurată cu ajutorul dispozitivului şi γ conductivitatea specifică a lichidului, exprimate în $\text{ohm}^{-1}\ \text{cm}^{-1}$ la temperatura de lucru cunoscută, A fiind un coeficient specific condiţiilor de lucru, constant în anumite limite de grosime.

Schema fluxului de informaţii, prezentată în figura 5, se particularizează în cazul măsurătorilor bazate pe rezistenţa filmului (fig. 7).

Sonde formate fie din doi electrozi filiformi distanţaţi cu circa 10 d, unde d este diametrul firului de platină utilizat, fie dintr-un singur electrod, izolat printr-un inel de placa metalică ce constituie cel de-al doilea electrod, sînt plasate în placa pe care este antrenat filmul lichid. Alimentarea cu curent se face de la un generator de impulsuri în domeniul audiofrecvenţelor, realizîndu-se un montaj electric prezentat schematic în figura 8.

Pentru a determina coeficienţii A din ecuaţia (2) se ridică curba de etalonare pentru diverse temperaturi ale lichidului la diverse conductivităţi specifice pentru tipurile de sonde folosite. Etalonarea se face în condiţii statice, folosindu-se în acest scop un dispozitiv de etalonare prezentat în figura 9.

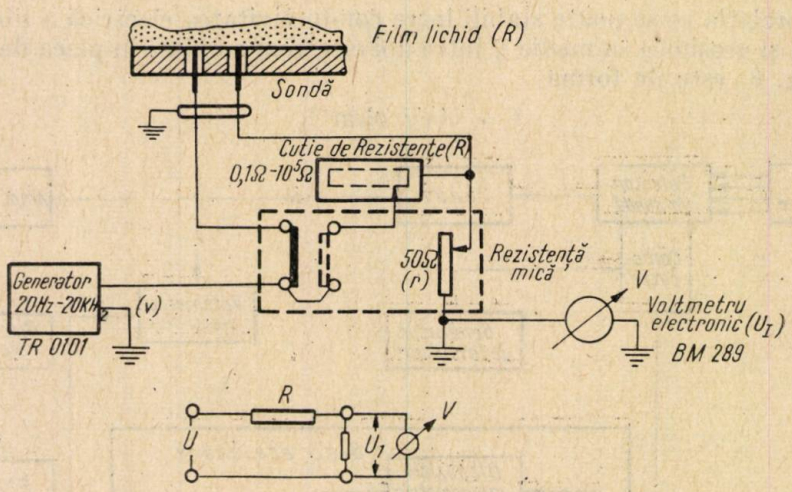


Fig. 8. — Măsurarea conductivităţii filmului lichid.

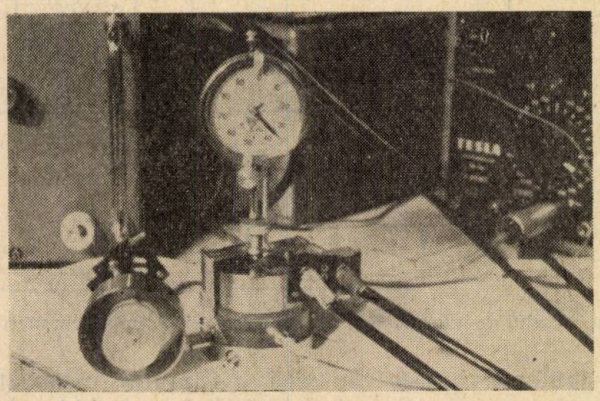


Fig. 9. — Sondă pentru etalonarea sistemelor de măsură bazată pe rezistenţa electrică a filmului.

Sonda cu cei doi electrozi filiformi este montată în capul unui piston mobil de teflon. Între capul pistonului şi fundul plat al unui cilindru termostatat se formează un film, a cărui grosime poate fi variată cu ajutorul unui şurub şi măsurată cu un comparator. Rezistenţa electrică a filmului este măsurată cu precizie, înlocuind cu ajutorul unui comutator filmul cu o rezistenţă fixă de mărime cunoscută, aleasă astfel încît căderea de tensiune citită la voltmetrul electronic V să fie aceeaşi introducînd în montaj filmul sau rezistenţa (fig. 8).

Cu toate că valorile obținute pentru grosimea filmului prin metoda sondelor electrice au un caracter mediu, medierea făcîndu-se între cei doi electrozi, se observă totuși o variație în timp legată de caracterul cvasialeatoriu al propagării ondulațiilor de suprafață. Se va obține astfel o variație în timp a rezistenței, care poate furniza informații asupra caracterului mișcării ondulatorii mai ales în anumite regimuri caracterizate printr-o lungime de undă mai mare decît distanța dintre electrozi.

Separarea semnalului purtător, avînd frecvența dată de generatorul de impulsuri, de semnalul variabil legat de caracterul ondulatoriu al filmului se face utilizîndu-se un discriminator (fig. 7). Un filtru, permite analiza diverselor game de frecvențe. Metoda utilizată bazată pe măsurarea rezistenței electrice a filmului permite determinarea unor valori ale grosimii filmului și a variației lor în timp pe o anumită distanță fixă.

Avantajul constă în posibilitatea extinderii sistemului de măsură la instalații de formă complicată, folosind sonde de o construcție relativ simplă. Precizia măsurătorilor este limitată, ca și în cazul metodei care folosește acul de contact de comparatorul utilizat pentru etalonare.

Dezavantajele metodei sînt legate în special de perturbațiile care pot apărea prin depunerea unor impurități pe electrozi, care modifică mult rezultatele, precum și de necesitatea de a verifica continuu conductivitatea specifică γ a lichidului în condițiile de temperatură reale.

Pentru a putea face o analiză mai precisă a fenomenelor ondulatorii care au loc în filmul în curgere, restrîngînd domeniul de investigație la dimensiuni de ordinul $\varnothing \cong 1 \ldots 2$ mm, a fost dezvoltată o metodă optică de investigație. În figura 10 se prezintă schematic principiul acestei metode. Un fascicul luminos monocromatic de dimensiunile amintite mai sus străbate filmul colorat în prealabil, excitînd catodul unui tub fotomultiplicator. Între intensitatea fasciculului incident I_0 și intensitatea fasciculului după absorbție parțială în filmul aditivat se stabilește o relație de forma

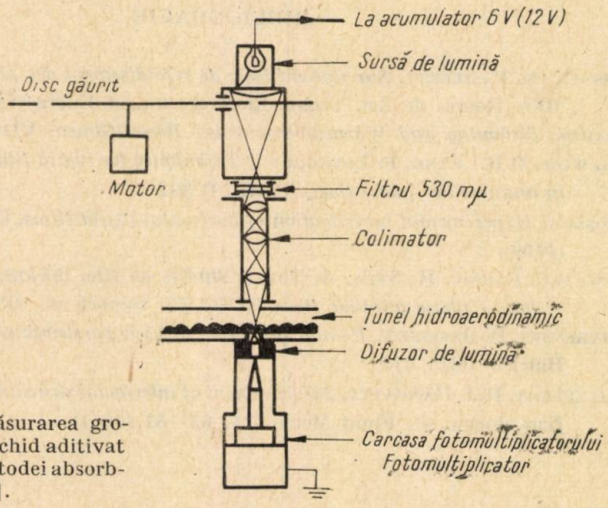


Fig. 10. — Măsurarea grosimii filmului lichid aditivat cu ajutorul metodei absorbției luminii [7].

$$I = I_0 e^{-k\nu} \text{ lumeni}, \qquad (3)$$

unde y reprezintă grosimea filmului şi k o constantă, legată de natura colorantului şi de spectrul obţinut după filtrare.

Se poate obţine cu uşurinţă o curbă de etalonare, folosind în acest scop cuve din sticlă utilizate frecvent în tehnica spectrofotometriei. Precizia acestora este de 0,001 mm.

Pentru a uşura prelucrarea informaţiilor obţinute de la fotomultiplicator, semnalul luminos este întrerupt, folosindu-se în acest scop un stroboscop mecanic. Se foloseşte un aparataj electronic, construit special pe baza schemei din figura 5. Pentru o bună reproductibilitate a datelor, spotul luminos este difuzat pe catodul fotomultiplicatorului, care prezintă în general neuniformităţi în răspuns.

Avantajele obţinute prin utilizarea metodei optice sînt legate în special de posibilitatea de a prelucra variaţia într-un punct al grosimii filmului, precum şi de indiferenţa rezultatelor faţă de cîmpul de temperaturi.

Dezavantajele constau în dificultăţile de amplasare a vizorilor în sisteme mai complicate şi în obligativitatea de a introduce în film un colorant (în general violet de genţiană) şi de a menţine o anumită concentraţie a acestuia în cursul experienţelor.

Prin dezvoltarea şi aplicarea metodei de măsurare a grosimii filmului cu ac de contact, a metodei bazate pe rezistenţa electrică şi a metodei optice, se pot corela fenomene complexe care concurează la procesele de schimb de căldură prin filme lichide, punînd totodată la îndemîna cercetării mijloace practice, realizabile de măsurare şi analiză dinamică a grosimii filmelor lichide.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Pimsner, A. Vasilescu, *Sur une méthode de refoidissment des palettes de la turbine à gaz.* Rev. Roum. de Sci. Techn.-Electrotechn. et Energetique, **11**, *1*, 59—67 (1966).
2. H. Brauer, *Strömung und Wärmeübergang bei Riesselfilmen*, VDI Forsch., *157* (1956).
3. E.F. Hewitt, D.R. King, P. Lovegrove, *Techniques for liquid film and pressure drop studies in annular two-phase flow*, AERE, R 3921.
4. J.J. Rossum, *Experimental investigation of horizontal liquid films*, Chem. Eng. Sci., 4, 35—52 (1959).
5. L. Biasi, G.C. Cleric, R. Sala, A. Tozzi, *Studies on film thickness and velocity distribution of two — phase annular flow*, EURAEC, Report nr. 1959, 1968.
6. R. Putyrevski, R. Jasinsici, *Pomiar grubosci cinekich warstewek wody metoda opornoscinowa*, Buletin IMP, *317*.
7. V.L. Lilleleht, R.J. Hanratty, *Measurement of interfacial structure for co—current air—water flow*, Journ. of. Fluid Mech., **11**, 65—81 (1961).

FLUXUL DE DISPERSIUNE AL UNUI CIRCUIT MAGNETIC CU MAGNET PERMANENT

DE

A. TIMOTIN şi M. MARINESCU

621.318.2 :621.042.001

Se studiază cîmpul de dispersiune magnetică al unui circuit magnetic cu simetrie cilindrică, avînd un magnet permanent inelar din ferită. Se calculează fluxurile de dispersie parţiale corespunzătoare diferitelor zone de închidere a liniilor cîmpului de dispersie şi se dau formule practice de calcul şi curbe pentru determinarea coeficientului de dispersie necesar proiectării circuitelor magnetice pentru difuzoare.

1. PROBLEMA STUDIATĂ

O dată cu dezvoltarea producţiei de ferite dure, circuitele magnetice cu magneţi permanenţi au căpătat o utilizare tot mai largă. Configuraţia geometrică optimă a unui astfel de circuit magnetic este aceea care asigură o valoare maximă a inducţiei magnetice B din întrefier pentru o cantitate dată de material feromagnetic dur, cu caracteristică magnetică cunoscută (fig. 1). Pentru alegerea acestei configuraţii optime, respectiv a înălţimii optime a magnetului permanent, trebuie să se cunoască [1], [2] raportul dintre fluxul magnetic de dispersiune Φ_d şi fluxul util Φ_u din întrefier, respectiv *coeficientul de dispersiune* σ sau coeficientul de utilizare a fluxului $k_u = 1 - \sigma$:

$$\sigma = \frac{\Phi_d}{\Phi_d + \Phi_u}; \quad k_u = 1 - \sigma = \frac{\Phi_u}{\Phi_d + \Phi_u} \quad (0 < \sigma < 1;\ 1 > k_u > 0). \quad (1.1)$$

În cele ce urmează studiem această problemă pentru circuitul magnetic cu simetrie cilindrică al unui difuzor cu magnet permanent din ferită, cu aproximaţii satisfăcătoare din punct de vedere practic. Din cauză că inducţia magnetică B_m este mult mai mică la ferite decît valoarea B_δ cerută în întrefier, magnetul M trebuie să aibă o secţiune transversală A mult mai mare ca a întrefierului, ceea ce se obţine cu magneţi de formă inelară magnetizaţi transversal, care constituie mantaua exterioară a circuitului magnetic (fig. 2).

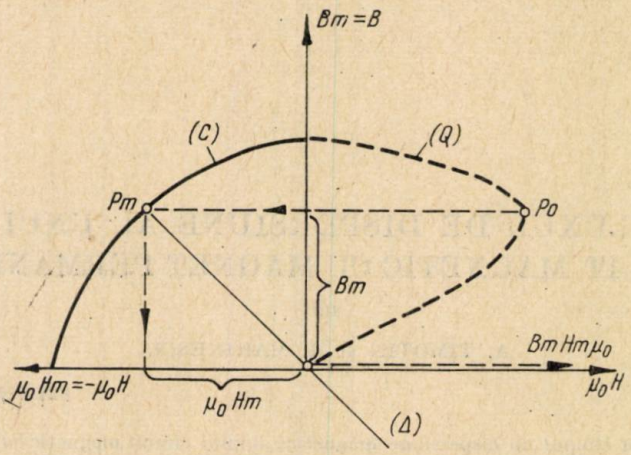


Fig. 1. — Caracteristicile magnetice ale unui material magnetic dur.

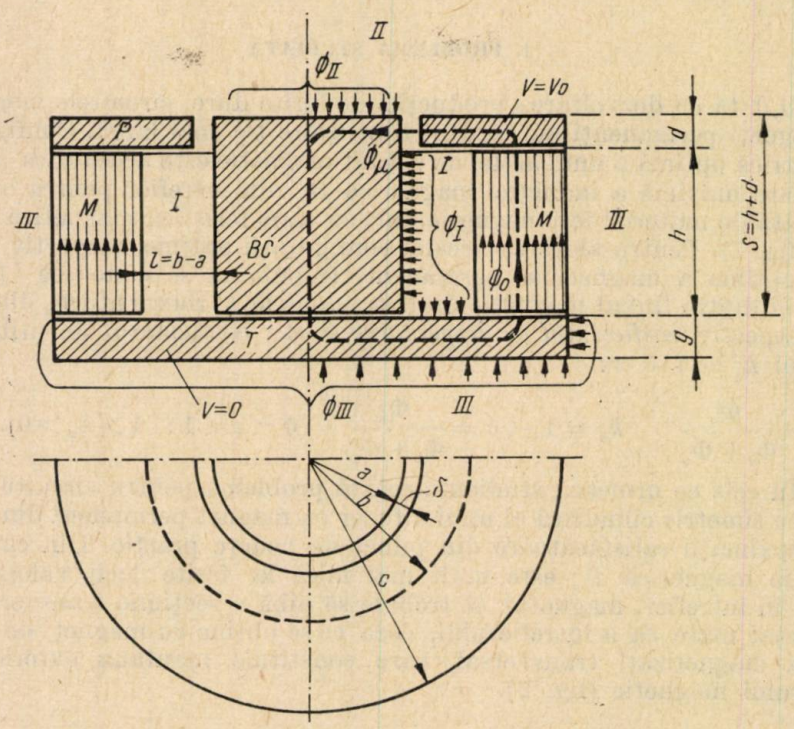


Fig. 2. — Circuitul magnetic cu simetrie cilindrică al unui difuzor cu magnet permanent din ferită (inelar).

2. IPOTEZE DE CALCUL

Circuitul magnetic al difuzorului cuprinde, în afara magnetului inelar M, talpa inferioară T, bolțul central BC și piesa polară P, toate din fier moale.

Fluxul de dispersiune este localizat în trei regiuni distincte : zona interioară (I) a circuitului, zona superioară (II) și cea exterioară (III). Ținînd seama că acest flux este concentrat în principal în vecinătatea întrefierului, caracterul destul de convențional al separării zonelor II și III nu afectează valoarea practică a rezultatelor. Se poate scrie

$$\Phi_d = \Phi_{\mathrm{I}} + \Phi_{\mathrm{II}} + \Phi_{\mathrm{III}}, \tag{2.1}$$

unde Φ_{I} este fluxul de dispersie care intră în fața laterală cilindrică (de rază a și înălțime h) a bolțului central, cum și în fața interioară (de forma unei coroane circulare, de rază a și $b = a+l$) a tălpii T, Φ_{II} fluxul de dispersiune care intră în fața superioară circulară (de rază a) a bolțului central, iar Φ_{III} fluxul de dispersiune care intră în fața exterioară a tălpii.

Evident, suma

$$\Phi_d + \Phi_u = \Phi_{\mathrm{I}} + \Phi_{\mathrm{II}} + \Phi_{\mathrm{III}} + \Phi_u = \Phi_0, \tag{2.2}$$

adică fluxul total care intră din aer în ansamblul bolț-talpă, este egal cu fluxul Φ_0 care iese din talpă, intrînd în magnetul permanent pe la baza acestuia.

Calculele vor fi efectuate ținînd seama de următoarea gamă de valori (acoperitoare) pentru parametrii care definesc configurația geometrică a circuitului magnetic (vezi fig. 2) :

$$0{,}8 \leqslant \frac{h}{a} \leqslant 1{,}6\,; \quad 1{,}2 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 3\,; \quad 0{,}05 \leqslant \frac{\delta}{l} \leqslant 0{,}55\,; \quad 1{,}5 \leqslant \frac{h}{d} \leqslant 5 \tag{2.3}$$

și considerînd uneori ca referință următoarele dimensiuni caracterizînd întrefierul :

$$a = 7{,}95\text{mm}\,; \quad \delta = 0{,}9\text{mm}\,; \quad d = 4{,}2\text{mm}. \tag{2.4}$$

Principalele aproximații și ipoteze simplificatoare utilizate în calculul fluxului magnetic de dispersie sînt următoarele :

a) permeabilitatea porțiunilor de fier moale va fi considerată infinită. Aceste porțiuni vor fi deci echipotențiale. Vom lua egal cu zero potențialul magnetic scalar al ansamblului bolț + talpă ($BC + T$) și egal cu V_0 potențialul piesei polare (P). Vom mai nota cu

$$\Phi^* = 4aV_0\mu_0 \tag{2.5}$$

un flux magnetic de referință ;

b) la calculul potențialului magnetic V_{I} din zona interioară (I) se va presupune că pentru $r = b$ (fața interioară a magnetului inelar) potențialul magnetic rămîne liniar conform relației (vezi fig. 3)

$$V_{\mathrm{I}}(b, z) = \frac{z}{h} V(b, h) = \frac{z}{h} V_0 = \frac{z}{h} \cdot \frac{\Phi^*}{4a\mu_0}. \tag{2.6}$$

Această aproximație corespunde aceleia că în lungul magnetului fluxul se conservă și că deci (secțiunea transversală fiind invariabilă) cîmpul e uniform. Valabilitatea practică a acestei aproximații se poate justifica global aposteriori, calculînd fluxul de dispersiune care iese totuși prin fața interioară a magnetului și abaterea corespunzătoare de la repartiția liniară a potențialului;

c) la calculul potențialului magnetic V_{II} din zona superioară (II) se va presupune că piesa polară (P) este infinit extinsă radial. Această aproximație este justificată de faptul că fluxul Φ_{II} prin capătul bolțului ($r<a$) este puțin influențat de comportarea potențialului departe de axul de simetrie ($r > c \gg a$). O evaluare a erorii astfel comise se poate face în cazul unei probleme similare cu simetrie plană, adică în cîmp plan-paralel. Calculul efectuat cu transformarea conformă arată că aproximarea este posibilă și, în limitele (2.3), eroarea este inferioară lui 1,6%;

d) la calculul potențialului magnetic V_{III} din zona exterioară și inferioară III, cîmpul se va considera plan-paralel. Această aproximație este justificată de faptul că zona de cîmp semnificativă pentru calculul fluxului Φ_{III} se află în vecinătatea suprafeței $r = c$, la distanță suficient de mare de ax pentru a putea aproxima cîmpul cu simetrie cilindrică cu un cîmp plan-paralel. Totodată în calculul potențialului V_{III} se va aproxima în mod convenabil și plauzibil variația lui pe fața exterioară ($r = c$) a magnetului permanent;

e) la calculul potențialului magnetic în zonele I și II care admit drept frontieră fețe ale domeniului delimitat de întrefier ($a < r < a + \delta$) se va înlocui întrefierul real de grosime δ, la marginea căruia potențialul variază continuu, monoton și rapid de la $V = V_0 (r = a + \delta)$ la $V = 0$ ($r = a$), cu un întrefier fictiv echivalent, infinit scurt, corespunzător deci unui salt de potențial de la V_0 la 0, plasat într-un punct $r = a^* = a + \delta^*$ astfel ales, încît fluxul de dispersiune calculat în aceste condiții printr-o anumită suprafață să fie practic neschimbat. Ținînd seama că $\delta^* < \delta \ll a$, echivalența poate fi stabilită cu suficientă precizie pentru un cîmp plan-paralel care diferă neesențial de cîmpul real, cu simetrie cilindrică, în apropierea întrefierului (zona de cîmp intens). Aceasta este *metoda întrefierului infinit scurt echivalent*, care, fără erori mari, simplifică în mod esențial condițiile de frontieră ale cîmpului magnetic de dispersiune la marginea întrefierului.

3. CALCULUL POTENȚIALULUI MAGNETIC ÎN ZONA INTERIOARĂ (I) ȘI AL FLUXULUI DE DISPERSIUNE PARȚIAL Φ_I

Pentru calculul fluxului magnetic de dispersiune Φ_I prin suprafața laterală a bolțului central și prin porțiunea de lungime l a tălpii polare, este necesar să se integreze ecuația Laplace pentru potențialul magnetic $V_I(r, z)$ în domeniul I (vezi fig. 3). În coordonate cilindrice

$$\Delta V_I = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_I}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 Vr}{\partial z^2} = 0. \tag{3.1}$$

Condiţiile pe frontierele domeniului au fost discutate în capitolul 1 :

$$V_I(a, z) = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{3.2}$$

$$V_I(r, 0) = 0, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \tag{3.3}$$

$$V_I(b, z) = V_0 \frac{z}{h}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{3.4}$$

$$V_I(r, h) = \begin{cases} V_0 & a + \delta^* < r \leqslant b, \\ 0, & a \leqslant r < a + \delta^* \quad (a + \delta^* = a^*), \end{cases} \tag{3.5}$$

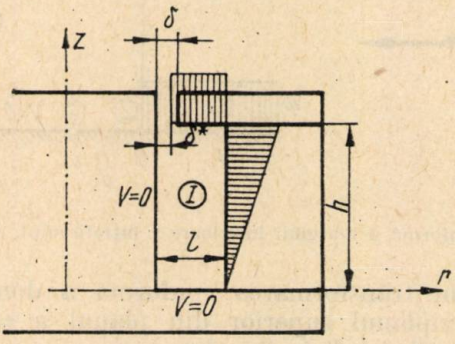


Fig. 3. — Condiţii de frontieră pentru potenţialul magnetic în regiunea I.

unde δ^* se va determina mai jos cu metoda întrefierului infinit scurt echivalent. Soluţia se va căuta cu metoda superpoziţiei sub forma

$$V_I(r, z) = V_I^{\alpha}(r, z) + V_I^{\beta}(r, z), \tag{3.6}$$

în care V_I^{α} este potenţialul determinat de repartiţia în treaptă (3.5) a potenţialului pe piesa polară cu condiţii de frontieră omogene ($V_I^{\alpha} = 0$) în rest, iar V_I^{β} potenţialul determinat de repartiţia liniară (3.4) a potenţialului pe faţa interioară a magnetului cu condiţii de frontieră omogene ($V_I^{\beta} = 0$) în rest. În mod corespunzător, fluxul Φ_I căutat va fi dat de expresia

$$\Phi_I = \mu_0 \int_0^h \left(\frac{\partial V_I}{\partial r}\right)_{r=a} 2\pi a\,dz + \mu_0 \int_a^b \left(\frac{\partial V_I}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot 2\pi r \cdot dr = \Phi_I^{\alpha} + \Phi_I^{\beta}, \tag{3.7}$$

în care Φ_I^{α} şi, respectiv, Φ_I^{β} sînt calculaţi cu V_I^{α} şi, respectiv, V_I^{β}.

3.1. Determinarea poziţiei întrefierului infinit scurt echivalent

Distanţa δ^* defineşte poziţia unei trepte de potenţial V_0 echivalentă variaţiei reale a potenţialului în întrefier din punctul de vedere al fluxului prin suprafaţa laterală a bolţului.

Pentru calculul lui δ^* se studiază distribuţia potenţialului magnetic în vecinătatea marginii interioare a întrefierului, întrucît această distribuţie influenţează în principal coeficientul de dispersiune.

Deoarece $\delta \ll r$, calculul se poate face cu bună aproximație în coordonate carteziene (cîmp plan-paralel), considerînd o extensiune infinită a laturilor (deoarece $l \gg \delta$; $d \gg \delta$; $h \gg \delta$), cu următoarele condiții pe frontiere (noile axe sînt indicate în figura 4*a*) :

$$\begin{aligned} &V(y) = V_0 \qquad (\delta \leqslant y,\ x = 0) \text{ și } (y = \delta,\ x < 0), \\ &V(x, 0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{3.8}$$

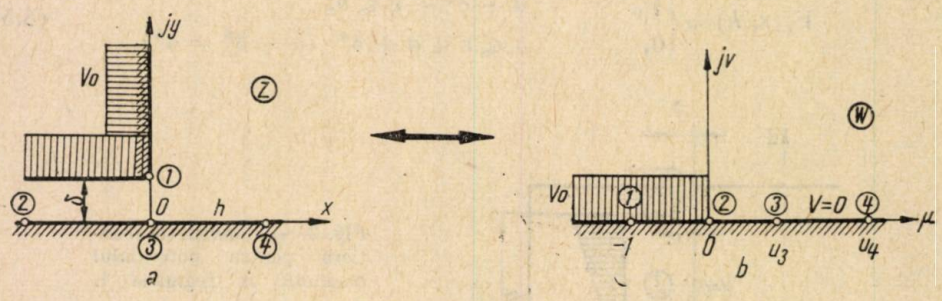


Fig. 4. — Transformarea conformă a marginii inferioare a întrefierului.

Problema se rezolvă prin transformarea conformă a domeniului din planul $z = x + jy$ în semiplanul superior din planul $w = u + jv$ cu ajutorul formulei Schwartz-Christoffel. Se obține

$$z = \frac{\delta}{\pi}\left(2\sqrt{w+1} - \ln\frac{\sqrt{w+1}+1}{\sqrt{w+1}-1}\right). \tag{3.9}$$

În planul w, cu condițiile de frontieră care rezultă (vezi fig. 4*b*), potențialul complex W are expresia cunoscută

$$W = \frac{V_0}{\pi}\ln w = \frac{V_0}{\pi}\ln\rho + j\frac{\theta}{\pi}V_0 = U + jV. \tag{3.10}$$

Interesează expresia fluxului care intră în bolțul central pe lungimea O-h (pentru simplitate se va considera fluxul pe unitatea de lungime în direcția perpendiculară pe planul z) :

$$\Phi^{(1)}_{(0,h)} = \mu_0[U(u_4, 0) - U(u_3, 0)] = \mu_0\frac{V_0}{\pi}\ln\frac{u_4}{u_3}. \tag{3.11}$$

Abscisele u_3 și u_4 rezultă din condiția ca originea axelor de coordonate din planul z să se transforme în $w = u_3$, iar punctul $z = h$ să se transforme în $w = u_4$. Se obține

$$u_3 = 0{,}4392\,; \quad u_4 \simeq \left(\frac{\pi h}{2\delta}\right)^2 \gg 1, \tag{3.12}$$

deci

$$\Phi^{(1)}_{(0,h)} \simeq \mu_0\frac{V_0}{\pi}\ln\frac{\pi^2 \cdot h^2}{4\delta^2 \cdot 0{,}4392}. \tag{3.13}$$

Pentru obținerea lui δ^*, acest flux trebuie egalat cu fluxul creat prin aceeași suprafață de o variație de potențial în treaptă, cu saltul la distanța δ^* de bolțul central.

Fluxul $\Phi^{(2)}_{(0,h)}$ se calculează efectuînd transformarea conformă reprezentată în figura 5. Funcția care realizează transformarea este

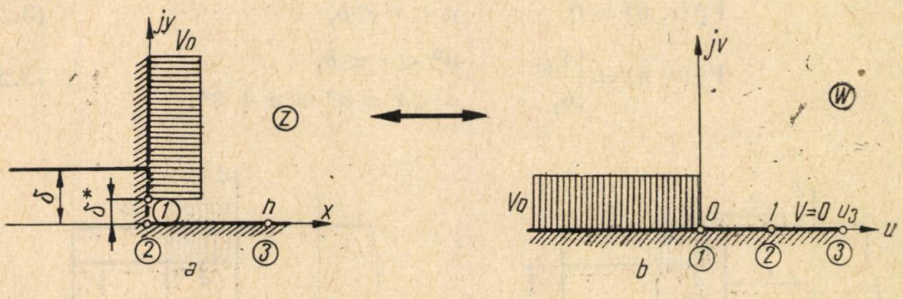


Fig. 5. — Transformarea conformă în cazul întrefierului infinit scurt echivalent.

$$z = 2C\int \frac{dw}{2\sqrt{w-1}} = 2C\sqrt{w-1} + z_0 = \delta^*\sqrt{w-1} \qquad (3.14)$$

dacă se impun condițiile de corespondență geometrică

$$z = j\delta^* \to w = 0, \qquad z = 0 \to w = 1.$$

În planul w, potențialul complex W este dat tot de relația (3.10). Fluxul lineic care interesează este deci

$$\Phi^{(2)}_{(0,h)} = \mu_0 [U(u_3, 0) - U(u_2, 0)] = \mu_0 \frac{V_0}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h^2}{\delta^{*2}}\right). \qquad (3.15)$$

Egalînd cu (3.13) și cu $h/\delta^* \gg 1$, rezultă deplasarea treptei de potențial echivalente :

$$\delta^* = 0{,}422\ \delta. \qquad (3.16)$$

Un calcul similar, mai exact, al acestei mărimi, efectuat cînd se consideră l *finit*, arată că în intervalul $\frac{l}{\delta} = 2 \ldots 5$ trebuie să se ia

$$\boxed{\delta^* = 0{,}427\ \delta.} \qquad (3.16')$$

3.2. Calculul fluxului Φ^{α}_{I} produs de variația în treaptă a potențialului pe fața exterioară a tălpii polare

Ecuația lui Laplace (3.1) pentru potențialul magnetic V^{α}_{I} se rezolvă prin metoda separării variabilelor, căutîndu-se soluții elementare de forma

$$V^{\alpha}_{I}(r,z) = R^{\alpha}(r).z^{\alpha}(z), \qquad (3.17)$$

Conform definiției potențialului V_I^α, condițiile pe frontiere (vezi fig. 6*a*) sînt

$$V_I^\alpha(a, z) = 0, \qquad 0 < z < h, \tag{3.18}$$

$$V_I^\alpha(b, z) = 0, \qquad 0 < z < h, \tag{3.19}$$

$$V_I^\alpha(r, 0) = 0, \qquad a < r < b, \tag{3.20}$$

$$V_I^\alpha(r, h) = \begin{cases} V_0, & a^* < r < b, \\ 0, & a < r < a^* = a + \delta^*. \end{cases} \tag{3.21}$$

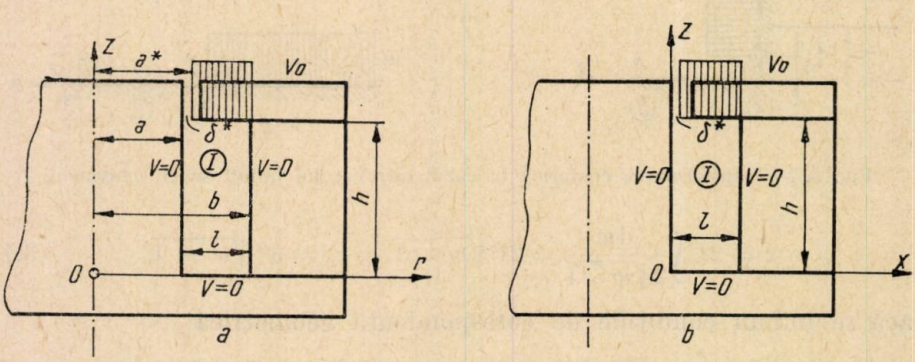


Fig. 6. — Condiții de frontieră pentru V_I^α.

Ecuația cu derivate parțiale (3.1) se separă în două ecuații diferențiale simple și se obțin soluțiile cu variabile separate

$$Z^\alpha(z) = \operatorname{sh} kz, \tag{3.22}$$

§

$$R^\alpha(r) = A_k J_0(kr) + B_k Y_0(kr). \tag{3.22'}$$

Valorile permise ale constantei k sînt valorile proprii ale problemei.

Cu condițiile (3.18) și (3.19) rezultă următoarea ecuație transcendentă de valori proprii în $x = ka$:

$$J_0(x) \cdot Y_0\left(x\frac{b}{a}\right) - J_0\left(x\frac{b}{a}\right) \cdot Y_0(x) = 0. \tag{3.23}$$

Rădăcinile $x_n = k_n a$ ale acestei ecuații sînt tabelate [3] în funcție de raportul b/a. Se observă că, pentru valorile care pot apărea la magneții permanenți de difuzoare $\left(1 < \frac{a}{b} \leqslant 2\right)$ cu o eroare sub 6‰ pentru prima și sub 2‰ pentru următoarele, rădăcinile sînt

$$x_n = k_n a \simeq \frac{n\pi}{\frac{b}{a} - 1}; \qquad k_n \simeq \frac{n\pi}{b - a} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.24}$$

În acest caz însă

$$k_n r \geqslant k_n a \geqslant k_1 a \simeq \frac{\pi a}{l} > \pi \tag{3.25}$$

şi de aceea funcţiile Bessel pot fi dezvoltate asimptotic [4]:

$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\cos\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8kr}\sin\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{(kr)^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{9}{128}\cos\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)\ldots\right], \tag{3.26}$$

$$Y_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\sin\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8kr}\cos\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{(kr)^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{9}{128}\sin\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)\ldots\right]$$

şi se pot reţine într-o primă aproximaţie (satisfăcătoare, întrucît $kr > \pi$) numai primii termeni. Observînd că $B_n/A_n = -J_0(k_n b)/Y_0(k_n b) = -J_0(k_n a)/Y_0(k_n a)$, rezultă că funcţiile proprii radiale (3.22′) pot fi alese (pînă la un factor de proporţionalitate) de forma

$$R_n^{\alpha}(r) = \frac{\pi}{2}(-1)^{n+1} k_n b \sqrt{\frac{l}{b}}\, Y_0(k_n b)\left[J_0(k_n r) - \frac{J_0(k_n b)}{Y_0(k_n b)}\, Y_0(k_n r)\right] \simeq$$
$$\simeq \sqrt{\frac{l}{r}} \sin\frac{n\pi(r-a)}{l} \tag{3.27}$$

şi, fiind soluţii ale ecuaţiei Bessel, sînt ortogonale în (a, b) (cu $R_n(a) = R_n(b) = 0$) cu ponderea r:

$$\int_a^b r \cdot R_n^{\alpha}(r) \cdot R_m^{\alpha}(r)\, \mathrm{d}r = 0, \qquad \text{pentru } m \neq n. \tag{3.28}$$

Soluţia generală a ecuaţiei Laplace pentru V_{I}^{α} va fi

$$V_{\mathrm{I}}^{\alpha}(r, z) = \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sh}\frac{n\pi z}{l} R_n^{\alpha}(r). \tag{3.29}$$

Pentru determinarea constantelor a_n se pune ultima condiţie la limită (3.21):

$$V_{\mathrm{I}}^{\alpha}(r, h) = \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\, R_n^{\alpha}(r) = f(r) = \begin{cases} V_0, & a^* < r < b, \\ 0, & a < r < a^*. \end{cases}$$

Coeficienţii a_n se determină din egalitatea

$$\int_a^b r\, V_{\mathrm{I}}^{\alpha}(r, h)\, R_m^{\alpha}(r)\, \mathrm{d}r = a_m \operatorname{sh}\frac{m\pi h}{l}\int_a^b r\,(R_m^{\alpha})^2\, \mathrm{d}r = V_0 \int_{a^*}^b r R_m^{\alpha}(r)\, \mathrm{d}r. \tag{3.30}$$

Rezultă

$$\int_a^b r\,(R_m^\alpha)^2\,dr \simeq l\int_a^b \sin^2\frac{m\pi\,(r-a)}{l}\,dr = \frac{l^2}{2}, \tag{3.31}$$

$$\int_a^b rR_m^\alpha(r)\,dr \simeq \frac{(-1)^{m+1}\cdot l^2}{\pi m}\left[\sqrt{\frac{b}{l}} - \sqrt{\frac{a^*}{l}}\cos\frac{m\pi}{l}(l+\delta^*)\right] \tag{3.32}$$

şi

$$a_n \simeq (-1)^{n+1}\frac{2V_0}{n\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi h}{l}}\left[\sqrt{\frac{b}{l}} - \sqrt{\frac{a^*}{l}}(-1)^n\cos\frac{n\pi\delta^*}{l}\right]. \tag{3.33}$$

Folosind expresia (3.27) pentru R_n^α rezultă potenţialul

$$V_I^\alpha(r,z) \simeq \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{b}{l}}(-1)^{n+1} + \sqrt{\frac{a^*}{l}}\cos\frac{n\pi\delta^*}{l}\right]\left(\operatorname{sh}\frac{n\pi z}{l}\Big/\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\right)R_n^\alpha(r). \tag{3.34}$$

Fluxul produs prin suprafaţa laterală a bolţului va fi

$$\Phi^\alpha_{I(0,\,h)} = \mu_0\int_0^h\left(\frac{\partial V_I^\alpha}{\partial r}\right)_{r=a}\cdot 2\pi a\cdot dz. \tag{3.35}$$

Cu Φ^* dat de(2.9) rezultă

$$\Phi^\alpha_{I(0,\,h)} = \Phi^*\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{b}{a}}(-1)^{n+1} + \sqrt{\frac{a^*}{a}}\cos\frac{n\pi\delta^*}{l}\right]\operatorname{th}\frac{n\pi h}{2l}. \tag{3.36}$$

Observînd că $h>l$ şi deci $1-\operatorname{th}\dfrac{n\pi h}{2l} \ll 1$, convergenţa seriei se poate ameliora, grupînd convenabil termenii şi ţinînd seama de [4]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 = 0{,}69315;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n\pi\delta^*}{l}}{n} = \frac{\pi\delta^*}{2l}\ln\frac{1}{2\left(1-\cos\dfrac{\pi\delta^*}{l}\right)} = \frac{\pi\delta^*}{l}\ln\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi\delta^*}{2l}} \quad (\delta^*\neq 0). \tag{3.37}$$

Seria rămasă este mult mai rapid convergentă şi se poate reţine din ea numai primul termen. Se obţine cu o *foarte bună aproximaţie* expresia

$$\Phi^\alpha_{I(0,\,h)} \simeq \Phi^*\left[\sqrt{\frac{b}{a}}\ln 2 + \frac{\pi\delta^*}{l}\sqrt{\frac{a^*}{a}}\ln\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi\delta^*}{2l}} - \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a^*}{a}}\cos\frac{\pi\delta^*}{l}\right)\left(1-\operatorname{th}\frac{\pi h}{2l}\right)\right]. \tag{3.38}$$

Fluxul produs prin porțiunea de lungime l a tălpii polare este

$$\Phi^{\alpha}_{I(a,\,b)} = \mu_0 \int_a^b \left(\frac{\partial V_I}{\partial_z}\right)_{z=0} 2\pi r\, dr. \tag{3.39}$$

Utilizînd expresia (3.34) a potențialului V^{α}_{I} și reținînd numai primul termen din cauza convergenței extrem de rapide a seriei obținute, rezultă

$$\Phi^{\alpha}_{I(a,\,b)} \simeq \Phi^* \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a^*}{a}} \cos\frac{\pi\delta^*}{l}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + 1\right)\frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{h\pi}{l}}. \tag{3.40}$$

Însumînd expresiile (3.38) și (3.40) și introducînd funcțiile reprezentate în figurile 7, 8 și 9 :

$$\psi_1\left(\frac{\delta}{l}\right) = \frac{\pi\delta^*}{l} \ln \frac{1}{2 \sin \dfrac{\pi\delta^*}{2l}}\,; \quad \psi_2\left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{l}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a^*}{a}} \cos\frac{\pi\delta^*}{l}\,;$$

$$\psi_3\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l}\right) = \frac{\sqrt{\dfrac{b}{a}} + 1}{\operatorname{sh}\, \pi h/l} + \operatorname{th}\frac{\pi h}{2l} - 1, \tag{3.41}$$

se obține pentru fluxul de dispersiune parțial determinat de variația în treaptă a potențialului pe piesa polară expresia

$$\Phi^{\alpha}_{I} \simeq \Phi^* \left[\frac{b}{a} \ln 2 + \sqrt{\frac{a^*}{a}}\, \psi_1\left(\frac{\delta}{l}\right) + \psi_2\left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{l}\right) \cdot \psi_3\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l}\right)\right]. \tag{3.42}$$

Observație. Dacă s-ar calcula același flux cu expresia potențialului determinat în aproximația unui cîmp plan-paralel, s-ar obține expresia

$$\Phi^{\alpha}_{I} \simeq \Phi^* \left[\ln 2 + \frac{\pi\delta^*}{l} \ln \frac{1}{2 \sin \dfrac{\pi\delta^*}{2l}} - \left(1 + \cos\frac{\pi\delta^*}{l}\right)\left(1 - \operatorname{th}\frac{\pi h}{2l}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \cos\frac{\pi\delta^*}{l}\right) \frac{2}{\operatorname{sh}\, \pi h/l}\right], \tag{3.43}$$

care ar da valori mai mici decît (3.42) aproximativ de $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ori, ceea ce arată că fluxul (3.43) poate fi corectat calculîndu-l pe lungimea cercului de rază $\sqrt{ab}$ (în loc de a-l calcula pe lungimea cercului de rază a, cum s-a procedat).

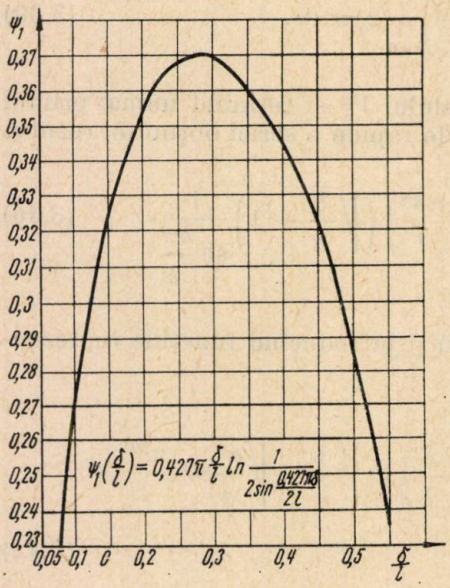


Fig. 7. — Funcția ajutătoare $\psi_1\left(\frac{\delta}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

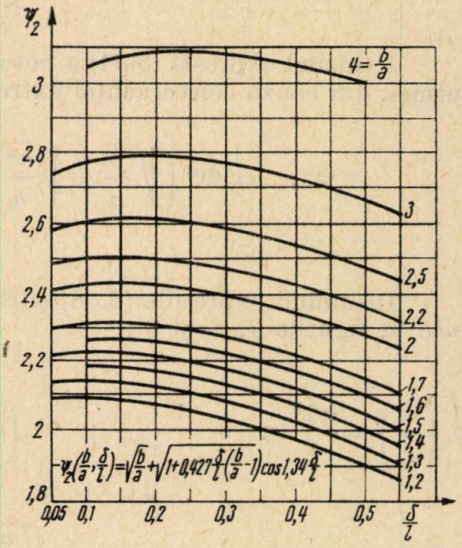


Fig. 8. — Funcția ajutătoare $\psi_2\left(\frac{b}{a},\frac{\delta}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

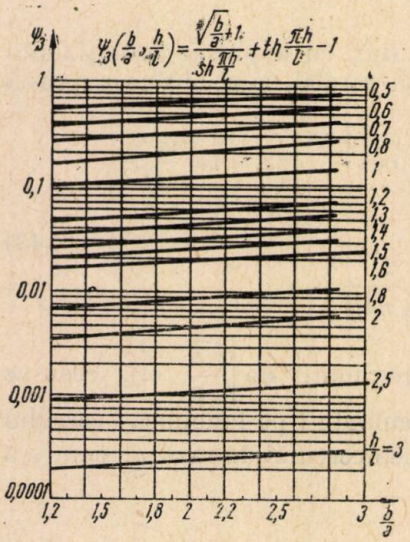


Fig. 9. — Funcția ajutătoare $\psi_3\left(\frac{b}{a},\frac{h}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

3.3. Calculul fluxului Φ_I^β produs de variația liniară a potențialului pe fața inferioară a magnetului (fig. 10)

Ecuația (3.1) pentru potențialul V_I^β se rezolvă tot prin metoda separării variabilelor, căutîndu-se soluții elementare cu variabile separate

$$V_I^\beta(r, z) = R^\beta(r) \cdot Z^\beta(z), \tag{3.44}$$

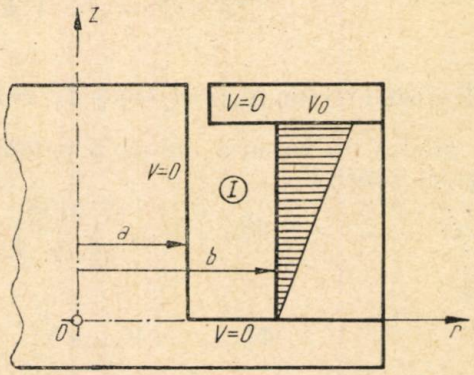


Fig. 10. — Condiții de frontieră pentru V_I^β.

cu următoarele condiții pe frontiere:

$$V_I^\beta(a, z) = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{3.45}$$

$$V_I^\beta(r, 0) = 0, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \tag{3.46}$$

$$V_I^\beta(r, h) = 0, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \tag{3.47}$$

$$V_I^\beta(a, z) = V_0 \frac{z}{h}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h. \tag{3.48}$$

Se obțin soluțiile cu variabile separate:

$$Z^\beta(z) = \sin kz \text{ cu } k = \frac{n\pi}{h}; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.49}$$

compatibilă cu (3.46), și

$$R_n^\beta(r) = C_n [I_0(kr) K_0(ka) - I_0(ka) K_0(kr)], \tag{3.50}$$

compatibilă cu (3.45), în care $I_0(x) = J_0(jx)$ și $K_0(x) = \frac{\pi}{2} [jJ_0(jx) - Y_0(jx)]$ sînt funcțiile Bessel modificate de ordinul zero.

Soluția generală a ecuației pentru V_I^β rezultă prin superpoziție:

$$V_I^\beta(r, z) = \sum_1^\infty C_n \sin \frac{n\pi z}{h} \left[I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \right]. \tag{3.51}$$

Pentru determinarea coeficienților C_n se pune condiția (3.48) și, dezvoltînd în serie Fourier de sinusuri funcția $V_0 \frac{z}{h}$ în intervalul $0 \leqslant z < h$ rezultă

$$V_{\mathrm{I}}^{\beta}(r,z) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \frac{I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \cdot \sin \frac{n\pi z}{h}. \tag{3.52}$$

Utilizînd relația $K_0(x) I_1(x) + I_0(x) K_1(x) = \frac{1}{x}$ [4] și expresia (3.52), fluxul produs de variația liniară a potențialului, prin suprafața laterală a bolțului central

$$\Phi_{\mathrm{I}(0,\,h)}^{\beta} = \mu_0 \int_0^h \left(\frac{\partial V r^{\beta}}{\partial r}\right)_{r=a} \cdot 2\,\pi a \cdot \mathrm{d}z, \tag{3.53}$$

rezultă

$$\Phi_{\mathrm{I}(0,\,h)}^{\beta} = 8V_0\,\mu_0 a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h/\pi a}{(2m+1)^2} \cdot \frac{1}{I_0\left[\frac{(2m+1)\pi b}{h}\right] \cdot K_0\left[\frac{(2m+1)\pi a}{h}\right] - I_0\left[\frac{(2m+1)\pi a}{h}\right] K_0\left[\frac{(2m+1)\pi b}{h}\right]}. \tag{3.54}$$

Această expresie se poate simplifica utilizînd dezvoltările asimptotice [4] ale funcțiilor Bessel modificate, în care, cu erori cel mult de ordinul procentului, se pot neglija toți termenii afară de primul. Cu Φ^* dat de (2.9) se obține

$$\Phi_{\mathrm{I}(0,h)}^{\beta} = \Phi^* \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}}}{(2m+1)\,\mathrm{sh}\,(2m+1)\,\frac{\pi l}{h}}. \tag{3.55}$$

Fluxul produs de variația liniară a potențialului prin porțiunea de lungime l a tălpii polare este

$$\Phi_{\mathrm{I}(a,b)}^{\beta} = \mu_0 \int_a^b \left(\frac{\partial V_{\mathrm{I}}^{\beta}}{\partial z}\right)_{z=0} 2\pi r \mathrm{d}r. \tag{3.56}$$

Cu expresia exactă (3.52) a potențialului și cu $K_0(x) I_1(x) + I_0(x) K_1(x) = \frac{1}{x}$ se obține

$$\Phi_{\mathrm{I}(a,b)}^{\beta} = \Phi^* \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right) + I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) K_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right) - \frac{h}{n\pi b}}{K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) K_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}. \tag{3.57}$$

Utilizînd dezvoltările asimptotice, rezultă

$$K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)K_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right) =$$

$$= \frac{h}{n\pi\sqrt{ab}}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi l}{h}\left[1 - \frac{hl}{8n\pi ab}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi l}{h} + \frac{h^2(16ab+9l)^2}{128n^2\pi^2a^2b^2}\ldots\right], \quad (3.58)$$

$$K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right) + I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)K_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right) =$$

$$= \frac{h}{n\pi\sqrt{ab}}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi l}{h}\left\{1 - \frac{h(4a+l)}{8n\pi ab}\,\mathrm{th}\,\frac{n\pi l}{h} - \frac{h^2[9l(a+b)+6ab]}{128n^2\pi^2a^2b^2}\ldots\right\}. \quad (3.59)$$

În acest caz în (3.58) se poate reține numai primul termen, dar în (3.59) primii trei termeni. Expresia (3.57) devine

$$\Phi^{\beta}_{I(a,b)} \simeq \Phi^* \frac{b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left\{\mathrm{ch}\,\frac{n\pi l}{h} - \frac{h(4a+l)}{8n\pi ab} - \frac{h^2[9l(a+b)+6ab]}{128n^2\pi^2a^2b^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\,\dfrac{n\pi l}{h}}\right\}. \quad (3.60)$$

Aici factorul care înmulțește al treilea termen din paranteză era $\mathrm{cth}\,\dfrac{n\pi l}{h} \simeq 1$ și cu [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = 0{,}90154 \quad (3.61)$$

se obține

$$\Phi^{\beta}_{I(a,b)} \simeq \Phi^*\left\{\frac{b}{a}\ln 2 - \frac{h(4a+l)\pi}{96a^2} - \frac{0{,}90154}{128\pi^2}\cdot\frac{h^2[9l(a+b)+6ab]}{a^3b} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{a}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\mathrm{cth}\,\frac{n\pi l}{h} - 1\right) - \sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,\mathrm{sh}\,n\pi l/h}\right\}. \quad (3.62)$$

Se observă că al treilea termen este foarte mic și în el se poate pune

$$9l(a+b)+6ab = ab\left[6 + 9\frac{l}{a}\left(\frac{a}{b}+1\right)\right] \simeq ab\left(6+18\frac{l}{a}\right) = 6ab\left(1+3\frac{l}{a}\right). \quad (3.63)$$

Expresia fluxului prin porțiunea de lungime l a tălpii polare rezultă deci

$$\Phi^{\beta}_{I(a,b)} \simeq \Phi^* \left[\frac{b}{a} \ln 2 - \frac{\pi}{96} \cdot \frac{h}{a} \left(4 + \frac{l}{a} \right) - \frac{2{,}705}{64\pi^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(1 + 3 \frac{l}{a} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{a} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi l}{h} - 1 \right) - \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \operatorname{sh} n\pi l/h} \right]. \tag{3.64}$$

Însumînd expresiile (3.55) și (3.64), se obține pentru fluxul de dispersie parțial determinat de variația liniară a potențialului pe fața interioară a magnetului expresia

$$\Phi^{\beta}_{I} \simeq \Phi^* \left\{ \sqrt{\frac{b}{a}} \varphi_1 \left(\frac{h}{l} \right) + \frac{b}{a} \left[\ln 2 + \varphi_2 \left(\frac{h}{l} \right) \right] - \varphi_3 \left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l} \right) \right\}, \tag{3.65}$$

în care apar funcțiile

$$\varphi_1 \left(\frac{h}{l} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1) \operatorname{sh} (2m+1)\pi l/h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \operatorname{sh} n\pi l/h},$$

$$\varphi_2 \left(\frac{h}{l} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi l}{h} - 1 \right),$$

$$\varphi_3 \left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l} \right) = \frac{\pi}{96} \cdot \frac{h}{a} \left(4 + \frac{l}{a} \right) + 0{,}0043 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(1 + 3 \frac{l}{a} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{96} \cdot \frac{h}{a} \left(3 + \frac{b}{a} \right) + 0{,}0043 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(3 \frac{b}{a} - 2 \right), \tag{3.66}$$

reprezentate în figurile 11, 12 și 13.

Observație. Dacă s-ar calcula același flux în aproximația unui cîmp plan-paralel, s-ar obține expresia

$$\Phi^{\beta}_{I} \simeq \Phi^* \left[\varphi_1 \left(\frac{h}{l} \right) + \ln 2 + \varphi_2 \left(\frac{h}{l} \right) \right]. \tag{3.67}$$

3.4. Fluxul de dispersiune parțial Φ_I

Se obține cu (3.7), (3.42), (3.65)

$$\Phi_I \simeq \Phi^* \left[\ln 2 \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + \sqrt{\frac{a^*}{a}} \cdot \frac{\pi\delta^*}{l} \ln \frac{1}{2 \sin \pi\delta^*/2\, l} + \right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a^*}{a}} \cos \frac{\pi\delta^*}{l} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}} + 1}{\operatorname{sh} \pi h/l} + \operatorname{th} \pi h/2l - 1 \right) + \right. \tag{3.68}$$

$$+\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{(2m+1)\,\mathrm{sh}\,(2m+1)\,\pi l/h}+b/a\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\mathrm{cth}\,\frac{n\pi l}{h}-1\right)-$$

$$-\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,\mathrm{sh}n\,\pi l/h}-\frac{\pi}{96}\cdot\frac{h}{a}\,(4+l/a)-0{,}0043\left(\frac{h}{a}\right)^{2}\left(1+3\,\frac{l}{a}\right)\Big].$$

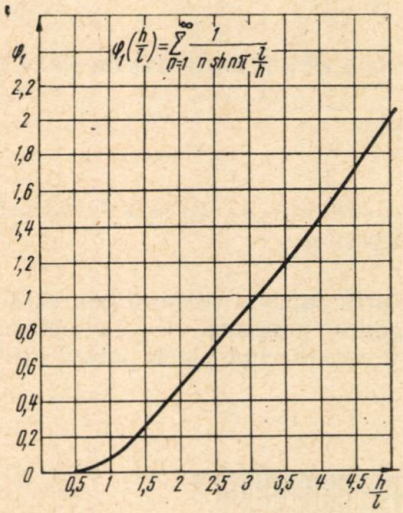


Fig. 11. — Funcţia ajutătoare $\varphi_1\left(\frac{h}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

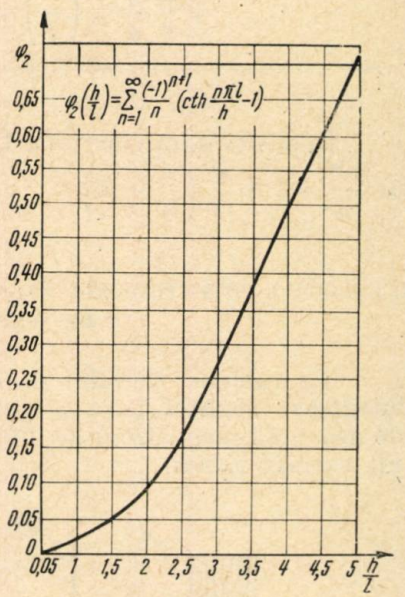


Fig. 12. — Funcţia ajutătoare $\varphi_2\left(\frac{h}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

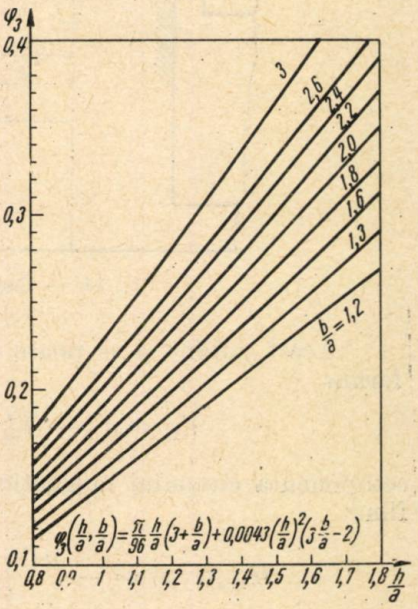


Fig. 13. — Funcţia ajutătoare $\varphi_3\left(\frac{b}{a},\frac{h}{l}\right)$ pentru calculul dispersiunii în regiunea I.

Cu notațiile (3.41) și (3.66) se scrie mai strîns

$$\Phi_1 \simeq \Phi^* \left[\ln 2 \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + \sqrt{\frac{a^*}{a}} \psi_1 \left(\frac{\delta}{l} \right) + \psi_2 \left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{l} \right) \cdot \psi_3 \left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l} \right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{b}{a}} \varphi_1 \left(\frac{h}{l} \right) + \frac{b}{a} \varphi_2 \left(\frac{h}{l} \right) - \varphi_3 \left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l} \right) \right]. \tag{3.69}$$

În aceste relații, $\Phi^* = 4 V_0 \mu_0 a$; $a^* = a + \delta^*$; δ^* este dat de (3.16′) iar $\frac{a^*}{a} = 1 + \frac{\delta^*}{l} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$.

4. CALCULUL POTENȚIALULUI MAGNETIC ÎN ZONA SUPERIOARĂ (II) ȘI A FLUXULUI DE DISPERSIUNE PARȚIAL Φ_{II}

La calculul fluxului de dispersiune prin capătul bolțului central se integrează ecuația Laplace pentru potențialul magnetic V_{II} în spațiul de deasupra magnetului de difuzor (fig. 14), considerînd placa polară infinit extinsă radial.

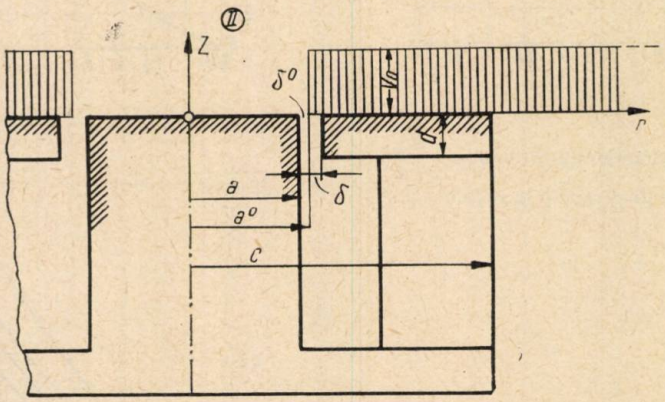


Fig. 14. — Condiții de frontieră pentru V_{II}.

Acest potențial se poate scrie, conform teoremei superpoziției, sub forma

$$V_{II} = V_0 + V^*_{II}(r, z) \quad \text{cu} \quad \Delta V^*_{II}(r, z) = 0, \tag{4.1}$$

componenta cîmpului magnetic care interesează la calculul fluxului Φ_{II} fiind

$$H_{II\,z}(r, z) = - \left. \frac{\partial V_{II}(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial V^*_{II}(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0}. \tag{4.2}$$

Condiţiile pe frontiere pentru V_{II}^* sînt

$$V_{II}^*(r, 0) = \begin{cases} -V_0, & 0 < r < a + \delta^\circ; \quad a + \delta_0 = a^\circ \\ 0 & r > a + \delta^\circ, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$V_{II}^*(0, z) = \text{finit}, \tag{4.4}$$

$$V_{II}^*(r, \infty) = \text{finit}. \tag{4.5}$$

4.1. Determinarea poziţiei întrefierului infinit scurt echivalent

Ca şi în paragraful 3.1, se va căuta distanţa δ° care defineşte lăţimea treptei de potenţial V_0 echivalentă variaţiei reale a potenţialului la marginea întrefierului din punctul de vedere al fluxului căutat (prin capătul bolţului).

Se studiază repartiţia potenţialului în vecinătatea marginii superioare a întrefierului în coordonate carteziene.

Întrucît problema prezintă simetrie faţă de suprafaţa de potenţial $V_0/2$ (fig. 15), problema se reduce la cea de la paragraful 3.1, cu deosebirea că diferenţa de potenţial dintre suprafeţele considerate este $V_0/2$, iar distanţa dintre ele $\delta/2$.

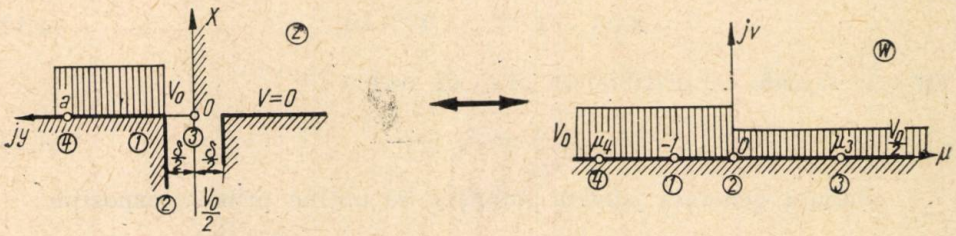


Fig. 15. — Transformarea conformă pentru determinarea lui δ^0.

Funcţia care realizează transformarea este

$$z = \frac{\delta}{2\pi}\left[2\sqrt{w+1} - \ln\frac{\sqrt{w+1}+1}{\sqrt{w+1}-1}\right], \tag{4.6}$$

iar expresia potenţialului complex

$$W = \frac{V_0}{2\pi}\ln w + \mathrm{j}\frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2\pi}\ln \rho + \mathrm{j}\frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{\theta}{\pi}\right). \tag{4.7}$$

Punînd condiţia ca la $z = \mathrm{j}a$, $w = u_4 < 0$ şi avînd în vedere că $|u_4| \gg 1$, rezultă

$$|u_4| \simeq \frac{a^2\pi^2}{\delta^2}. \tag{4.8}$$

Fluxul care interesează este

$$\Phi^{(1)}_{(0,\,a)} = \mu_0 \frac{V_0}{2\pi} \ln (u_4) \simeq \mu_0 \frac{V_0}{\pi} \ln \frac{a\pi}{\delta}. \tag{4.9}$$

Pe de altă parte, distribuţia de potenţial în treaptă echivalentă produce fluxul dat în paragraful 3.1 (3.15), în care acum $h \to a$, $V_0 \to V_0/2$:

$$\Phi^{(2)}_{(0,\,a)} = \mu_0 \frac{V_0}{\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{\delta^0}\right). \tag{4.10}$$

Egalînd aceste expresii, rezultă

$$\boxed{\delta^0 = \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \delta/\pi a} \simeq 0{,}33\ \delta.} \tag{4.11}$$

4.2. Calculul fluxului de dispersiune prin capătul bolţului

Potenţialul V_{II} se calculează integrînd ecuaţia Laplace în domeniul II prin metoda separării variabilelor. Funcţiile proprii după axa z compatibile cu (4.5) sînt de forma

$$Z(z) = e^{-kz} \qquad (k > 0), \tag{4.12}$$

iar cele radiale compatibile cu (4.4) de forma

$$R(r) = J_0(kr) \tag{4.13}$$

Soluţia generală pentru potenţial se obţine prin superpoziţie :

$$V^*_{II} = (r, z) = \int_0^\infty a(k)\, e^{-kz} J_0(kr)\, dk. \tag{4.14}$$

Efectuînd dezvoltarea în integrală Fourier-Bessel şi punînd condiţia (4.3), rezultă

$$a(k) = - V_0 a^0 J_1(ka^0) \tag{4.15}$$

şi deci potenţialul este

$$V^*_{II}(r, z) = - V_0 a^0 \int_0^\infty J_1(ka^0) J_0(kr) e^{-kz} (dk). \tag{4.16}$$

Fluxul prin capătul bolţului se obţine cu relaţia

$$\Phi_{II} = \mu_0 \int_0^a \left(\frac{\partial V^*_{II}}{\partial z}\right)_{z=0} 2\pi r dr. \tag{4.17}$$

Efectuînd mai întîi integrarea după r, rezultă:

$$\Phi_{II} = 2\pi\mu_0 \; V_0 \; aa^0 \int_0^\infty J_1(ka) \; J_1(ka^0) \; dk. \tag{4.18}$$

Integrala de mai sus este rezolvată în [4]:

$$\int_0^\infty J_1(ka) \, J_1(ka^0) \, dk = \frac{a \; \Gamma(3/2)}{a^{0^2} \; \Gamma(1/2) \; \Gamma(2)} \cdot F\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{a^2}{a^{0^2}}\right) =$$

$$= \frac{a}{2a^{0^2}} F\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{a^2}{a^{0^2}}\right), \tag{4.19}$$

unde F este funcţia hipergeometrică [4].
Fluxul prin capătul de bolţ rezultă, cu $\Phi^* = 4 \; V_0 \; \mu_0 \; a$

$$\boxed{\Phi_{II} = \frac{\pi}{4} \Phi^* \frac{a}{a^0} F\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{a^2}{a^{0^2}}\right).} \tag{4.20}$$

cu $a_0 = a + \delta^\circ \simeq a + 0{,}33 \; \delta,$ (4.21)

iar

$$\frac{a}{a^0} = \frac{1}{1 + 0{,}33\delta/a} = \frac{1}{1 + 0{,}33 \frac{\delta}{l}\left(\frac{b}{a} - 1\right)}. \tag{4.22}$$

Valorile funcţiei $F\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \left(\frac{a}{a^0}\right)^2\right]$ pot fi calculate cu dezvoltarea acesteia pentru $z = \left(\frac{a}{a^0}\right)^2 \to 1$ (vezi [6] p. 349) şi sînt date în tabela de mai jos. Funcţia este reprezentată în figura 16.

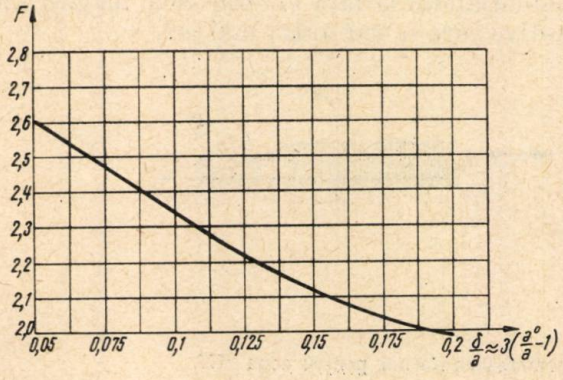


Fig. 16. — Funcţia hipergeometrică $F\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \left(\frac{a}{a^0}\right)^2\right]$.

Tabela 1

δ/a	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20
$\left(\frac{a}{a^0}\right)^2$	0,9676	0,95	0,937	0,9063	0,8798
F	2,6077	2,4726	2,3402	2,1176	1,9815

5. CALCULUL POTENȚIALULUI MAGNETIC ÎN ZONA EXTERIOARĂ (III) ȘI A FLUXULUI DE DISPERSIUNE PARȚIAL Φ_{III}

Ultima componentă a fluxului de dispersiune este aceea care iese prin suprafața exterioară a magnetului ceramic și a piesei polare superioare și se închide prin talpa inferioară. Acest flux este localizat în regiunea III (fig. 17).

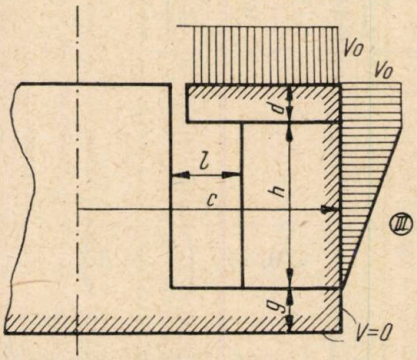


Fig. 17. — Condiții de frontieră pentru zona III.

Problema determinării potențialului magnetic V_{III} în exteriorul magnetului ceramic se poate trata cu suficientă aproximație ca o problemă plan-paralelă. În calcule se va considera grosimea piesei polare superioare egală cu a tălpii inferioare (este cazul unor magneți uzuali [1]).

Piesa polară de potențial V_0 se poate considera infinit extinsă după axa -jy (fig. 18.*a*). Variația potențialului la fața exterioară a magnetului se consideră cvasiliniară din motive care se vor arăta mai jos.

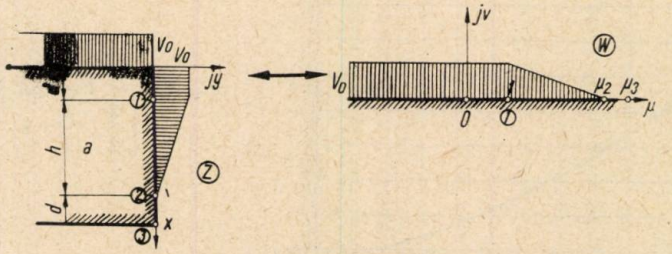


Fig. 18. — Transformarea conformă pentru zona III.

Pentru calculul fluxului se efectuează transformarea conformă a domeniului care interesează în semiplanul superior din planul w.

Funcţia care realizează transformarea, cu $z = 0 \to w = 0$ şi $z = 2d + h \to w = u_3$, este

$$z = \frac{8(2d+h)}{\pi u_3^2}\left\{\frac{u_3^2}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{2w}{u_3}\right)\right] + \frac{2w - u_3}{4}\sqrt{w(u_3 - w)}\right\}. \quad (5.1)$$

În afară de corespondenţa originii, mai putem impune arbitrar corespondenţa altui punct. Alegem $u_1 = 1$. Atunci $z = d \to w = 1$ şi pentru u_3 rezultă ecuaţia transcendentă

$$d = \frac{8(2d+h)}{\pi u_3^2}\left\{\frac{u_3^2}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{2}{u_3}\right)\right] - \frac{u_3 - 2}{4}\sqrt{u_3 - 1}\right\}. \quad (5.2)$$

Valoarea lui u_2 rezultă din condiţia: $z = d + h \to w = u_2$, care cu (5.2) conduce la ecuaţia

$$u_2 = u_3 - 1. \quad (5.3)$$

Pentru simplificarea calculului potenţialului în planul w se admite o variaţie liniară a potenţialului *în lungul axei* u între $u = 1$ şi $u = u_2$, deşi aceasta revine la a admite o variaţie cvasiliniară între punctele corespunzătoare din planul z. Calculul arată că în limitele (2.3) abaterile aceste ultime variaţii de la liniaritate sînt sub 1,5%.

Potenţialul $V_{III}(u, v)$ se poate calcula, conform teoremei de superpoziţie, ca o sumă:

$$V_{III}(u, v) = V^{\alpha}_{III}(u, v) + V^{\beta}_{III}(u, v), \quad (5.4)$$

unde V^{α}_{III} este potenţialul produs de o variaţie în treaptă pe axa u, cu saltul în punctul u_2, iar V^{β}_{III} potenţialul produs de o variaţie liniară între punctele $u = 1$ şi $u = u_2$ (fig. 19).

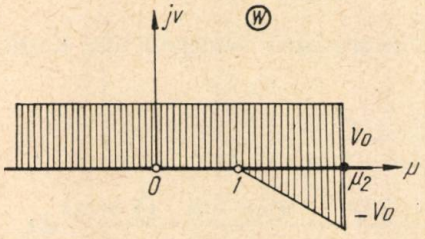


Fig. 19. — Descompunerea condiţiilor de frontieră în planul w.

Potenţialul $V^{\alpha}_{III}(u, v)$ satisface următoarele condiţii pe frontiera $v = 0$:

$$V^{\alpha}_{III}(u, 0) = \begin{cases} V_0, & u < u_2, \\ 0, & u > u_2. \end{cases} \quad (5.5)$$

Expresia acestui potențial este cunoscută, și anume

$$V^{\alpha}_{\mathrm{II}}(u, v) = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{v}{u - u_2}. \tag{5.6}$$

Potențialul V^{β}_{III} satisface condiții de anulare la infinit, iar pe axa $v = 0$

$$V^{\beta}_{\mathrm{III}}(u, 0) = \begin{cases} 0 & u < 1, \\ -V_0 \dfrac{u-1}{u_2-1} = -\dfrac{V_0}{\pi}\left(\pi \dfrac{u-1}{u_2-1}\right), & 1 \leqslant u < u_2, \\ 0, & u > u_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Soluțiile elementare ale ecuației Laplace în semiplanul superior $v > 0$ rezultate pentru $v \to \infty$ fiind de forma $e^{-\lambda v} \sin \lambda u$ și $e^{-\lambda v} \cos \lambda u$, se caută V^{β}_{III} sub forma integralei Fourier:

$$V^{\beta}_{\mathrm{III}}(u, v) = -\frac{V_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda v}(A_\lambda \cos \lambda u + B_\lambda \sin \lambda u)\, d\lambda. \tag{5.8}$$

Coeficienții dezvoltării în integrală Fourier se calculează cu relațiile cunoscute și rezultă

$$V^{\beta}_{\mathrm{III}}(u, v) = -\frac{V_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda v}\left[\frac{\sin \lambda (u_2 - u)}{\lambda} + \frac{\cos \lambda (u_2 - u)}{\lambda^2 (u_2 - 1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos \lambda (1 - u)}{\lambda^2 (u_2 - 1)}\right] d\lambda. \tag{5.9}$$

Înlocuind în (5.8) și făcînd cîteva transformări, rezultă

$$V^{\beta}_{\mathrm{III}}(u, v) = -\frac{V_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda v}\left[\frac{\sin \lambda (u_2 - u)}{\lambda} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos \lambda (u_2 - u)}{\lambda^2 (u_2 - 1)} - \frac{\cos \lambda (1 - u)}{\lambda^2 (u_2 - 1)}\right] d\lambda. \tag{5.9'}$$

Pentru calculul fluxului interesează componenta după axa x a cîmpului magnetic. Se obține

$$H_0(u, v) = -\frac{\partial V^{\alpha}_{\mathrm{III}}}{\partial v} - \frac{\partial V^{\beta}_{\mathrm{III}}}{\partial v} =$$
$$= -\frac{V_0}{\pi (u_2 - 1)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda v} \frac{\cos \lambda (u_2 - u) - \cos \lambda (1 - u)}{\lambda} d\lambda. \tag{5.10}$$

Fluxul de dispersiune care iese prin suprafața exterioară a magnetului ceramic și a piesei polare superioare are expresia

$$\Phi_{\mathrm{III}} = 2\pi c\, \mu_0 \int_0^{u_2} H_v(u, 0)\, du, \tag{5.11}$$

și făcînd în (5.10) $v = 0$, rezultă

$$\Phi_{III} = \frac{2V_0 c\mu_0}{u_2 - 1}\int_0^{\infty} \frac{[\sin\lambda + \sin\lambda(u_2 - 1) - \sin\lambda u_2]}{\lambda^2}\,d\lambda =$$

$$= \Phi^* \frac{c}{2a}\left[\frac{u_2}{u_2 - 1}\ln u_2 - \ln(u_2 - 1)\right]. \qquad (5.12)$$

Se constată ușor că Φ_{III} este chiar fluxul de dispersiune prin suprafața exterioară a piesei polare, fluxul prin suprafața exterioară a magnetului fiind nul:

$$\Phi^m_{III} = \frac{2V_0 c\mu_0}{u_2 - 1}\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda}\int_1^{u_2} [\cos\lambda(1 - u) - \cos\lambda(u_2 - u)]\,du = 0.$$

În (5.12) u_2 rezultă prin rezolvarea ecuațiilor (5.2) și (5.3) funcție de h/d. Pentru $1 \leqslant h/d \leqslant 5$ se obține următoarea tabelă:

Tabela 2

h/d	1	1,5	2	3	4	5
u_3	2,73	3,05	3,37	4,015	4,47	4,975
u_2	1,73	2,05	2,37	3,015	3,47	3,975

Se mai poate scrie:

$$\boxed{\Phi_{III} = \Phi^* \frac{c}{2a} \cdot G\left(\frac{h}{d}\right) = \Phi^* \frac{c}{2a} \frac{u_2 \ln u_2 - (u_2 - 1)\ln(u_2 - 1)}{u_2 - 1}} \qquad (5.13)$$

cu

$$G\left(\frac{h}{d}\right) = \frac{u_2 \ln u_2 - (u_2 - 1)\ln(u_2 - 1)}{u_2 - 1}, \qquad (5.14)$$

reprezentat în figura 20.

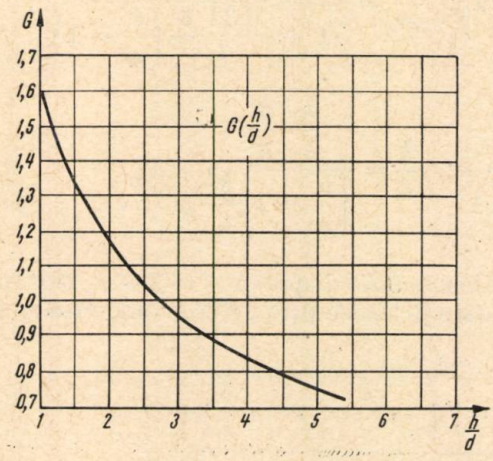


Fig. 20. — Funcția ajutătoare $G\left(\frac{h}{d}\right)$ pentru calculul distorsiunii în zona II.

6. CONCLUZII

Relațiile (3.68), (4.20) și (5.13) permit calculul fluxurilor de dispersie parțiale Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III} pentru orice proporții ale magnetului studiat cuprinse între limitele (2.3), cu aproximații de ordinul procentelor.

Pentru coeficientul k_u de utilizare a fluxului (1.1) se obține expresia

$$k_u = \frac{1}{1 + \Phi_d/\Phi_u} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Phi_I}{\Phi^*} + \frac{\Phi_{II}}{\Phi^*} + \frac{\Phi_{III}}{\Phi^*}\right)\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\delta}{d}}, \tag{6.1}$$

în care

$$\frac{\Phi_I}{\Phi^*} = f_I\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{a}, \frac{\delta}{e}\right) = \ln^2\left[\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right] + \sqrt{\frac{a^*}{a}}\,\psi_1\left(\frac{\delta}{l}\right) +$$

$$+ \psi_2\left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{l}\right)\cdot\psi_3\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l}\right) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,\varphi_1\left(\frac{h}{l}\right) + \frac{b}{a}\,\varphi_2\left(\frac{h}{l}\right) - \varphi_3\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{l}\right) \tag{6.2}$$

(cu ψ_1, ψ_2, ψ_3, φ_1, φ_2, φ_3 date de 3.41 și 3.66 și reprezentate în figurile 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13),

$$\frac{\Phi_{II}}{\Phi^*} = f_{II}\left(\frac{\delta}{l}, \frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{a}{a^0}\,F\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; \left(\frac{a}{a^\circ}\right)^2\right] \tag{6.3}$$

(cu F reprezentat în figura 16) și

$$\frac{\Phi_{II_I}}{\Phi^*} = f_{III}\left(\frac{c}{a}, \frac{h}{d}\right) = \frac{c}{2a}\,G\left(\frac{h}{d}\right) \tag{6.4}$$

(cu G dat de (5.14) și reprezentat în figura 20).

Deoarece

$$\frac{a^*}{a} = 1 + \frac{0{,}427\ \delta}{l}\left(\frac{b}{a} - 1\right); \quad \frac{a}{a^0} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}33\ \delta}{l}\left(\frac{b}{a} - 1\right)}; \tag{6.5}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{\frac{h}{a}}{\frac{b}{a} - 1}; \quad \frac{h}{d} = \frac{\frac{h}{a}\cdot\frac{\delta}{d}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)\frac{\delta}{l}}, \tag{6.6}$$

se constată că mărimea k_u și coeficientul de dispersie $\sigma = 1 - k_u$ sînt funcții de cinci variabile independente care definesc proporția geometrică a circuitului magnetic considerat:

$$\boxed{k_u = 1 - \sigma = f\left(\frac{b}{a}, \frac{h}{a}, \frac{\delta}{l}, \frac{c}{a}, \frac{\delta}{a}\right).} \tag{6.7}$$

Această expresie trebuie luată în considerație la proiectarea optimă a circuitului magnetic, care este studiată într-o altă lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. A.E. Falkus, *Design of Ceramic Loudspeaker Magnets, Making the most of new anisotropic materials*, Wireless World, iulie 1963, p. 320—323.
2. A. Timotin, V. Hortopan, *Lecții de bazele electrotehnicii*, vol. I, București, Edit. didactică 1964.
3. E. Jahnke, F. Emde, *Tafeln höheren Funktionen*, ed. 4, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1952.
4. I.M. Rîjik, I.S. Gradstein, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*, București, Edit. tehnică, 1955.
5. A.E. Falkus, *Loudspeaker Magnet Design — with Special Reference to Cylindrical Slugs of Alcomex III*, Wireless World, ianuarie 1960,p. 41—44.
6. N.N. Lebedev, *Funcții speciale și aplicațiile lor*, București, Edit. tehnică, 1957.

CALCULUL CÎMPULUI MAGNETIC DIN ÎNTREFIERUL APARATELOR MAGNETOELECTRICE CU MAGNET INTERIOR

DE

AD. CUPȘA

621.3.013.001.24 :538.311

După prezentarea principalelor tipuri de aparate magnetoelectrice cu magnet interior și a caracteristicilor lor, se trece la calculul cîmpului magnetic din întrefierul acestora. Dacă la aparatele fără piese polare nu intervin practic aproximații de calcul, ele sînt însă inerente la aparatele cu piese polare, unde cîmpul din magnetul permanent nu mai este uniform. Deoarece acestea din urmă sînt cele mai utilizate, s-a dezvoltat o metodă aproximativă de calcul care ține seama de principalele fenomene care intervin, fiind verificată calitativ și cantitativ de performanțele aparatelor utilizate curent.

1. INTRODUCERE

În practica construcției aparatelor magnetoelectrice industriale de dimensiuni mici, cu diametre sub 40 mm, au luat o mare răspîndire aparatele cu magnet interior [3], [4], [6] —[8]. Ele se compun dintr-un miez central cilindric, care este în același timp magnetul permanent (magnetizat diametral), și o cămașă concentrică (jug) de fier moale. În întrefierul dintre ele se rotește bobina mobilă (vezi fig. 1 *a*). Această construcție asigură următoarele avantaje esențiale:

a) construcție simplă, compactă, dimensiuni reduse;

b) bună ecranare contra cîmpurilor magnetice exterioare [2];

c) cuplu activ relativ mare, deci factor de calitate foarte bun;

d) se pretează, chiar în construcție industrială, la suspensie cu bandă, ceea ce reduce frecările și permite obținerea unui consum propriu de ordinul a 40—50 μA.

Precizia proprie a aparatului, exceptînd schema în care este montat, poate atinge 0,5% și de aceea el este aproape exclusiv utilizat în prezent la construcția voltampermetrelor industriale de clasă 1/1, 5, fabricate de firme ca EAW (R.D.G.), GOERZ (Austria), AEG (R.F.G.) etc.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 81—96, 1970

Dezavantajul aparatelor din figura 1 *a* este că au scară neuniformă. ntr-adevăr, după cum vom arăta în paragraful 2, cuplul activ este

$$M_a = k_1 \cdot B_r(\varphi) \cdot i = k_1 \cdot i \cdot B_0 \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Cuplul rezistent este $M_r = k_2\ \alpha$ şi deci la echilibru

$$\alpha = k_3 \cdot i \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Din acest motiv, aparatele amintite se utilizează mai mult în construcţia tip „profil" (cu zona de funcţionare $2\beta \simeq 60°$), sau în combinaţie cu

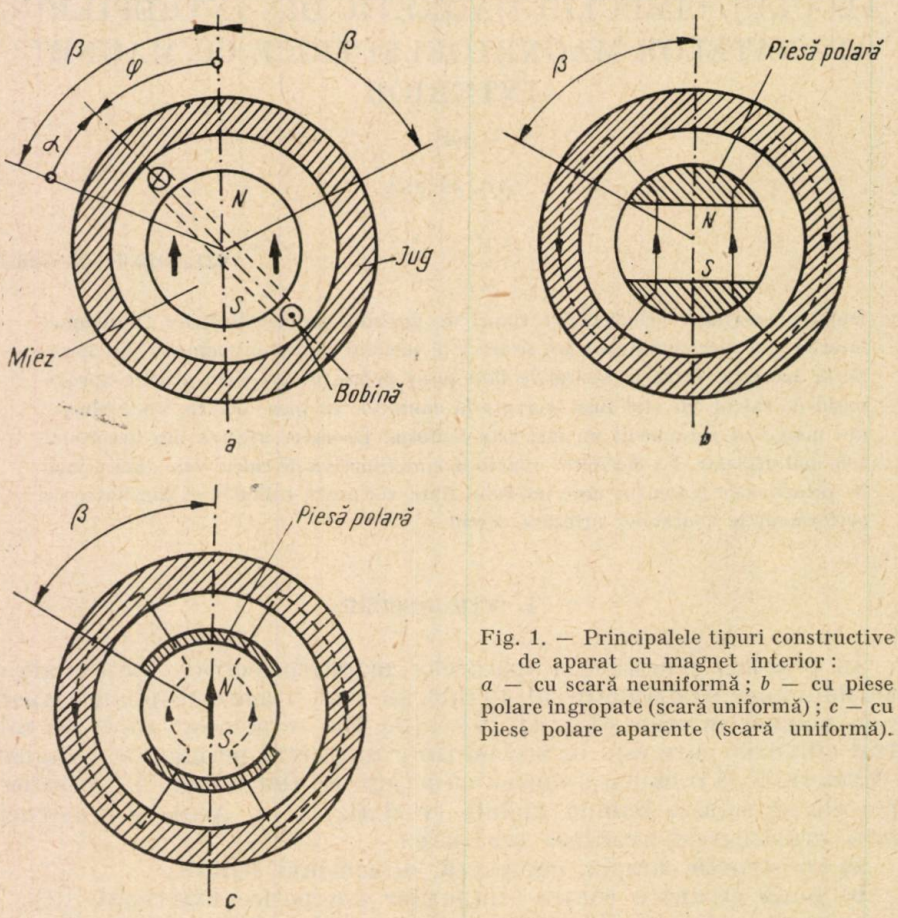


Fig. 1. — Principalele tipuri constructive de aparat cu magnet interior : *a* — cu scară neuniformă ; *b* — cu piese polare îngropate (scară uniformă) ; *c* — cu piese polare aparente (scară uniformă).

o sondă termometrică, unde caracterul neliniar al scării deranjează mai puţin. La uzina „Electromagnetica" din capitală se construiesc curent aparate M-6 (tip profil) şi aparate M-61 (cu sondă termometrică). Din acest motiv vom analiza în lucrare şi acest tip de aparat.

Pentru utilizarea ca voltmetru sau ampermetru se impune însă o scară liniară, adică inducţia radială din întrefier trebuie să fie constantă (în zona activă 2β) cel puţin în limitele clasei de precizie a aparatului. În acest scop, pe lîngă faptul că jugul se face din fier moale ($\mu \simeq \infty$), pe magnet se dispun două piese polare tot din fier moale, ca în figura 1 *b* şi *c*.

Se vede limpede că, dacă întrefierul este constant, suprafețele pieselor feromagnetice sînt echipotențiale (la $\mu = \infty$) și inducția în întrefier este practic constantă. Deoarece $\alpha_{max} = 90°$, se ia uzual $2\beta = 100...120°$. Dispunînd aceste piese polare, liniile de cîmp au aproximativ alura din figura 1*b* și *c*. Este evident că în cazul din figura 1 *c* magnetul nu se mai magnetizează uniform și deci calculul exact va fi foarte dificil. Prezentăm în cele ce urmează o metodă de calcul a cîmpului magnetic din întrefierul acestor aparate.

2. MAGNET CILINDRIC, UNIFORM MAGNETIZAT, PLASAT ÎNTR-O CĂMAȘĂ FEROMAGNETICĂ

Magnetul 1, în general anizotrop, produce un cîmp magnetic avînd dreapta $\varphi = 0$ axă de simetrie. În studiul cîmpului magnetic vom face următoarele ipoteze:

a) cîmpul este plan-paralel (nu depinde de z);
b) magnetul este uniform magnetizat după direcția $\varphi = 0$;
c) cămașa 4 este nesaturată: $\mu_4 = c^t$.

Ecuațiile satisfăcute de cîmpul magnetic sînt (vezi anexa)

$$\begin{cases} V_3 = \sum\limits_k (C'_k r^k + C''_k r^{-k}) \cos k\varphi, \\ V_4 = \sum\limits_k (D'_k r^k + D''_k r^{-k}) \cos k\varphi, \\ V_5 = \sum\limits_k E_k r^{-k} \cos k\varphi. \end{cases} \qquad \text{cu } k = \text{număr întreg} \tag{1}$$

Condițiile pe frontieră sînt

$$\begin{cases} H_{3\varphi}(a, \varphi) = H_{1\varphi}(a, \varphi) = H_1 \sin\varphi, \\ H_{3\varphi}(b, \varphi) = H_{4\varphi}(b, \varphi), \\ H_{4\varphi}(c, \varphi) = H_{5\varphi}(c, \varphi), \end{cases} \quad \begin{cases} B_{3r}(a, \varphi) = B_{1r}(a, \varphi) = B_1 \cos\varphi, \\ B_{3r}(b, \varphi) = B_{4r}(b, \varphi), \\ B_{4r}(c, \varphi) = B_{5r}(c, \varphi). \end{cases} \tag{2}$$

Dacă se ține seama că $H_{k\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_k}{\partial \varphi}$ și $H_{kr} = -\frac{\partial V_k}{\partial r}$

și introducînd (1) în (2), se obține

$$k = 1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} H_1 = C'_1 + C''_1 \frac{1}{a^2}, \\ B_1 = \mu_0 \left[\frac{C''_1}{a^2} - C'_1\right], \\ C'_1 + C''_1 \frac{1}{b^2} = D'_1 + D''_1 \frac{1}{b^2}, \\ \mu_0 \left(C'_1 - C''_1 \frac{1}{b^2}\right) = \mu_0 \mu_r \left(D'_1 - D''_1 \frac{1}{b^2}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} D'_1 + D''_1 \frac{1}{c^2} = E_1 \cdot \frac{1}{c^2}, \\ \mu_0 E_1 \frac{1}{c^2} = \mu_0 \mu_r \left(D''_1 \frac{1}{c^2} - D'_1\right). \end{cases} \tag{3'}$$

Apar șapte necunoscute : B_1, H_1, C_1', C_1'', D_1', D_1'' și E_1, dar dispunem o ecuație suplimentară : curba de demagnetizare $B_1 = f(H_1)$ a magnetului. Eliminînd din (3′) constantele de integrare, se obține

$$\frac{B_1}{H_1} = \mu_0 \frac{\left(1+\frac{1}{\mu_r}\right)\left[(\mu_r+1)+\frac{a^2}{b^2}(\mu_r-1)\right]-\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)\left[\frac{b^2}{c^2}(\mu_r-1)+\frac{a^2}{c^2}(\mu_r+1)\right]}{\left(1+\frac{1}{\mu_r}\right)\left[(\mu_r+1)-\frac{a^2}{b^2}(\mu_r-1)\right]-\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)\left[\frac{b^2}{c^2}(\mu_r-1)-\frac{a^2}{c^2}(\mu_r+1)\right]}. \tag{4}$$

Dacă facem $\mu_r \to 1$ se obține (μ_r este permeabilitatea magnetică relativă a cămășii 4)

$$\frac{B_1}{H_1} = \mu_0. \tag{4'}$$

Intersectînd dreapta (4) cu caracteristica de demagnetizare (5), $B_1 = f(H_1)$, se obține punctul de funcționare M.

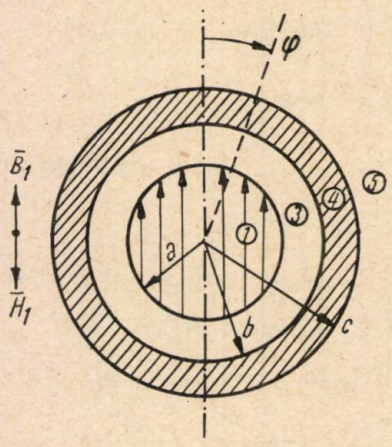


Fig. 2. — Aparat cu magnet interior fără piese polare.

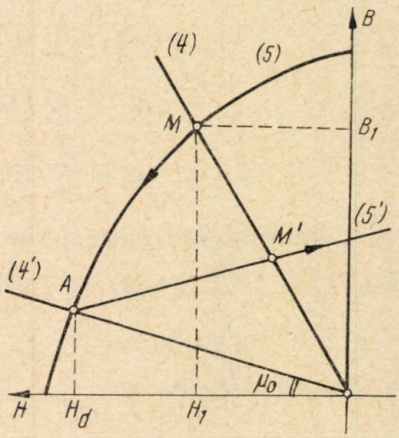


Fig. 3. — Obținerea grafică a punctului de funcționare.

Utilizarea caracteristicii (5) presupune că magnetizarea magnetului s-a făcut, inițial la saturație, în interiorul cămășii ; dacă ea s-ar fi făcut în exterior ($\mu_r = 1$), punctul inițial de funcționare era A, dat de dreapta $B_a = \mu_0 H_a$, conform (4′).

Introducînd apoi magnetul în cămașă, punctul de funcționare s-ar fi deplasat pe curba (5′), corespunzînd ciclului reversibil, pînă în punctul M'. Acest lucru arată de ce, întotdeauna este preferabil ca magnetizarea să se facă cu magnetul montat în prealabil în circuitul magnetic.

Indiferent de modul de magnetizare se obțin pentru B_1 și H_1 valori unice, ceea ce arată că ipoteza magnetizării uniforme, după direcția $\varphi = 0$, este corectă. Din acest punct de vedere, calculul se poate aplica în cazul general și la magneți anizotropi (magnetizați însă după direcția lor

preferențială). Găsind grafic pe B_1 și H_1 din sistemul (3') se pot calcula constantele (C_1' și C_1''). Avînd în vedere că $k = 1$, rezultă din (1)

$$B_{3r} = -\mu_0 \frac{\partial V_3}{\partial r} = \mu_0 \cdot \cos\varphi \cdot \left[\frac{C_1''}{r^2} - C_1'\right], \tag{6}$$

adică, în orice punct din întrefier, componenta radială a inducției variază cosinusoidal. Acest lucru justifică montarea pe magnet a unor piese polare adecvate, avînd practic $\mu = \infty$, astfel încît inducția din întrefier să se omogenizeze.

3. APARAT MAGNETOELECTRIC AVÎND PIESE POLARE ÎNECATE (ÎNGROPATE)

3.1. Ipoteze de calcul

Pentru a arăta rolul pieselor polare în omogenizarea componentei radiale a cîmpului din întrefier, vom considera pentru simplitate $\mu_2 = \mu_4 = \infty$. Avînd în vedere configurația geometrică din figura 4 și ținînd seama de teorema refracției liniilor de cîmp, mai facem ipoteza că magnetul este uniform magnetizat, ca în cazul anterior, la valori B_1 și H_1 necunoscute deocamdată, dar legate prin curba de demagnetizare.

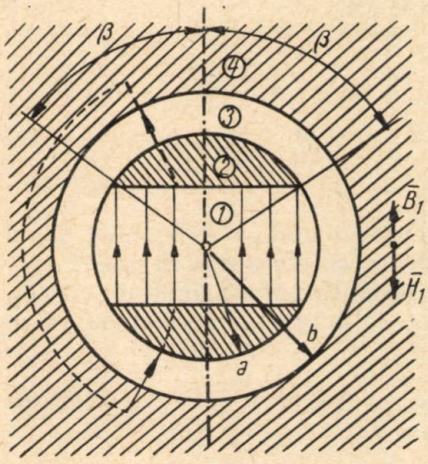


Fig. 4. — Aparat cu piese polare înecate.

În figura 4 au fost reprezentate aproximativ cîteva linii de cîmp, care, pentru claritate, au fost desenate punctat și în zonele cu $\mu = \infty$.

În aceste condiții, cunoscînd pe frontieră componenta tangențială a cîmpului magnetic din întrefier:

$$\begin{cases} H_{3\varphi}(b,\ \varphi) = 0, \\ H_{3\varphi}(a,\ \varphi) = \begin{cases} 0\,;\ |\varphi| < \beta \text{ și } \pi - |\varphi| < \beta, \\ H_1 \sin\varphi \text{ în rest,} \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

cîmpul magnetic din întrefier este univoc determinat. Cu notațiile anterioare se obține

$$\begin{cases} V_3(r,\ \varphi) = \sum\limits_k (C_k' r^k + C_k'' r^{-k}) \cos k\varphi, \\ H_{3\varphi}(r,\ \varphi) = \sum\limits_k [C_k' r^{k-1} + C_k'' r^{-(k+1)}]\, k \sin k\varphi, \\ H_{3r}(r,\ \varphi) = \sum\limits_k [C_k' \cdot r^{k-1} - C_k'' r^{-(k+1)}]\, k \cos k\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Dezvoltînd în serie Fourier funcția $H_{3\varphi}(a,\ \varphi)$ dată de (7), se obține

$$H_{3\varphi}(a,\ \varphi) = H_1 \sum_k G_k \sin k\varphi, \text{ cu } k = 2n + 1, \tag{7'}$$

unde coeficienții Fourier G_k au valorile

$$G_1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\sin 2\beta}{2}\right);\ G_3 = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\beta}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin 4\beta}{4}\right);\ G_5 = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 4\beta}{4} - \frac{\sin 6\beta}{6}\right); \ldots \qquad (7'')$$

Dacă se ține seama și că $H_{3\varphi}(b, \varphi) = 0$, introducînd (8) în (7) se determină constantele de integrare C_k'; C_k'' și se obține în final

$$B_{3r}(r, \varphi) = \mu_0 H_1 \sum_k \frac{G_k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}} \cdot \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{k+1} + \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\right] \cos k\,\varphi, \qquad (8')$$

respectiv componenta normală a inducției în întrefier la suprafața de separație $r = a$ (s-a ales și această valoare deoarece formulele devin mai simple, iar mărimea respectivă intervine și la §4) :

$$B_{3r}(a, \varphi) = \mu_0 H_1 \sum_k G_k \cdot \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}} \cdot \cos k\,\varphi =$$
$$= \mu_0 H_1 \sum_k G_k \cdot \alpha_k \cdot \cos k\varphi, \qquad (8'')$$

unde

$$\alpha_k = \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}} \qquad \text{și } k = 2n + 1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty. \qquad (9)$$

Ca problema să fie încheiată trebuie arătat cum se determină H_1 și apoi în ce măsură expresiile (8') sau (8'') sînt practic constante în raport cu φ, pentru $|\varphi| < \beta$. Aflarea lui H_1 se face din legea fluxului magnetic. Astfel, din figura 4, punînd condiția ca fluxul dat de magnetul permanent să se regăsească în întrefier, rezultă

$$B_1 \cdot a = a \cdot \int_0^{\pi/2} B_{3r}(a, \varphi) \cdot \mathrm{d}\,\varphi \qquad (10)$$

sau

$$B_1 = \mu_0 H_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{G_{2n+1}}{2n+1} \cdot \alpha_{2n+1}, \qquad (10')$$

expresie care rezultă introducînd (8'') în (10).

Intersectînd dreapta (10') cu curba $B_1 = f(H_1)$, se află grafic punctul de funcționare, respectiv valoarea lui H_1. În aceste condiții, expresia (8') sau (8'') este complet determinată.

3.2. Aplicații numerice

Să considerăm un aparat de construcție GOERZ avînd $a = 11$ mm, $b = 13,2$ mm și $\beta = 60°$. Mărimile care intervin în relațiile din paragraful 3.1 au fost grupate în tabela 1.

Tabela 1

k	$\left(\frac{a}{b}\right)^{2k}$	$\left(\frac{a}{r_{med}}\right)^{2k}$	$\left(\frac{a}{r_{med}}\right)^{k-1}$	G_k	cos $k\varphi$						
					$\varphi=0$	$\varphi=\pm15°$	$\varphi=\pm30°$	$\varphi=\pm45°$	$\varphi=\pm50°$	$\varphi=\pm55°$	$\varphi=\pm60°$
1	0,695	0,827	1	0,61	1	0,966	0,866	0,707	0,642	0,573	0,5
3	0,3362	0,567	0,827	−0,413	1	0,707	0	−0,707	−0,866	−0,966	−1
5	0,163	0,388	0,685	0,138	1	0,258	−0,866	−0,707	−0,342	0,087	0,5
7	0,0788	0,266	0,567	0,069	1	−0,258	−0,866	0,707	0,984	0,906	0,5
9	0,038	0,1822	0,47	−0,1242	1	−0,707	0	0,707	0	−0,707	−1
11	0,0184	0,125	0,388	0,0553	1	−0,966	0,866	−0,707	−0,984	−0,422	0,5
13	0,089	0,0855	0,321	0,0394	1	−0,966	0,866	−0,707	0,342	0,966	0,5
15	0,0043	0,0586	0,266	−0,0735	1	−0,707	0	0,707	0,866	−0,258	−1
17	0,0020	0,0402	0,220	0,0345	1	−0,258	−0,866	0,707	−0,642	−0,819	0,5
19	0,001	0,0276	0,182	0,0276	1	0,258	−0,866	−0,707	−0,642	0,819	0,5
21	—	0,0188	0,151	−0,0526	1	0,707	0	−0,707	0,866	0,258	−1
23	—	0,0129	0,125	0,025	1	0,966	0,866	0,707	0,342	−0,966	0,5

Cu ajutorul datelor din această tabelă se deduc următoarele :

a) $B_1/H_1 = 3{,}685\ \mu_0$, respectiv prin intersecția acestei drepte cu caracteristica de demagnetizare a magnetului permanent (executat din Alnico VII) rezultă din figura 8 că $H_1 = 675$ A/cm, $B_1 = 0{,}31$ T ;

b) pentru calculul componentei radiale a inducției din întrefier utilizăm relația (8′) în care am luat $r = r_{med} = \frac{1}{2}(a + b) = 12{,}1$ mm. Rezultatele calculului se găsesc în tabela 2, unde pe verticală s-a dat ponderea armonicilor considerate. Valorile pentru φ corespund diviziunilor principale ale aparatului, plus încă două în vecinătatea zonei $\varphi \approx \beta$:

$$B_{3r}(r_{med}, \varphi) : \mu_0 \cdot H_1 = f(\varphi).$$

Tabela 2

k \ φ	0°	±15°	±30°	±45°	±50°	±55°	±60°
1	3,044	2,940	2,633	2,150	1,9535	1,741	1,522
3	−0,679	−0,480	0	0,480	0,5885	0,656	0,679
5	0,1328	0,03425	−0,115	−0,0939	−0,0454	0,1155	0,0664
7	0,0455	−0,01175	−0,0394	0,0322	0,0447	0,0413	0,02275
9	−0,0605	0,0428	0	−0,0428	0	0,0428	0,0605
11	0,02085	−0,02015	0,0181	−0,01475	−0,0205	−0,0088	0,01042
13	0,0119	−0,0115	0,0103	−0,00841	0,00407	0,01185	0,00595
15	−0,01745	0,01235	0	−0,01235	−0,01515	0,0045	0,01745
17	0,00664	−0,00171	−0,00575	0,0047	−0,00426	−0,00544	0,00332
19	0,00419	0,00104	−0,00363	−0,00296	−0,00269	0,00343	0,00209
21	−0,00655	−0,00464	0	0,00464	−0,00568	−0,00169	0,00655
23	0,00258	0,00249	0,002235	0,001825	0,00088	−0,00249	0,00129
Suma	2,5049	2,50318	2,5003	2,4982	2,4980	2,4979	2,3820

S-au reținut în calcule 12 armonice, astfel ca ponderea armonicii 23 și a următoarelor să fie mai mică de 0,1 % din valoarea absolută a inducției. Rezultatele au fost calculate pînă la a patra zecimală ;

c) se observă că în plaja $|\varphi| \leqslant \beta' = 55°$, adică tocmai în zona de funcționare a aparatului, componenta radială a inducției nu se abate cu mai mult de 0,3 % față de valoarea ei din axa $\varphi = 0$. Într-adevăr

$$\frac{B_{3r}(0°) - B_{3r}(55°)}{B_{3r}(0^0)} 100 = \frac{2{,}5049 - 2{,}4979}{2{,}5049} 100 \simeq 0{,}28\,\%.$$

Acest lucru este ilustrat în figura 5, unde se observă variația monotonă, foarte lentă, a inducției magnetice. Se poate admite deci în zona de funcționare o valoare practic constantă a inducției magnetice radiale. În cazul de față, adoptăm valoarea medie rotunjită $B_{3r} = 2{,}50\ \mu_0 \cdot H_1 = 0{,}212$ T, valoare care este în acord deplin cu cifra măsurată de 0,21 T (cu ajutorul sondei Hall) ;

d) calcule similare au fost făcute cu ajutorul relației (8″) și pe fața piesei polare ($r = a$). Datele respective sînt reproduse mai jos (tabela 3).

Se observă aici variații mai pronunțate față de valoarea medie decît în cazul precedent. Aceste variații se manifestă în special în zona $\varphi \approx \beta$, datorită efectului de colț. Se poate însă arăta că pentru $\varphi > 60°$ inducția magnetică radială scade rapid, anulîndu-se la $\varphi = 90°$. Din acest motiv s-ar putea totuși considera, evident pentru calcule mai aproximative, că și la $r = a$ este posibilă o aproximare a inducției radiale printr-o treaptă de forma

$$B_{3r}(a, \varphi) = \begin{cases} \text{const pentru } |\varphi| < \beta, \\ 0 \qquad\qquad \text{în rest.} \end{cases} \tag{10''}$$

Acest lucru este utilizat doar în paragraful care urmează.

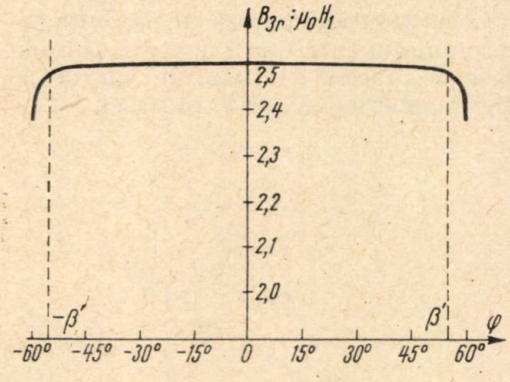


Fig. 5. — Variația cu unghiul φ a componentei radiale a inducției în întrefier.

Tabela 3

k \ φ	0°	±15°	±30°	±45°	±50°	±55°	±60°
1	3,390	3,278	2,938	2,391	2,180	1,939	1,695
3	−0,832	−0,590	0	0,590	0,721	0,803	0,832
5	0,192	0,0495	−0,1665	−0,1365	−0,0656	0,0167	0,096
7	0,0808	−0,0208	−0,07	0,057	0,0795	0,073	0,0404
9	−0,1335	0,0945	0	−0,0945	0	0,0945	0,1335
11	0,0574	−0,0554	0,0496	−0,0405	−0,0563	−0,0242	0,0287
13	0,042	−0,0386	0,0347	−0,0287	0,01375	0,0398	0,0201
15	−0,074	0,0524	0	−0,0524	−0,064	0,0193	0,074
17	0,0346	−0,0089	−0,03	0,0245	−0,0222	−0,0284	0,0173
19	0,0276	0,00711	−0,0239	−0,0195	−0,0177	0,0226	0,0138
21	−0,0526	−0,0372	0	0,0372	−0,0455	−0,01355	0,0526
23	0,0251	0,0241	0,0217	0,0177	0,00855	−0,0250	0,0125
Suma	2,7556	2,7547	2,7531	2,7520	2,7320	2,9168	3,0159

4. APARAT MAGNETOELECTRIC AVÎND PIESE POLARE APARENTE (DE TIP SECTOR)

În cazul aparatului reprezentat în figura 6, este clar că magnetul nu mai este uniform magnetizat (se poate arăta ușor că, dacă ar fi uniform magnetizat, ar rezulta o variație practic cosinusoidală a inducției, ceea ce contrazice realitatea). Dacă se ține seama că în general magnetul este și anizotrop, că pentru $r = a$ avem condiții pe frontieră mixte (și parțial necunoscute), iar întrefierul este neuniform, rezultă imediat că o rezolvare analitică mai exactă este foarte dificilă, dacă nu imposibilă. Pentru a obține

totuşi o soluţie mai simplă, dar acceptabilă practic, este necesar să se adopte o serie de ipoteze simplificatoare suplimentare faţă de paragraful 3. Precizăm însă că aceste ipoteze simplificatoare vor afecta mai mult *valoarea absolută a inducţiei din întrefier* şi nu legea ei de variaţie cu unghiul φ (variaţie care este determinată de condiţiile pe frontieră impuse de prezenţa pieselor feromagnetice cu $\mu = \infty$). Aproximaţia rezultantă poate fi considerată deci satisfăcătoare, deoarece clasa de precizie a aparatului nu este legată de valoarea absolută a inducţiei magnetice, ci de variaţia ei.

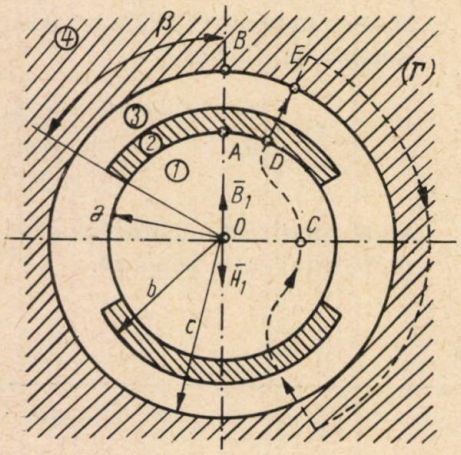


Fig. 6. — Aparat cu piese polare aparente.

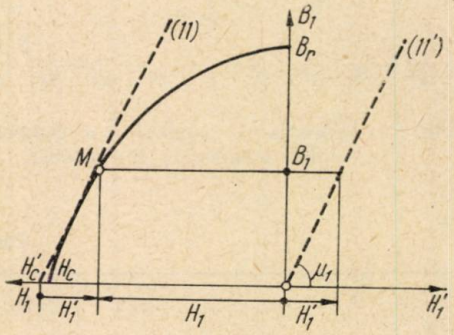


Fig. 7. — Aproximarea caracteristicii de demagnetizare.

Aceste ipoteze suplimentare sînt următoarele :

a) piesele polare *2* şi jugul *4* sînt executate din fier moale cu $\mu = \infty$;

b) considerăm că magnetul utilizat este omogen şi izotrop după toate direcţiile, respectiv în orice punct $\bar{B}_1 = -\mu_1(H_1)$. $\bar{H}_1$ prin intermediul *aceleiaşi caracteristici de demagnetizare* (magnetizarea aparatului făcîndu-se pînă la saturaţie, cu magnetul şi piesele polare în prealabil montate);

c) liniarizăm caracteristica de demagnetizare pentru toate zonele magnetului, plecînd de la poziţia punctului probabil de funcţionare M al zonei $r = a$ şi $|\varphi| < \beta$, prin expresia

$$B_1 = \mu_1 H'_1 = \mu_1(H'_c - H_1), \text{ cu } H'_1 = H'_c - H_1 \text{ (vezi fig. 7)}; \qquad (11)$$

d) ţinînd seama de cele obţinute la paragraful 3 (10″) şi avînd în vedere că piesele polare cu $\mu_2 = \infty$ concentrează liniile de cîmp, apreciem că inducţia radială la suprafaţa magnetului este

$$B_{1r}(a, \varphi) = \begin{cases} B_{10} & \text{pentru } |\varphi| < \beta \text{ şi } \pi - |\varphi| < \beta, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \qquad (12)$$

Această ultimă ipoteză este cu atît mai plauzibilă, cu cît prin construcţie întrefierul este mărit în zona $|\varphi| > \beta$.

Să vedem ce rezultă din aceste ipoteze. Din motive de simetrie, pentru liniile de cîmp OAB și CDE din figura 6 se poate scrie

$$\begin{cases} U_{m_{OA}} + U_{m_{AB}} = U_{m_{CD}} + U_{m_{DE}} = 0 & \text{(legea circuitului magnetic),} \\ U_{m_{AB}} = U_{m_{DE}} & \text{(cîmpul în întrefier omogen),} \end{cases} \tag{13}$$

$$U_{m_{OA}} = \int_0^A \bar{H}_1(r, 0) \cdot d\bar{l} = -\int_0^A H_1(r, 0) \cdot dl = \int_0^A H_1'(r, 0) \cdot dl -$$

$$- \int_O^A H_C' \cdot dl = U'_{m_{OA}} - H_C' \cdot a, \tag{14}$$

$$U_{m_{CD}} = \int_C^D \bar{H}_1(r, 0) \cdot d\bar{l} = -\int_C^D H_1(r, \varphi) \cdot dl = \int_C^D H_1'(r, \alpha)\, dl -$$

$$- \int_C^D H_C' \cdot dl = U'_{m_{CD}} - H_C' l_{CD}. \tag{15}$$

Relațiile (14) și (15) au fost scrise în lungul unei linii de cîmp (unde $\bar{H}_1 \cdot d\bar{l} = -H_1 \cdot dl$) ceea ce a permis utilizarea relației (11), valabilă doar pentru module.

Combinînd relațiile (13), (14), (15), se obține

$$U'_{m_{OA}} + U_{m_{AB}} = \frac{1}{2}\Theta(0) = H_c' \cdot a, \tag{16}$$

$$u'_{m_{CD}} + U_{m_{DE}} = \frac{1}{2}\Theta(\varphi) = H_c' \cdot l_{CD}, \tag{16'}$$

unde l_{CD} este lungimea liniei de cîmp respective din figura 6.

Rezultă o consecință importantă : din punctul de vedere al cîmpului din întrefier, lucrurile se petrec ca și cum în locul magnetului izotrop cu caracteristica (11) (vezi fig. 7) se pune un miez fictiv de aceeași formă, avînd caracteristica de magnetizare

$$\bar{B}_1 = \mu_1 \bar{H}_1', \tag{11'}$$

plus o solenație fictivă de valoarea $2\,a\,H_c'$, a cărei distribuție la periferia miezului rămîne deocamdată nedeterminată (ea se poate găsi conform relației (16') abia după calculul cîmpului). Prin aceasta cîmpul din întrefier nu se modifică, căci $B_{1_r}(a, \varphi)$ satisface în continuare condiția pe frontieră (12). În această situație, cîmpul în miezul fictiv *1* este ușor de determinat. Într-adevăr, în virtutea relației (11') avem :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{B}_1 = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{H}_1' = 0 \end{cases}; \quad \bar{H}_1' = -\operatorname{grad} V_1', \quad \text{respectiv } \Delta V_1' = 0, \tag{17}$$

$$\begin{cases} V_1' = \sum_k A_k\, r^k \cos k\,\varphi, \\ H'_{1r} = -\sum_k A_k \cdot r^{k-1} \cdot k \cdot \cos k\varphi, \\ B_{1r}(a, \varphi) = -\mu_1 \sum_k A_k \cdot a^{k-1} \cdot k \cos k\varphi. \end{cases} \tag{18}$$

Dar $B_{1r}(a, \varphi)$ dat de (12) se poate dezvolta în serie Fourier :

$$B_{1r}(a, \varphi) = B_{10} \cdot \sum_k F_k \cdot \cos k\varphi, \qquad k = 2n + 1, \tag{19}$$

unde

$$F_k = \frac{8}{2\pi} \int_0^{\beta} \cos k\varphi \cdot d\varphi = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin k\beta}{k}. \tag{19'}$$

Rezultă prin identificare

$$k A_k = -\frac{B_{10}}{\mu_1} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin k\beta}{k} \cdot \frac{1}{a^{k-1}}, \tag{20}$$

respectiv

$$H'_{1r}(r, \varphi) = \frac{B_{10}}{\mu_1} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_k \frac{\sin k\beta}{k} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} \cdot \cos k\varphi. \tag{20'}$$

În ceea ce privește cîmpul din întrefier, presupus omogen pentru $|\varphi| < \beta$, din figura 6 prin aplicarea legii fluxului magnetic, rezultă

$$2\beta a B_{10} = 2\beta \cdot r \cdot B_{3r} \ (r, \varphi) \text{sau } B_{3r} = \frac{a}{r} B_{10}. \tag{21}$$

Introducînd (20') și (21) în relația (16) avem

$$\frac{B_{10}}{\mu_1} \cdot \frac{4}{\pi} a \sum_k \frac{\sin k\beta}{k^2} + a \frac{B_{10}}{\mu_0} \ln \frac{c}{b} = aH'_c,$$

sau

$$B_{10} = \frac{\mu_0 H'_c}{\ln \frac{c}{b} + \frac{1}{\mu_{1r}} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)\beta}{(2n+1)^2}}, \tag{22}$$

respectiv inducția radială din întrefier

$$B_{3r}(r, \varphi) \simeq \frac{a}{r} \frac{\mu_0 H'_c}{\ln \frac{c}{b} + \frac{1}{\mu_{1r}} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)\beta}{(2n+1)^2}}. \tag{23}$$

4.1. Observații suplimentare

a) Pentru a găsi cum trebuie repartizată solenația fictivă (pînza de curent) la suprafața $r = a$, aplicăm relația (16') :

$$U_{m_{DE}} = a \frac{B_{10}}{\mu_0} \cdot \ln \frac{c}{b},$$

$$U'_{m_{CD}} = V'_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) - V'_1(a, \varphi) = 0 + \sum_k \frac{B_{10}}{\mu_1} \frac{4}{\pi} a \frac{\sin k\beta}{k^2} \cos k\varphi,$$

$$\Theta(\varphi) = 2a \frac{B_{10}}{\mu_0} \left[\ln \frac{c}{b} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\mu_{1r}} \cdot \sum_k \frac{\sin k\beta}{k^2} \cos k\varphi\right], \tag{24}$$

unde B_{10} este dat de (22).

b) În calcule am adoptat $\mu_4 = \infty$. Practic acest lucru se realizează dacă cămaşa 4 se dimensionează astfel încît $B_4 < 1,2$ T. În acest caz, $\mu_{4r} > 4000$ şi deci ipoteza $\mu_4 = \infty$ este corectă. Să vedem cum dimensionăm cămaşa. Fie g grosimea ei radială. Din legea fluxului magnetic, avem

$$a \cdot \beta \cdot B_{10} = g \cdot B_4, \text{ de unde: } B_4 = \frac{a}{g} \beta B_{10} < 1,1 \ldots 1,2 \text{ T.} \quad (25)$$

4.2. Aplicaţii numerice

Considerăm ca şi la paragraful anterior aceleaşi dimensiuni: $a = 10$ mm; $b = 11$ mm; $c = 13,2$ mm; $\beta = \frac{\pi}{3}$ (se referă la un aparat în execuţie curentă). Pentru a putea aplica rezultatele de mai sus, utilizăm ca material pentru magnetul permanent un aliaj Alnico VII, cu cîmp

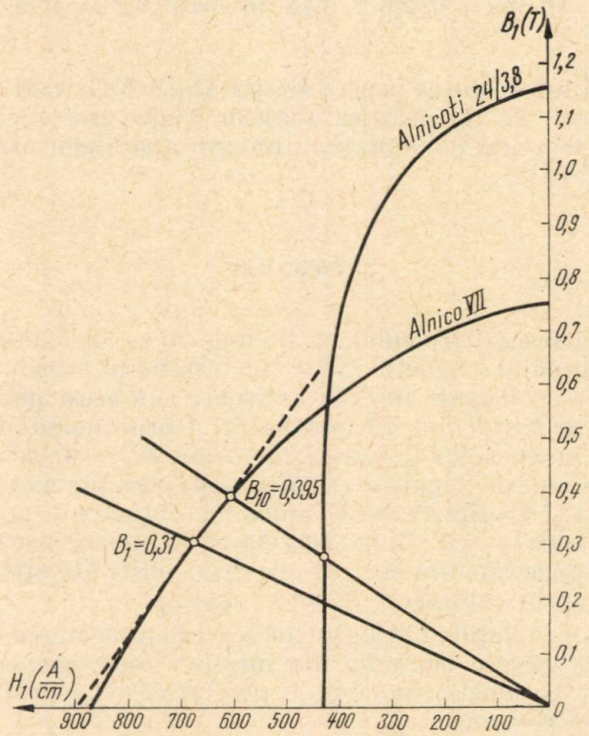


Fig. 8. — Curbele de demagnetizare ale magneţilor utilizaţi.

coercitiv mare [6], care, netratat în cîmp magnetic, este practic izotrop [5]. Caracteristica sa de demagnetizare şi liniarizarea ei sînt date în figura 8, unde, pentru comparaţie, a fost dată şi caracteristica aliajului Alnicoti 24/3, 8, indicat pentru circuite magnetice cu întrefier relativ mic.

Din figura 8 rezultă

$$H'_c = 900A/\text{cm} = 9.10^4\,\text{A/m},$$

$$\mu_1 = \frac{0{,}4}{3.10^4}; \quad \mu_{1r} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \simeq 10{,}5.$$

Cu aceste date, relația (22) ne dă

$$B_{10} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9.10^4}{0{,}1025 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{10{,}5} \cdot 0{,}845} \simeq 0{,}395\ \text{T}.$$

Pentru $r = \frac{b+c}{2} = 12{,}1\text{mm}$, adică în mijlocul întrefierului.

$B_{3r} = \frac{10}{12{,}1} \cdot 0{,}395 = 0{,}326$ T față de circa 0,210 T la cele cu piese înecate.

Acest rezultat se obține pentru aliajul Alnico VII, care are cîmp coercitiv foarte mare. La majoritatea aliajelor Alnico izotrope, $H_c \simeq 500\ldots$ $\ldots 700$ A/cm și de aceea inducția în întrefierul aparatelor uzuale are valori de 0,2 — 0,3 T [4].

5. CONCLUZII

Lucrarea a urmărit calculul, în limitele unor aproximații justificate în practică, a cîmpului magnetic radial din întrefierul principalelor aparate magnetoelectrice cu magnet interior existent. Din acest punct de vedere, cel mai afectat ar fi calculul din paragraful 4 prin modul de aproximare al magnetizării magnetului și considerarea lui $B_{1r} = 0$ pentru $|\varphi| > \beta$. Deși s-ar impune un calcul mai exact, folosind de exemplu metodele variaționale ale lui Ritz și Trefftz, valorile numerice obținute de noi pentru B_{3r} și invarianța sa în zona $|\varphi| < \beta'$ (în limitele clasei de precizie a acestor aparate) sînt confirmate experimental la aparatele deja construite atît prin valoarea inducției, cît și prin caracterul liniar al scării.

Prin aceasta, relațiile obținute pot servi la proiectarea unui astfel de aparat, deoarece găsirea cîmpului din întrefier este elementul principal în calculul unor parametri funcționali (cuplul activ, factorul de amortizare, factorul de calitate etc.).

Se observă apoi că, la aceleași dimensiuni exterioare și materiale, aparatele cu piese polare aparente asigură o inducție în întrefier mărită (0,326 T față de 0,210 T), deoarece, în raport cu cele avînd piesele înecate, ele utilizează un volum mai mare de magnet.

În încheiere țin să mulțumesc fostului meu coleg Adrian Deleanu de la laboratorul de metrologie al uzinei „Electromagnetica" pentru multe indicații prețioase date în legătură cu particularitățile acestor aparate.

ANEXĂ

ECUAȚIILE SATISFĂCUTE ÎNTR-O COROANĂ CILINDRICĂ IZOTROPĂ CU μ=CONST DE UN CÎMP MAGNETOSTATIC PLAN-PARALEL ALE CĂRUI LINII SÎNT SIMETRICE ÎN RAPORT CU O AXĂ DE REFERINȚĂ

$$\text{rot } \overline{H} = 0 \rightarrow \overline{H} = -\text{ grad } V, \tag{I}$$

$$\text{div } \overline{B} = 0 \rightarrow \mu \text{ div } \overline{H} = -\mu \Delta V = 0. \tag{II}$$

În coordonate cilindrice avem

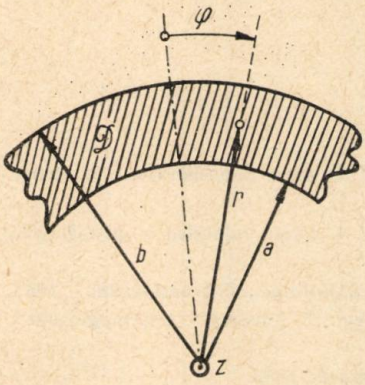


Fig. 9. — Explicativă privind separarea variabilelor.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

sau

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{III}$$

Aplicăm metoda separării variabilelor și căutăm o soluție de forma

$$V(r, \varphi) = R(r)\ \Phi(\varphi). \tag{IV}$$

Introducînd în (III), se obține

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} \cdot \Phi + r \cdot \Phi \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + R \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0$$

sau

$$\frac{r^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + r \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}}{R} = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\Phi} = k^2, \tag{V}$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + k^2 \Phi = 0 \rightarrow \Phi_k = C_k \cos k\varphi + D_k \cdot \sin k\varphi$$

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + r \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - k^2 R = 0 \rightarrow R_k = A_k \cdot r^k + B_k \cdot r^{-k}.$$

Deoarece potențialul este funcție pară de φ și funcție periodică de 2π, este clar că

$$D_k = 0, \tag{VI}$$

unde k este număr întreg.

Rezultă

$$V(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k r^k + A''_k r^{-k}) \cos k\varphi, \tag{VII}$$

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[A'_k r^{k-1} - A''_k r^{-(k+1)} \right] k \cos k\varphi, \tag{VIII}$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A'_k r^{k-1} + A''_k r^{-(k+1)} \right] k \sin k\varphi. \tag{IX}$$

Observație. Dacă în domeniul respectiv avem $a = 0$, este necesar ca $A''_k = 0$ (cîmpul în origină este finit), iar dacă avem $b = \infty$, este necesar ca $A'_k = 0$ (cîmpul la infinit este nul).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Timotin, *Cîmpuri magnetice în corpuri feromagnetice de mare permeabilitate*, St. cerc. energ., *A 4* (1962).
2. R. Răduleț, *Culegere de probleme de electrotehnică*, vol. I, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
3. A. Fremke, *Elektriceskie izmerenia*, Obșcii curs; p. 80, „Moskva, „Gosenergoizdat", 1963.
4. V. Pritkov, A. Taliţki, *Curs elektriceskih izmerenii*, vol. I, Moskva, „Gosenergoizdat", 1960, p. 110–113.
5. S. Cedighian, *Materiale magnetice*, București, Edit. tehnică, 1967.
6. E. Golding, F. Widdis, *Electrical measurements and measuring instruments*, p. 667, Londra, „Pitman", 1963.
7. A. Palm, W. Junsinger, *Elektrische Messgeräte und Messeinrichtungen*, p. 20, Berlin, „Springer-Verlag", 1963.
8. J. Stanek, *Technik elektrischer Messgeräte*, Berlin, „Verlag Technik", 1963.

REACTANȚA DE DISPERSIE A SPIREI ÎN SCURTCIRCUIT

DE

GR. CIVIDJIAN

537.311.6 :538.53 :621.318.31.4 :621.313

Considerîndu-se întrefierul în dreptul crestăturii umplut cu conductorul spirei și efectul pelicular neglijabil, se integrează execuția lui Poisson pentru potențialul magnetic vector în ipoteza unui cîmp plan-paralel. Pereții crestăturii se consideră de permeabilitate finită și uniform saturați. Cu ajutorul potențialului vector se obține o formulă aproximativă pentru inductanța de scăpări, pornind de la definiția ei energetică. Se indică și alte cîteva cazuri de aplicabilitate a formulei obținute.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară *) s-au determinat valorile optime ale parametrilor spirei în scurtcircuit de la electromagneții monofazați cu flux constant, din punctul de vedere al minimului pulsației forței de atracție. Valo-

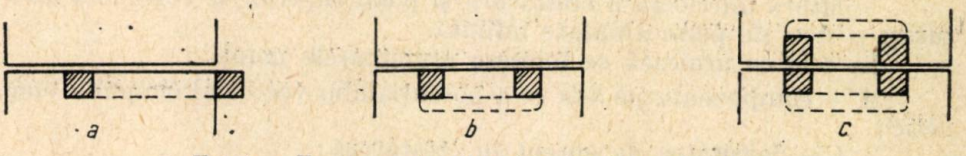


Fig. 1. — Forme constructive de spire în scurtcircuit.

rile optime ale parametrilor se exprimă în funcție de dimensiunile geometrice ale polului și reactanța de dispersie a spirei în scurtcircuit. Dacă se neglijează reactanța de dispersie pentru parametrii optimi, se obțin valori improprii, de unde rezultă importanța determinării ei cît mai precise.

Obiectul prezentei lucrări îl constituie determinarea reactanței de scăpări a porțiunii din spiră situate în crestătură, care reprezintă, în special la spirele de forma celor din figura 1 *b* și *c*, partea principală a reactanței de scăpări totale.

*) Gr. A. Cividjian, *Asupra alegerii parametrilor spirei ecran de la electromagneți*, comunicare făcută la Sesiunea științifică a Universității din Craiova, mai 1968.

Cazul studiat prezintă următoarele deosebiri față de cazul crestăturii dreptunghiulare de la mașinile electrice obișnuite, care fac inutilizabile rezultatele prezentate în literatura de specialitate, de exemplu în [1], [2] și [11]:

— interfierul în cazul electromagneților este de circa $5 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3}$ cm, deci mult mai mic decît în cazul mașinilor electrice, ceea ce nu permite neglijarea efectului de margine și considerarea liniilor de cîmp paralele cu baza crestăturii:

— crestătura este puțin adîncă și practic complet umplută cu conductorul spirei, neexistînd nici locul penei și nici izolația care există la crestăturile mașinilor electrice, ceea ce nu permite folosirea rezultatelor prezentate în [2], [3] și [11], unde se consideră spațiul ocupat de pană de înălțime infinită pentru rezolvarea problemei de cîmp la partea superioară a crestăturii și liniile de cîmp paralele cu baza pentru (deci din nou crestătura de înălțime infinită) pentru rezolvarea efectului de margine din partea ei inferioară;

— pe de altă parte, crestăturile fiind în general de dimensiuni mici (sub 1 cm), efectul pelicular poate fi neglijat [4], [5], ceea ce permite folosirea pentru rezolvarea problemei de cîmp a ecuației Poisson pentru potențialul vector.

Problema se rezolvă admițînd următoarele ipoteze simplificatoare:

— densitatea de curent se consideră constantă pe secțiunea crestăturii, iar cîmpul magnetic plan-paralel;

— întrefierul fiind foarte mic, se poate lua ca înălțime a conductorului spirei adîncimea crestăturii plus grosimea întrefierului (fig. 2) și cîmpul magnetic în întrefieruri se poate considera uniform:

— pereții laterali ai crestăturii se consideră saturați uniform pe toată înălțimea lor, avînd respectiv permeabilitățile magnetice relative echivalente μ_1, μ_2 [6];

— latura inferioară a crestăturii și polul superior se consideră nesaturați și deci de permeabilitate infinită.

În cele ce urmează se folosesc următoarele notații:

A — componenta pe axa oz a potențialului vector al cîmpului magnetic;

J — densitatea de curent în crestătură;

I — curentul în spiră;

a — lățimea polului cu spiră;

b — lungimea polului cu spiră;

u, v — lățimea și înălțimea crestăturii raportată la lățimea polului a;

δ_1, δ_2 — grosimea întrefierurilor;

δ_1', δ_2' — întrefierurile fictive (ținînd seama de saturație);

μ — permeabilitatea magnetică;

μ_0 — permeabilitatea magnetică a vidului;

μ_1, μ_2 — permeabilitățile relative echivalente ale porțiunii neecranate, respectiv, ecranate a polului;

H_{μ_1}, H_{μ_2} — cîmpurile magnetice produse de curentul I în porțiunile respective;

H_1, H_2 — cîmpurile magnetice în întrefierurile δ_1 și δ_2;

L — inductanța de scăpări a porțiunii din crestătură a spirei în scurtcircuit,

W — energia cîmpului magnetic din interiorul crestăturii;
A_t — componenta tangențială la suprafață a potențialului vector;
H_t — idem a cîmpului;
S_1 — aria porțiunii neecranate a polului;
S_2 — aria porțiunii ecranate a polului;
Φ' — fluxul principal produs de curentul I;
ε_a, ε_r — erori relative introduse prin aproximații;

$$\varphi = \frac{\pi u a}{va + \delta_1} \simeq \pi \frac{u}{v}; \qquad \alpha = \frac{S_1}{S_2},$$

$$\theta_i = \frac{\pi \delta_i}{va + \delta_i}; \qquad h = -\alpha \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\mu_2}}{1 - \frac{1}{\mu_1}} = \frac{\delta_2' (H_2 - H_{\mu_2})}{\delta_1 (H_1 - H_{\mu_1})},$$

$$k_1 = \frac{\delta_1'}{\delta_1' + \alpha \delta_2'}; \qquad k_2 = \frac{\alpha \delta_2'}{\delta_1' + \alpha \delta_2'}; \qquad k_3 = \frac{\delta_1 \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right)}{\delta_1' + \alpha \delta_2'}.$$

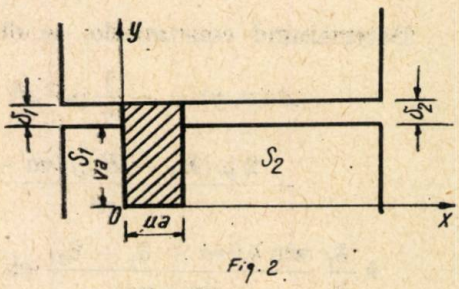


Fig. 2.

Fig. 2. — Secțiune transversală prin crestătură.

2. DETERMINAREA POTENȚIALULUI VECTOR

Cîmpul fiind plan-paralel, potențialul vector va avea o singură componentă orientată în lungul crestăturii, care va satisface ecuația lui Poisson:

$$\Delta A = -\mu J. \tag{1}$$

Ecuația (1) trebuie integrată în următoarele condiții de frontieră (fig. 3):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \quad \text{și} \quad y = va + \delta_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \begin{cases} -\mu H_{\mu_1}; & x = 0; \quad y \in (0, va), \\ -\mu_0 H_1; & x = 0; \quad y \in (va, va + \delta_1), \end{cases}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \begin{cases} -\mu H_{\mu_2}; & x = ua; \quad y \in (0, va + \delta_1 - \delta_2), \\ -\mu_0 H_2; & x = ua; \quad y \in (va + \delta_1 - \delta_2, va + \delta_1). \end{cases}$$

Aplicînd metoda lui Fourier, vom căuta soluţia problemei (1), (2) sub forma unei sume dintre o soluţie particulară a ecuaţiei lui Poisson şi o serie de produse ale lui Laplace, adică de următoarea formă [7]:

$$A(x, y) = B'x^2 + B''y^2 + Cxy + Mx + Ny + \sum_{\lambda} (A_\lambda \sin \lambda y + B_\lambda \cos \lambda y)(C_\lambda \operatorname{sh} \lambda x + D_\lambda \operatorname{ch} \lambda x). \tag{3}$$

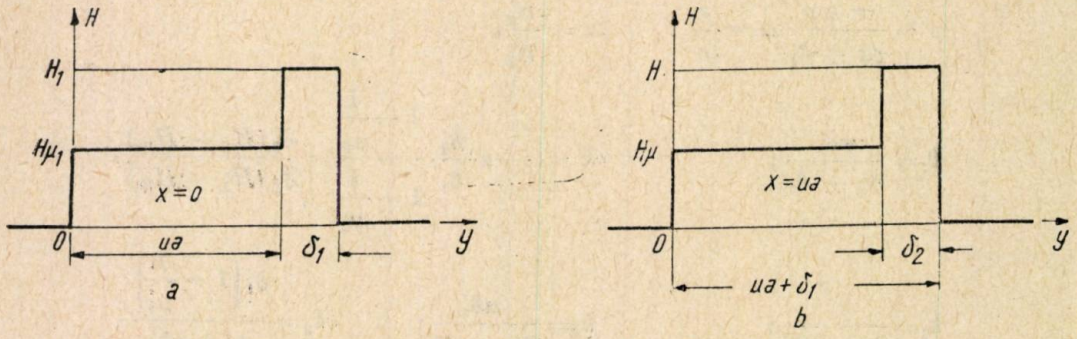


Fig. 3. — Variaţia cîmpului magnetic pentru $X = 0$ şi $X = ua$.

Determinînd constantele, se obţine expresia potenţialului vector:

$$A(x, y) = -\frac{1}{2}\mu J^2 x^2 - \mu \frac{H_1\delta_1 + va\,H_{\mu_1}}{va + \delta_1} x + \frac{2\mu(H_1 - H_{\mu_1})(va + \delta_1)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \lambda va \cdot \tag{4}$$

$$\cdot h \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\sin \lambda (va + \delta_1 - \delta_2)}{\sin \lambda va} \frac{\operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{ch} \lambda (ua - x)}{\operatorname{sh} \lambda ua} \cos \lambda y.$$

3. INDUCTANŢA DE SCĂPĂRI

Vom folosi definiţia energetică a inductanţei de scăpări:

$$L = \frac{2W}{I^2}, \tag{5}$$

unde W este energia acumulată în crestătură.

Energia magnetică acumulată în volumul V, mărginit de suprafaţa închisă S, poate fi exprimată astfel [8], [10]:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \overline{A}\overline{J}\, dv + \frac{1}{2}\oint_S (\overline{A}_t \times \overline{H}_t)\, d\overline{S}, \tag{6}$$

$d\overline{S}$ fiind orientat după normala exterioară, iar cu indicele t s-au notat componentele tangenţiale la suprafaţa S ale vectorilor respectivi.

Scriind dezvoltat expresia (6), obținem

$$2W = Jb\int_0^{va}\int_0^{va+\delta_1} A(x, y)\,dx\,dy + b H_{\mu_1}\int_0^{va} A(0,y)\,dy + bH_1\int_{va}^{va+\delta_1} A(0,y)\,dy$$

$$- bH_{\mu_2}\int_0^{va+\delta_1-\delta_2} A(ua, y)\,dy - bH_2\int_{va+\delta_1-\delta_2}^{va+\delta_1} A(ua,\ y)\,dy. \qquad (7)$$

Efectuînd integrarea, expresia (7) devine

$$2W = -\frac{\mu}{2} Jb\,(ua)^2\left(\frac{I}{3} + H_1\delta_1 + H_{\mu_1} va\right) + \frac{\mu b\,ua}{va+\delta_1}\left(\frac{I}{2} + H_1\delta_1 + \right.$$

$$\left. + H_{\mu_1} va\right)[H_2\delta_2 + H_{\mu_2}(va + \delta_1 - \delta_2)] + \frac{\mu b}{\pi^3}(H_1 - H_{\mu_1})^2\,(va+\delta_1)^2 \times \qquad (8)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda\, va}{n^3}\left[\left(1 + \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} h^2 \frac{\sin^2 \lambda(va+\delta_1-\delta_2)}{\sin^2 \lambda\, va}\right) \operatorname{cth} \lambda\, ua - \right.$$

$$\left. - 2h\frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\sin \lambda(va+\delta_1-\delta_2)}{\sin \lambda\, va \operatorname{sh} \lambda\, ua}\right].$$

Vom căuta să exprimăm acum cîmpul magnetic pe frontieră în funcție de curentul I din spiră. Aplicînd legea circuitului magnetic conturului din figura 1*a*, putem scrie (neglijăm fluxul de scăpări și reluctanța porțiunilor din miez, considerate mai sus ca nesaturate)

$$H_{\mu_2}(va + \delta_1 - \delta_2) - H_{\mu_1} va + H_2\delta_2 - H_1\delta_1 = I. \qquad (9)$$

Notînd cu Φ' fluxul principal produs de curentul din spiră, cîmpurile pe frontieră se scriu

$$H_1 = \frac{-\Phi'}{\mu_0 S_1};\quad H_2 = \frac{\Phi'}{\mu_0 S_2};\quad H_{\mu_1} = \frac{-\Phi'}{\mu_0\mu_1 S_1};\quad H_{\mu_2} = \frac{\Phi'}{\mu_0\mu_1 S_2},$$

iar relația (9) ne dă

$$\Phi' = \frac{\mu_0 S_1 I}{\delta_1' + \alpha\delta_2'}, \qquad (10)$$

unde s-au notat cu δ_1' și δ_2' întrefierurile echivalente, ținînd seama de saturație:

$$\delta_1' = \delta_1 + \frac{va}{\mu_1};\qquad \delta_2' = \delta_2 + \frac{va + \delta_1 - \delta_2}{\mu_2}.$$

Folosind expresia (10) a fluxului, putem scrie

$$H_1 \delta_1 + H_{\mu_1} va = -k_1 I,$$

$$H_2 \delta_2 + H_{\mu_1}(va + \delta_1 - \delta_2) = k_2 I,$$

$$H_1 - H_{\mu_1} = -\frac{K_3}{\delta_1} I; \qquad h = -\alpha \frac{1 - \frac{1}{\mu_2}}{1 - \frac{1}{\mu_1}} \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Înlocuind aceste expresii în relația (8) și apoi în (5), se obține expresia inductanței de scăpări :

$$L = \frac{\mu b}{\Pi}\left[\varphi\left(\frac{1}{3} - k_1 k_2\right) + 2\left(k_3 \frac{va + \delta_1}{\pi \delta_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} R(n)\right], \tag{12}$$

unde

$$R(n) = \left[\sin^2 \lambda va + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} h\right)^2 \sin^2 \lambda (va + \delta_1 - \delta_2)\right] \operatorname{cth} n\varphi - 2 \frac{h \frac{\delta_1}{\delta_2} \sin \lambda va \sin \lambda (va + \delta_1 - \delta_2)}{\operatorname{sh} n\varphi}. \tag{13}$$

Studiind caracterul variației expresiei $R(n)$ dată de ultima relație în raport cu n, se observă că, pentru cazurile întîlnite în practică și pentru $n \geqslant 3$, ea poate fi aproximată cu o eroare relativă mai mică de 10%, cu funcția (vezi anexa 1)

$$r(n) = \sin^2 \lambda va + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} h\right)^2 \sin^2 \lambda (va + \delta_1 - \delta_2). \tag{14}$$

După cum se va arăta mai jos (vezi anexa 2), această aproximație este suficientă, dată fiind valoarea mică a primilor termeni din seria (12). Prin urmare, mulțumindu-se cu această eroare, putem considera pe R ca funcție de n dată de relația (13) numai în primii doi termeni ai seriei din expresia (12) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} R(n) \simeq \sum_{n=1}^{2} \frac{R(n) - r(n)}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^3}. \tag{15}$$

Observînd că

$$\sin \lambda va = (-1)^{n+1} \sin n\theta_1 \quad \sin \lambda (va + \delta_1 - \delta_2) = (-1)^{n+1} \sin n\theta_2,$$

seria din ultimul termen al relației (15) se exprimă simplu prin suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin^2 n\theta, \tag{16}$$

unde θ ia succesiv valorile θ_1 și θ_2.

Ultima serie se poate calcula cu ajutorul funcției $S_0(\alpha)$, care este tabelată în [10].

Pentru valori mici ale lui θ ea se poate evalua după cum urmează [9]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\theta}{n^3} = -2\int_0^{2\theta} d\theta \int_0^{2\theta} \ln(2\sin\theta)\, d\theta = \theta^2(1{,}5 - \ln 2\,\theta). \qquad (17)$$

Folosind aproximațiile (15) și (17), obținem în definitiv din expresia (12) o formulă aproximativă, dar calculabilă, pentru inductanța de scăpări a porțiunii din crestătură a spirei în scurtcircuit:

$$L \simeq \frac{\mu b}{\pi}\left\{\varphi\left(\frac{1}{3} - k_1 k_2\right) + 2k_3^2\left[(1+h^2)\left(\operatorname{cth}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{cth} 2\varphi\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - h\left(\frac{2}{\operatorname{sh}\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\varphi}\right) - (\ln 2\theta_1 + h^2 \ln 2\theta_2)\right]\right\}. \qquad (18)$$

Se constată ușor (anexa 2) că pentru $\theta_i \leqslant \frac{\pi}{6}$ eroarea introdusă de aproximația (15) este sub 4%. Pentru $\theta_i \leqslant 0{,}15$, cum se întîmplă în cazul spirei-ecran de la electromagneți ($\delta_i \leqslant 5\cdot 10^{-2}$ mm și $va \geqslant 1$ mm), eroarea este sub 2,5%.

Pentru cazul întrefierurilor egale, formula (18) se simplifică, obținîndu-se

$$L \simeq \frac{\mu b}{\pi}\left\{\varphi\left(\frac{1}{3} - k_1 k_2\right) + 2k_3^2\left[(1+h^2)\left(\operatorname{cth}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{cth} 2\varphi - \ln 2\theta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - h\left(\frac{2}{\operatorname{sh}\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\varphi}\right)\right]\right\}. \qquad (19)$$

În cazul miezului nesaturat și a crestăturii simetrice ($\mu_1 = \mu_2 = \infty$; $\alpha = 1$), din relația (19) rezultă următoarea expresie simplificată pentru reactanța de scăpări:

$$X = 1{,}26\cdot 10^{-4}\left(K + \ln\frac{1}{2\theta}\right)\Omega/\text{m}, \qquad (20)$$

unde K este dat în figura 4.

Valorile reactanței de scăpări calculate cu formula (20) sînt reprezentate în figura 5.

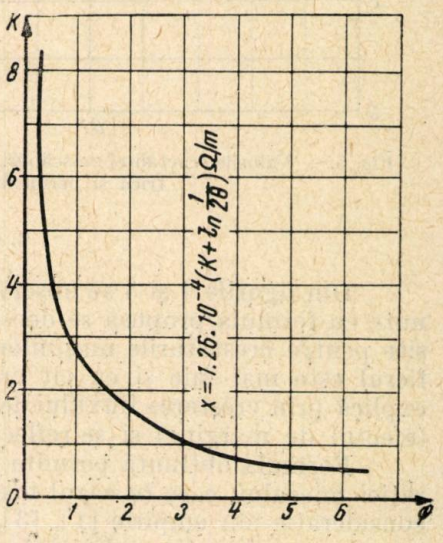


Fig. 4. — Valorile coeficientului K pentru calculul reactanței cu formula (20).

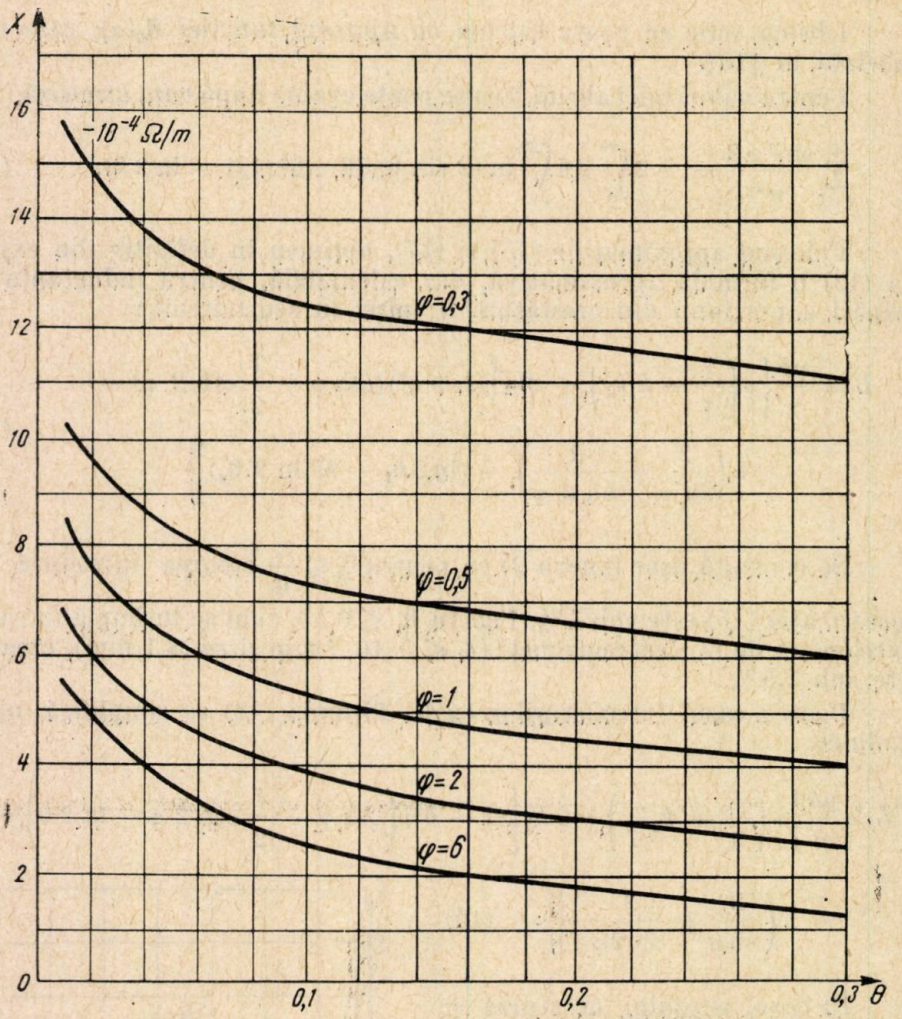


Fig. 5. — Valorile reactanței de scăpări calculate cu formula (20) pentru crestătura simetrică și permeabilitatea miezului infinită.

4. CONCLUZII

Din figurile 4 și 5 se observă că valorile inductanței de scăpări obținute cu formula propusă se deosebesc de cele calculate cu formulele folosite pentru crestăturile mașinilor electrice cu atît mai mult, cu cît întrefierul este mai mic și cu cît crestătura este mai puțin adîncă, ceea ce se explică prin creșterea fluxului de scăpări ce se închide prin miezul superior (efectul de margine) și se reflectă în prezența termenilor $\ln 2\theta_i$ și a $\operatorname{cth} \varphi$.

Formula obținută permite considerarea măcar aproximativă a saturației miezului, care în cazul mașinilor electrice se neglijează sau se ia în considerație pur empiric [1], [3], [11]. De asemenea formula (18) permite aprecierea cel puțin calitativă a influenței diferitor factori geometrici și de material asupra inductanței de scăpări.

Formula (18) poate fi folosită și pentru alte cazuri practice, cum ar fi inductanța de scăpări a bobinei electromagneților de tip U cînd aceasta umple complet fereastra sau în cazul unor crestături de la mașinile electrice, cum ar fi cele de la motoarele în dublă colivie (fig. 6).

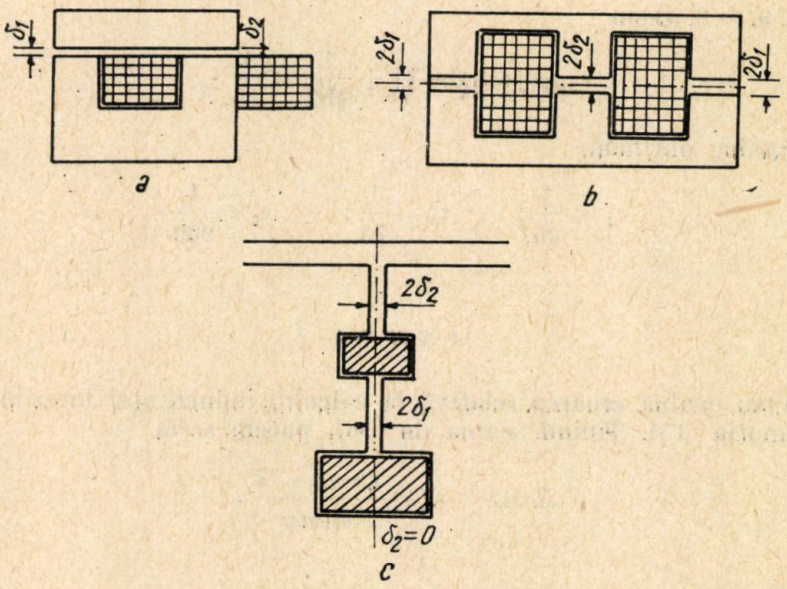


Fig. 6. — Exemple de electromagneți și crestături de mașini electrice pentru care se poate aplica formula (18).

Pentru cazul din figura 6 *b* și *c*, inductanța va fi egală cu jumătatea inductanței calculate pentru o jumătate din secțiunea bobinei (conductorului), iar pentru conductorul inferior al cazului din figura 6*c* se consideră în plus $\delta_2 = 0$.

În cazurile reprezentate în figura 6 *a* și *b*, formulele pot fi aplicate pentru dimensiuni oricît de mari ale miezurilor, primele două ipoteze simplificatoare fiind perfect admisibile; pentru cazul din figura 6*c*, formulele se pot aplica numai pentru secțiuni de dimensiune redusă, pentru care influența efectului pelicular este neglijabilă.

ANEXA 1

Într-adevăr, eroarea relativă a acestei aproximări va fi

$$\varepsilon_n = \frac{|R(n) - r(n)|}{r(n)} \leqslant |\operatorname{cth} n\varphi - 1| +$$

$$+ \left| \frac{1}{\operatorname{sh} n\varphi} \cdot \frac{2h\frac{\delta_1}{\delta_2} \sin \lambda va \sin \lambda (va + \delta_1 - \delta_2)}{\sin^2 \lambda va + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} h\right)^2 \sin^2 \lambda (va + \delta_1 - \delta_2)} \right| \leqslant \operatorname{cth} n\varphi - 1 + \frac{1}{\operatorname{sh} n\varphi}. \quad \text{(A1)}$$

Cum în practică

$$\frac{u}{v} > 0{,}3\,; \qquad \delta_1 \ll va,$$

pentru $n = 3$ avem

$$\varepsilon_3 = |\operatorname{cth} 3 - 1| + \frac{1}{\operatorname{sh} 3} < \frac{1}{10}\,. \tag{A2}$$

Analog obținem

$$\varepsilon_4 < \frac{1}{25}\,; \qquad \varepsilon_5 < \frac{1}{75}\,; \qquad \varepsilon_6 < \frac{1}{200}\,. \tag{A3}$$

ANEXA 2

Vom evalua eroarea relativă la calculul inductanței introdusă prin aproximația (15). Ținînd seama de (16), putem scrie

$$R(n) = r(n)\frac{\operatorname{ch} n\varphi - \xi}{\operatorname{sh} n\varphi}\,, \tag{A4}$$

unde

$$\xi = \frac{2h\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\sin n\theta_1 \sin n\theta_2}{\sin^2 n\theta_1 + \left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}h\right)^2 \sin n\theta_2}\,.$$

Deoarece $h < 0$, rezultă că pentru $n\delta_i \leqslant \pi$ și $\xi \geqslant 0$ avem

$$R(n) \geqslant r(n).$$

Considerînd $\theta_i \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ și $\varphi \geqslant \dfrac{1}{2}$, limite în care se încadrează cazurile întîlnite în practică, putem scrie, observînd că $|\xi| \leqslant 1$,

$$R(n) \geqslant r(n)\frac{\operatorname{ch} n\varphi - |\xi|}{\operatorname{sh} n\varphi} \geqslant r(n)\frac{\operatorname{ch} n\varphi - 1}{\operatorname{sh} n\varphi} \geqslant \frac{\operatorname{ch} 3 - 1}{\operatorname{sh} 3}\,r(n) = 0{,}9\,r(n).$$

Eroarea relativă la aproximarea seriei din relația (12) va fi, ținînd seama de (A4), (A1), (A2) și (A3),

$$\varepsilon_r = \frac{\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3}[R(n) - r(n)]}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}R(n)} \leqslant \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}[R(n) - r(n)]}{0{,}9\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}r(n)} \leqslant$$

$$\leqslant 1{,}1\,\frac{\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,\varepsilon_n\,r(n)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,r(n)} \leqslant 1{,}1\,\frac{\sum_{n=3}^{5}\frac{\varepsilon_n\,r(n)}{n^3}+\varepsilon_6\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,r(n)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,r(n)} \leqslant$$

$$\leqslant 1{,}1\left[\frac{\theta_1^2(1+h^2)\sum_{n=3}^{5}\frac{\varepsilon_n}{n}}{\theta_1^2(1{,}5-\ln 2\theta_1)+\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\,h\right)^2\theta_2^2(1{,}5-\ln 2\theta_2)}+\varepsilon_6\right]\leqslant$$

$$\leqslant 1{,}1\left[\frac{\frac{\varepsilon_3}{3}+\frac{\varepsilon_4}{4}+\frac{\varepsilon_5}{5}}{1{,}5-\ln 2\max(\theta_1,\theta_2)}+\varepsilon_6\right]\leqslant 1{,}1\left[\frac{\frac{1}{30}+\frac{1}{100}+\frac{1}{375}}{1{,}5}+\frac{1}{200}\right]<0{,}04.$$

BIBLIOGRAFIE

1. R. Richter, *Mașini electrice*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1958, p. 262—263.
2. K.J. Binns, P.J. Lawrenson, *Analysis and Computation of electric and magnetic field problems*, Oxford, Pergamon Press, 1963, p. 104—107 și 172—175.
3. B.L. Robertson, J.A. Terry, *Analitical determination of magnetic fields*, Trans. Amer. Inst. Elect. Engr., **48**, *4*, 1242—1262 (1929).
4. I.M. Postinkov, *Proiectirovanie electriceskih mașin*, CITL USSR Kiec 1960—92— 95— 105— 106, 111—112
5. J. Lammeraner, M. Stafhl, *Vihrevie toki*, Moscova, Energhia, 1967, p. 112—114.
6. R.S. Koloiahceva, *Raspredelenie magnitonogo potoka v electro magnitah s corotcozamknutim vitcom*, Electromehanica, *7*, 848—851 (1963).
7. A. Angot, *Complemente de matematici*, București, Edit. tehnică, 1965.
8. A. Țugulea, *Reactanța de dispersie la crestături de formă eliptică*, St. cerc. energ. electr., **16**, *2*, 221—225. (1966).
9. B.P. Demidovici, I.A. Maron, *Osnovi viceslitelnoi matematiki*, Moscova, „Nauka", 1966, p. 223.
10. H. Buchholz, *Rascet electriceskih i magnitnîh polei*, Moscova, 1961, p. 30 și 963.
11. I.L. Kokle, *Magnitnoe pole v zazore inductivnoi masini s classicescoi zubtovoi zonoi*, Bezkontaktnie elektriceskie mașini, vol. IV, Riga, Zinatne, 1967, p. 5—54.

FORȚELE ELECTRODINAMICE EXERCITATE ASUPRA UNUI SISTEM TRIFAZAT DE CONDUCTOARE RECTILINII PARCURSE DE CURENT ÎN PREZENȚA ECRANELOR ELECTROMAGNETICE CILINDRICE CIRCULARE *)

DE

CORNELIA IONESCU

621.3.001 621.3.018.4

În lucrare se studiază cîmpul electromagnetic și forțele care se exercită între conductoare și ecran în cazul așezării conductoarelor în același plan și în triunghi echilateral la diferite cazuri de scurtcircuit. Se compară rezultatele obținute, considerînd ecranul perfect conductor, cu rezultatele în cazul unui singur fir, plasat într-un ecran de conductivitate finită.

1. INTRODUCERE

În lucrări anterioare [2], [3] a fost studiat cîmpul electromagnetic al unor conductoare rectilinii parcurse de curenți alternativi, situate în prezența unui ecran electromagnetic cilindric circular de grosime oarecare, obținîndu-se soluția exactă a regimului cvasistaționar. S-a arătat de asemenea că, pentru probleme care prezintă interes în tehnică, aproximația ecranului subțire perfect conductor este pe deplin acceptabilă.

În prezenta lucrare, rezultatele obținute anterior sînt folosite pentru calculul forțelor electrodinamice exercitate asupra barelor și ecranului în cazul unui sistem trifazat de bare parcurse de curent situate în interiorul unui ecran cilindric circular subțire perfect conductor, comparîndu-se rezultatele astfel obținute cu cele obținute considerînd barele neecranate. Calculul a fost efectuat pentru diferite cazuri de scurtcircuit și pentru diferite poziții ale barelor. S-a studiat de asemenea influența asupra rezultatelor a considerării ecranului de conductivitate finită.

*) Comunicare prezentată la a XV-a sesiune științifică a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, mai 1969.

2. CALCULUL CÎMPULUI

Calculul a fost efectuat prin integrarea cu metode cunoscute a ecuațiilor cîmpului electromagnetic în regim armonic permanent, păstrîndu-se aceleași ipoteze simplificatoare din lucrările anterioare [2], [7]. Mediul fiind considerat liniar din punct de vedere electric și magnetic, este valabilă teorema superpoziției, deci rezultatul se obține simplu, folosind soluția din cazul unui singur fir cu întoarcerea curentului prin ecran. Potențialul vector pentru un astfel de fir s-a obținut prin integrarea ecuației Laplace :

$$\Delta \underline{A}_i = 0, \tag{1}$$

satisfăcută de acesta în întregul domeniu $(\mathcal{D}_i)$, cu excepția punctului în care se găsește firul parcurs de curent și unde, după cum se știe [4], potențialul prezintă o singularitate logaritmică. Sistemul axelor de coordonate s-a ales ca în figura 1, unde (r, θ) sînt coordonatele polare ale unui punct curent, iar (r_0, θ_0) coordonatele urmei firului parcurs de curentul alternativ :

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t \rightleftarrows \underline{I} = \mathrm{I}^{j0}. \tag{2}$$

Deoarece se studiază numai regimul armonic permanent, s-a folosit reprezentarea în complex a mărimilor. Problema fiind plan-paralelă, potențialul vector va avea forma

$$\underline{\overline{A}}(r, \theta) = \overline{k}\underline{A}(r, \theta) = \overline{k}\,[\underline{A}'(r, \theta) + \underline{A}''(r, \theta)], \tag{3}$$

unde $\underline{A}'$ satisface ecuația

$$\Delta \underline{A}' = 0 \text{ în } (\mathcal{D}_i) \tag{4}$$

$$\underline{A}'' = \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \ln \frac{1}{R}. \tag{5}$$

Rezolvînd ecuația (4) prin metoda separării variabilelor în coordonate cilindrice și cu respectarea condițiilor de frontieră, s-a obținut

$$\underline{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \left(-\frac{1}{n}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \theta_0) - \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \ln R + \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \ln a, \tag{6}$$

iar densitatea de curent indusă în ecran este

$$\underline{J}_s = -\frac{\underline{I}}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \cos n(\theta - \theta_0)\right]. \tag{7}$$

S-au considerat două cazuri distincte de așezare a celor trei bare în interiorul ecranului : în același plan și în colțurile unui triunghi echilateral. În primul caz, potențialul vector rezultant, produs într-un punct oarecare de cele trei bare, se obține din (6), în care se ține seama pe rînd

de valorile coordonatelor (r_0, θ_0) ale urmelor conductoarelor străbătute de curent :

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(-\frac{1}{n}\right)\cos n\theta\,[\underline{I}_1 + (-1)^n\underline{I}_3] -$$

$$- \frac{\mu_0\underline{I}_1}{2\pi}\left[\ln r - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n\theta\right] - \frac{\mu_0\underline{I}_2}{2\pi}\ln r - \frac{\mu_0\underline{I}_3}{2\pi}\left[\ln r - \right. \tag{8}$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n\theta(-1)^n\right] + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln a\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3),$$

$$\underline{J}_s = -\frac{\underline{I}_1}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n\theta\right] - \frac{\underline{I}_2}{2\pi a} - \frac{\underline{I}_3}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n\cos n(\theta-\pi)\right]. \tag{9}$$

Pentru al doilea caz s-a obținut

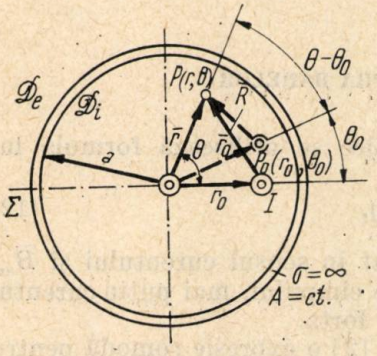


Fig. 1. — Alegerea coordonatelor pentru cazul unui singur fir în interiorul ecranului.

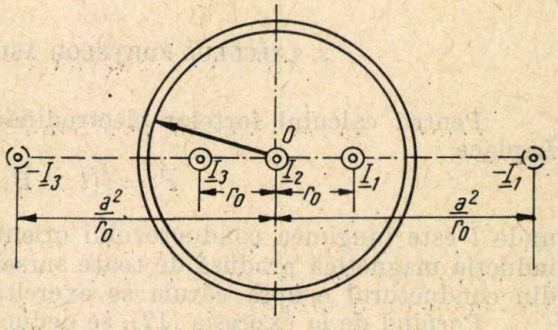


Fig. 2. — Sistem trifazat de bare situate în același plan. Punctat se indică imaginile lor în raport cu ecranul.

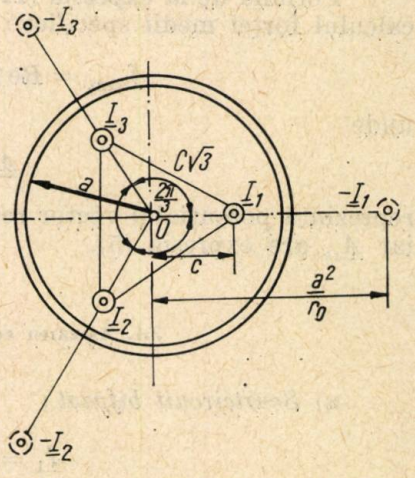


Fig. 3. — Sistem trifazat de bare dispuse în vîrfurile unui triunghi echilateral. Punctat se indică imaginile lor în raport cu ecranul.

$$\underline{A} = \frac{\mu_0\underline{I}_1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\theta - \frac{\mu_0\underline{I}_1}{2\pi}\left[\ln r - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{r}\right)^n\cos n\theta\right] +$$

$$+ \frac{\mu_0\underline{I}_1}{2\pi}\ln a + \frac{\mu_0\underline{I}_2}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\mu_0\underline{I}_2}{2\pi}\left[\ln r - \right.$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{r}\right)^n \cos n\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\Big] + \frac{\mu_0 \underline{I}_2}{2\pi} \ln a + \tag{10}$$

$$+ \frac{\mu_0 \underline{I}_3}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{a}\right)^n \left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{\mu_0 \underline{I}_3}{2\pi}\Big[\ln r -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{r}\right)^n \cos n\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\mu_0 \underline{I}_3}{2\pi} \ln a,$$

$$\underline{J}_s = -\frac{\underline{I}_1}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^n \cos n\theta\right] - \frac{\underline{I}_2}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^n \cos n\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\underline{I}_3}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^n \cos n\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right]. \tag{11}$$

3. CALCULUL FORȚELOR ASUPRA BARELOR

Pentru calculul forțelor electrodinamice se utilizează formula lui Laplace

$$\overline{F} = i(\overline{l} \times \overline{B}_{ext}), \tag{12}$$

unde $\overline{l}$ este lungimea conductorului orientat în sensul curentului și $\overline{B}_{ext}$ inducția magnetică produsă de toate sursele cîmpului, mai puțin curentul din conductorul asupra căruia se exercită forța.

Pornind de la expresia (12), se deduce [2] o expresie comodă pentru calculul forței medii specifice :

$$f_{med_k} = \mathrm{Re}\{\underline{I}_k^* \ \mathrm{grad}\ (\underline{A} - \underline{A}_{fk})\}, \tag{13}$$

unde

$$\underline{A} - \underline{A}_{fk} = \underline{A}_k \tag{14}$$

reprezintă potențialul vector rezultant din punctul unde se află firul (k), iar $\underline{A}_{fk}$ are expresia (5).

3.1. Așezarea conductoarelor în același plan

a) *Scurtcircuit bifazat* :

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_3\,;\ \underline{I}_2 = 0. \tag{15}$$

În acest caz, forțele medii calculate cu (13) au expresiile

$$f_{1\,med} = \mathrm{Re}\left\{\underline{I}_1^* \left[\left|\frac{\partial \underline{A}_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \underline{A}_1}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}\right]\right\}. \tag{16}$$

Efectuînd calculele, rezultă $\left(\text{pentru raportul } \frac{r_0}{a} = 0{,}634\right)$

$$f_{1\,\text{med}} = f_{3\,\text{med}} = \frac{\mu_0 I_1^2}{\pi a}\left[\frac{a^4 - r_0^4 - 4\,r_0^2 a^2}{2\,(a^4 - r_0^4)}\right] = 0{,}359\,f_0 \tag{17}$$

unde:

$$f_0 = \frac{\mu_0 I_1^2}{\pi a}.$$

b) *Scurtcircuit bifazat*:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2;\ \underline{I}_3 = 0. \tag{18}$$

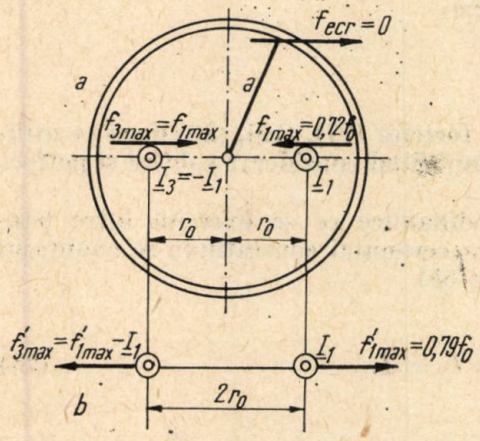


Fig. 4. — Forțele maxime exercitate între barele *1* și *3* la scurtcircuit bifazat: *a* — în prezența ecranului; *b* — în absența ecranului.

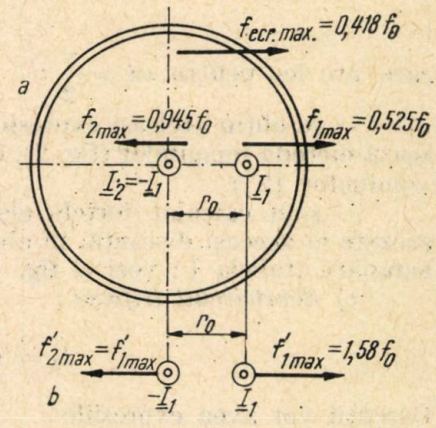


Fig. 5. — Forțele maxime exercitate între barele *1* și *2* la scurtcircuit bifazat: *a* — în prezența ecranului; *b* — în absența ecranului.

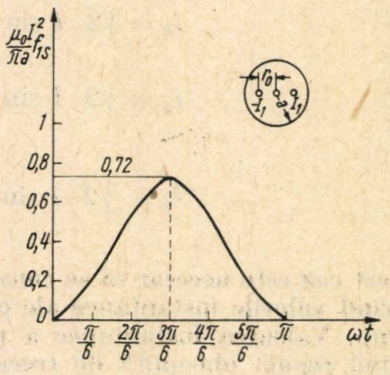


Fig. 6. — Variația $f_{1S}(\omega t)$ la scurtcircuit bifazat $\underline{I}_1 = -\underline{I}_3$; $\underline{I}_2 = 0$.

În mod analog s-au calculat

$$f_{1\,\text{med}} = \frac{\mu_0 I_1^2}{2\pi r_0}\left[\frac{a^2 - 2\,r_0^2}{a^2 - r_0^2}\right] = 0{,}263\,f_0, \tag{19}$$

$$f_{2\,\text{med}} = \frac{\mu_0 I_1^2}{2\pi r_0}\left[\frac{r_0^2 - a^2}{a^2}\right] = 0{,}472\,f_0. \tag{20}$$

Se observă următoarele:

— pentru ambele cazuri se pot obține valorile maxime ale forțelor dacă în expresiile forțelor medii se înlocuiește $I \to I_{max}$. De exemplu pentru cazul *a*)

$$f_{1\,max} = f_{3\,max} = 0{,}359\,\frac{\mu_0 I_{1\,max}^2}{\pi a} = 0{,}718\,\frac{\mu_0 I^2}{\pi a} = 0{,}718\,f_0. \tag{21}$$

Aceeași valoare maximă s-a obținut ca verificare, calculînd expresia instantanee a forței f_1 pentru diferite valori ale fazei (ωt):

$$f_{1\,max} = 0{,}72\,\frac{\mu_0 I^2}{\pi a} = 0{,}72\,f_0 \tag{22}$$

care are loc pentru $\omega t = \frac{\pi}{2}$;

— se obțin aceleași expresii ale forțelor (17), (19), (20) dacă se utilizează metoda imaginilor (fig. 2), ecranul fiind considerat subțire și perfect conductor [2];

— s-au calculat forțele electrodinamice ce se exercită între bare așezate la aceeași distanță, în absența ecranului constatîndu-se avantajul ecranării (tabela 1; vezi și fig. 4*b* și 5*b*).

c) *Scurtcircuit trifazat*:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I. \tag{23}$$

Curenții vor avea expresiile

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2}\ I \sin \omega t, \\ i_2 &= \sqrt{2}\ I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \\ i_3 &= \sqrt{2}\ I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

În acest caz este necesar să se considere expresiile instantanee ale forțelor (utilizînd valorile instantanee ale cîmpului), și să se studieze variația lor în timp. Valoarea instantanee a potențialului vector se obține din (8), utilizînd regula obișnuită de trecere de la reprezentarea în complex la valoarea instantanee. Cîmpul va avea expresia

$$\overline{B}_1 = \left\{ \bar{u}_r \left| \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right|_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} - \bar{u}_\theta \left| \frac{\partial A_1}{\partial r}\right|_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} \right\}, \tag{25}$$

iar forța

$$f_{1\,inst} = i_1 \{\bar{k} l \times \overline{B}_1\}. \tag{26}$$

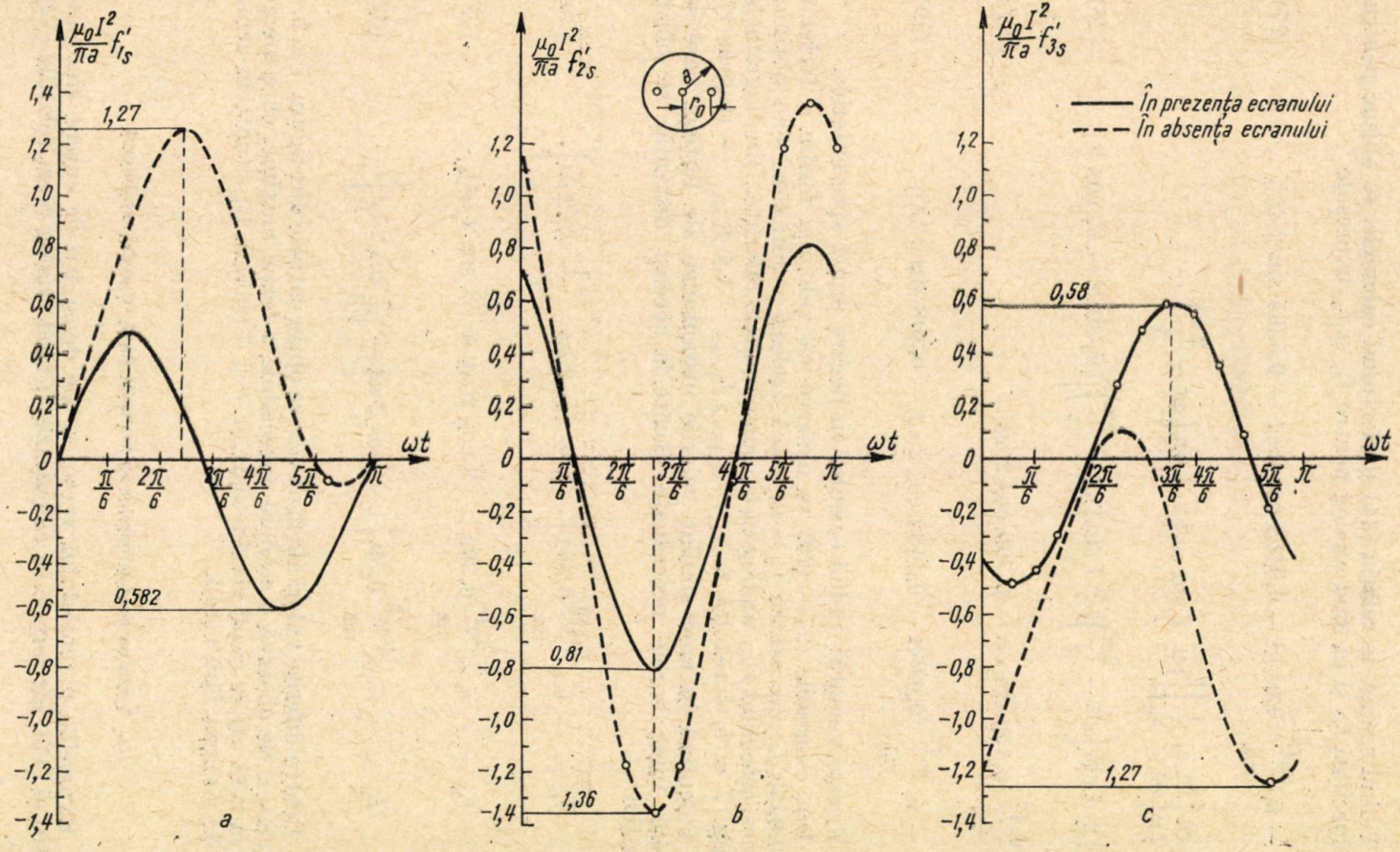


Fig. 7. — Variația forțelor asupra conductoarelor la scurtcircuit trifazat.

Ţinînd seama de relaţia (24) şi efectuînd calculele, se obţine pentru forţa specifică f_{1s} şi în mod analog pentru f_{2s} şi f_{3s} expresiile

$$\bar{f}_{1s} = -\bar{u}_r \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}[0{,}0458 - 0{,}0458 \cos 2\omega t - 0{,}5365 \sin 2\omega t], \tag{27}$$

$$\bar{f}_{2s} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{r_0}{a^2} - \frac{1}{r_0}\right]\left[\sqrt{2}\, I \sin \omega t \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right][\bar{u}_\theta \sin\theta - \bar{u}_r \cos\theta] \tag{28}$$

$$_{2s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}[0{,}409 \sin \omega t - 0{,}709 \cos 2\omega t], \tag{28'}$$

$$\bar{f}_{3s} = -\bar{u}_r \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}[0{,}0458 - 0{,}4432 \cos 2\omega t - 0{,}308 \sin 2\omega t], \tag{29}$$

unde $\bar{u}_r$ este versorul radial orientat în fiecare punct spre exterior.

Din expresiile (27)—(29) se observă că valoarea medie a forţelor este $0{,}0458\, f_0$, iar pentru $f_2 = 0$, adică aceleaşi valori care s-au obţinut şi direct, calculînd f_{med} analog ca la scurtcircuitele bifazate. Din diagramele din fig. 7 *a*, *b*, *c* rezultă $f_{1\,max} = f_{3\,max}$; $f_{2\,max} = 1{,}4\, f_{1\,max} \rightarrow$ (tabela 1).

Calculînd în mod similar valorile instantanee ale forţelor care se exercită între barele neecranate situate la aceeaşi distanţă, se obţin expresiile

$$\bar{f}_{1s} = -\bar{u}_{r(1)} \frac{\mu_0 I^2}{\pi a} 0{,}591\left[-1 + \cos 2\omega t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\omega t\right], \tag{30}$$

$$\bar{f}_{2s} = -\bar{u}_{r(1)} \frac{\mu_0 I^2}{\pi a} 0{,}394\,[-3 \cos 2\omega t + \sqrt{3} \sin 2\omega t], \tag{31}$$

$$\bar{f}_{3s} = -\bar{u}_{r(1)} \frac{\mu_0 I^2}{\pi a} 0{,}59\left[1 + \cos 2\omega t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\omega t\right]. \tag{32}$$

Pentru diferite valori ale fazei (ωt) se obţin curbele din figura 7 *a*, *b*, *c* (punctate). Se observă o scădere apreciabilă a forţei maxime, care merge pînă la 2,18 ori în cazul conductoarelor *1* şi *3* (tabela 1), situate în ecran faţă de situaţia fără ecran.

3.2. Aşezarea conductoarelor în vîrfurile unui triunghi echilateral

Expresiile potenţialului vector şi ale densităţii de curent sînt date de (10) şi (11), iar forţele se calculează în mod analog (vezi relaţiile (12), (13)).

a) *Scurtcircuit bifazat*:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_3;\ \underline{I}_2 = 0. \tag{33}$$

Forțele în acest caz vor avea două componente:

$$f'_{1\,med} = \mathrm{Re}\{\underline{I}_1^* \,|\, \mathrm{grad}_r\, \underline{A}_1\,|\} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi c} \frac{\left[1 - 3\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{c}{a}\right)^4 - \left(\frac{c}{a}\right)^6\right]}{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^6}, \tag{34}$$

$$f^{\theta}_{1\,med} = \mathrm{Re}\,\{\underline{I}_1^* \,|\, \mathrm{grad}_\theta\, \underline{A}_1\,|\} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi c} \frac{\left[-1 + 3\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{c}{a}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^6\right]}{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^6}. \tag{35}$$

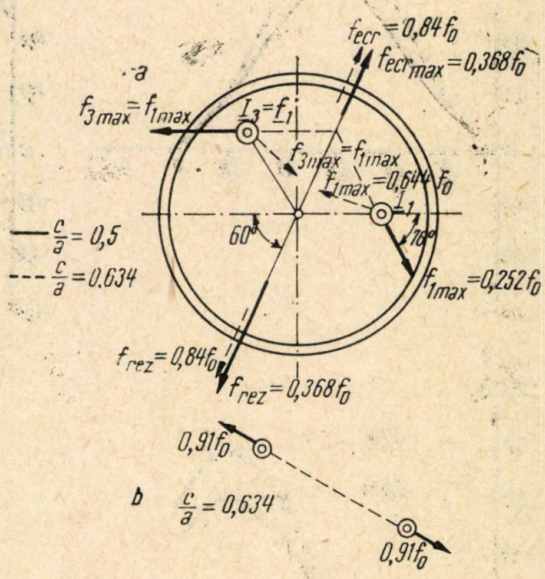


Fig. 8. — Forțele maxime exercitate între barele *1* și *3* la scurtcircuit bifazat (barele așezate în triunghi): *a* — în prezența ecranului; *b* — în absența ecranului.

Calculînd pentru raportul $\frac{c}{a} = 0{,}634$, se obține

$$J_{1r} = -0{,}316\,\frac{\mu_0 I^2}{\pi a},$$

$$f_{1\theta} = -0{,}06\,\frac{\mu_0 I^2}{\pi a}, \tag{36}$$

$$f_1 = \sqrt{f_{1\theta}^2 + f_{1r}^2} = 0{,}322\, f_0,$$

iar pentru $\frac{c}{a} = 0{,}5$

$$f_{1r} = 0{,}0239 \frac{\mu_0 I^2}{\pi a},$$
$$f_{1\theta} = -0{,}214 \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}, \tag{37}$$
$$f_1 = 0{,}215 f_0.$$

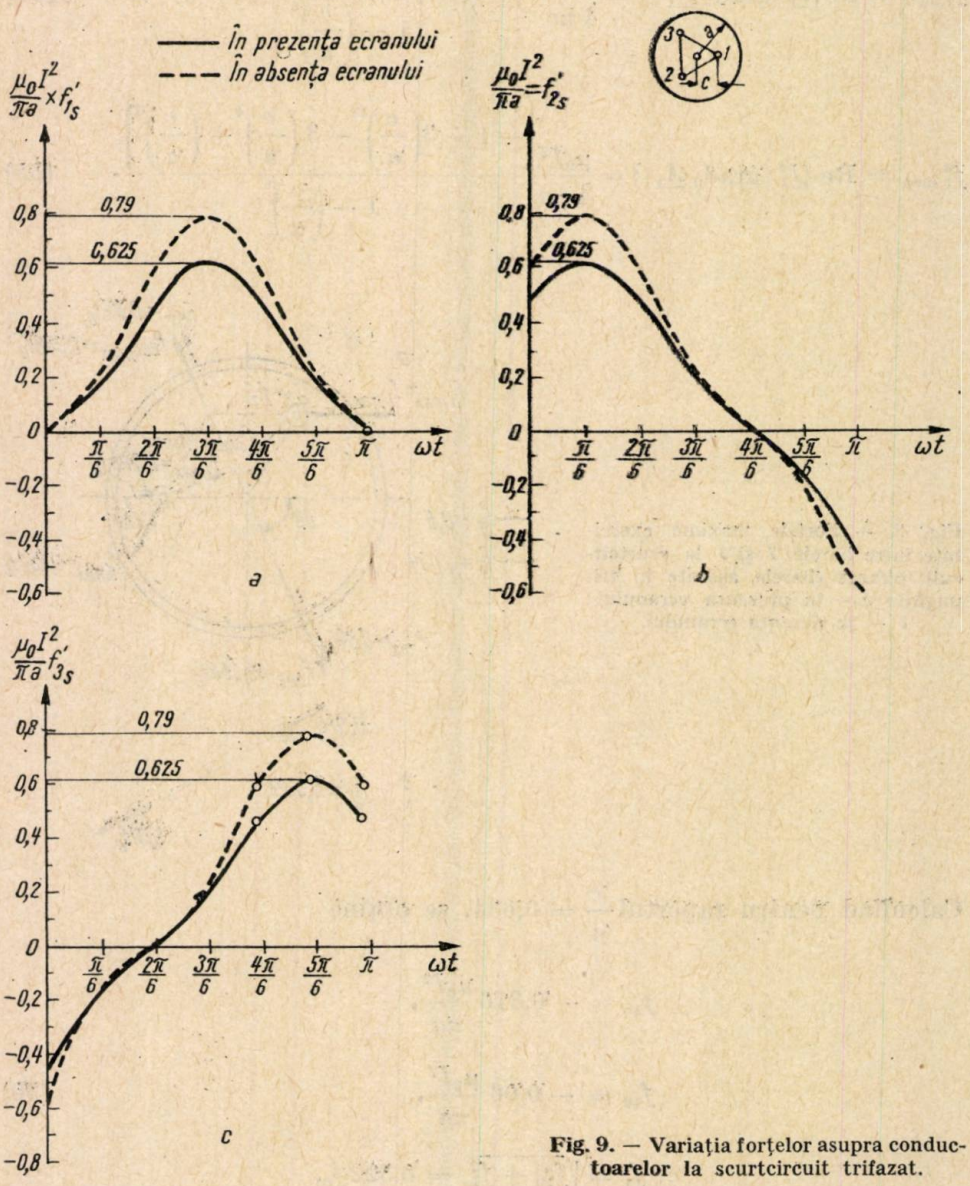


Fig. 9. — Variația forțelor asupra conductoarelor la scurtcircuit trifazat.

Variind raportul $\left(\frac{c}{a}\right)$, s-a obținut $f_{\min}$ pentru $\frac{c}{a} = 0{,}53$, de unde rezultă necesitatea alegerii poziției optime a barelor în interiorul ecranului. În mod analog se calculează forțele în cazul scurtcircuitelor bifazate:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2; \qquad \underline{I}_3 = 0,$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_3; \qquad \underline{I}_1 = 0,$$

obținîndu-se valori identice (orientări diferite) și configurația sistemului fiind perfect simetrică.

b) *Scurtcircuit trifazat.* S-au calculat și în acest caz forțele instantanee și s-a studiat variația lor în timp (diagrama din figura 9 *a*, *b*, *c* și tabela 3). Utilizînd valorile instantanee ale potențialului vector și ale cîmpului, s-au obținut

$$\bar{f}_{1s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\{\bar{u}_\theta\, 0{,}091 \sin 2\,\omega t - \bar{u}_r\,[0{,}3125 - 0{,}3125 \cos 2\,\omega t]\}, \tag{38}$$

$$\bar{f}_{2s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\{\bar{u}_\theta\,[0{,}079 \cos 2\,\omega t - 0{,}0456 \sin 2\,\omega t] -$$

$$- \bar{u}_r\,[0{,}3125 + 0{,}1563 \cos 2\,\omega t + 0{,}271 \sin 2\,\omega t]\}, \tag{39}$$

$$\bar{f}_{3s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\{\bar{u}_\theta\,[-0{,}079 \cos 2\,\omega t - 0{,}0447 \sin 2\,\omega t] -$$

$$- \bar{u}_r[0{,}3125 + 0{,}156 \cos 2\,\omega t - 0{,}271 \sin 2\,\omega t]\}, \tag{40}$$

iar în cazul barelor neecranate, situate la aceeași distanță

$$f_{1s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\{-0{,}395\}\,[1 - \cos 2\,\omega t], \tag{41}$$

$$f_{2s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\{-0{,}197\}\,[2 + \cos 2\,\omega t + \sqrt{3} \sin 2\,\omega t], \tag{42}$$

$$f_{3s} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}(-0{,}197)\,[2 + \cos 2\,\omega t - \sqrt{3} \sin 2\,\omega t]. \tag{43}$$

Se observă că în acest caz forțele conductoarelor au atît modulele, cît și orientarea variabile în timp, toate avînd însă valorile maxime egale și orientate în direcție radială.

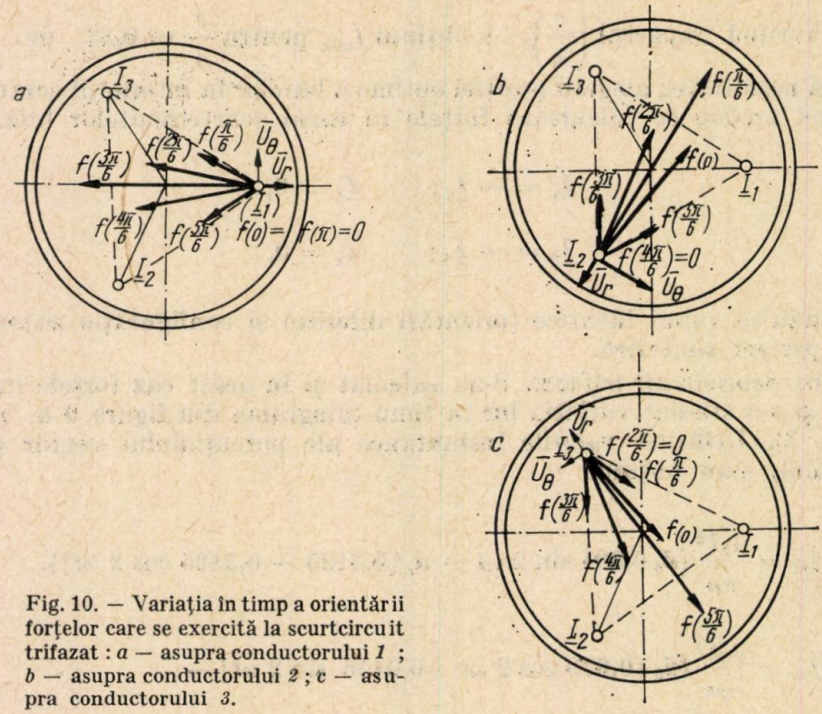


Fig. 10. — Variația în timp a orientării forțelor care se exercită la scurtcircuit trifazat : *a* — asupra conductorului *1* ; *b* — asupra conductorului *2* ; *c* — asupra conductorului *3*.

4. CALCULUL FORȚELOR ASUPRA ECRANULUI

Acesta s-a făcut aplicînd principiul egalității acțiunii și reacțiuni și ținînd seama că ecranul, împreună cu conductoarele, formează în regim cvasistaționar un sistem mecanic izolat. Utilizînd metoda tensiunilor maxwelliene [1], se obțin următoarele :

4.1. Așezarea conductoarelor în același plan

— *scurtcircuit bifazat* : $\underline{I}_1 = -\underline{I}_3$; $\underline{I}_2 = 0$:

$$F_{x_{(1)}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J_s^2}{2} \cos\theta \cdot \mathrm{ad}\,\theta = 0, \tag{44}$$

unde

$$\underline{J}_s = \frac{\underline{I}_1}{\pi a} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n [(-1)^n - 1] \cos n\theta\,; \tag{45}$$

— *Scurtcircuit bifazat* : $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$:

$$F_{x_{(2)}} = F_{x_{(1)}}\,, \tag{46}$$

unde

$$\underline{J}_s = -\frac{\underline{I}_1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \cos n\theta. \tag{47}$$

Efectuînd calculele prin reținerea în sumă a primilor cinci termeni, s-au obținut valorile din figurile 4 și 6. Au rezultat aceleași valori, utilizînd metoda imaginilor pentru calculul forței asupra fiecărui conductor, iar

$$f_{ecr} = -f_{rez}. \qquad (48)$$

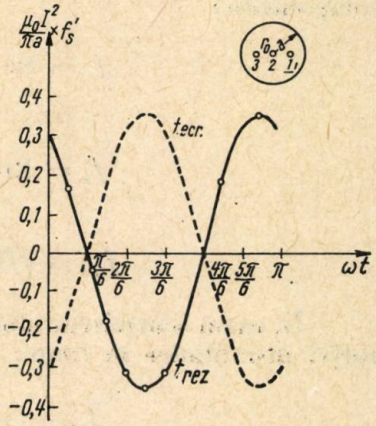


Fig. 11. — Variația forței asupra ecranului la scurtcircuit trifazat.

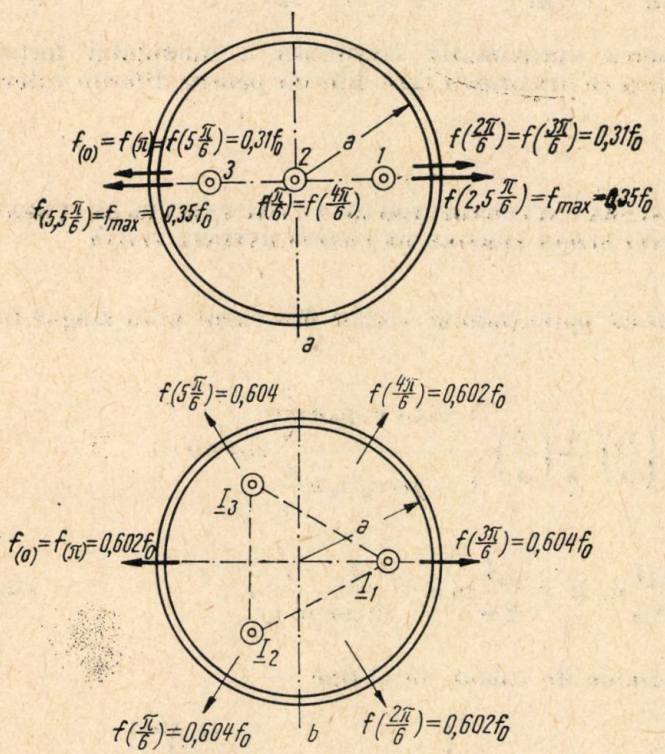


Fig. 12. — Forțele asupra ecranului la scurtcircuit trifazat.

În cazul scurtcircuitului trifazat rezultă, evident, $f_{med} = 0$, iar variația lui f_{ecr} în timp rezultă din diagrama din figura 11 și din tabela 2. Forța asupra ecranului variază sinusoidal cu frecvența dublă, avînd valoarea maximă $f_{max} = 0{,}358\ f_0$, mai mare ca în cazul scurtcircuitului bifazat (fig. 12*a*)

4.2. Așezarea conductoarelor în triunghi echilateral

S-au obținut în mod analog rezultatele indicate în figura 8 pentru diferite cazuri de scurtcircuit posibile. În acest caz, forța va avea două componente :

$$f_x = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_0 a}{2}\int_0^{2\pi} J_s^2 \cos\theta \, \mathrm{d}\theta\right\}, \tag{49}$$

$$f_y = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_0 a}{2}\int_0^{2\pi} J_s^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta\right\}, \tag{50}$$

$$f_{\mathrm{rez}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \tag{51}$$

În cazul scurtcircuitului trifazat, unde $f_{\mathrm{med}} = 0$, s-a studiat variația forței instantanee în timp :

$$\bar{f}_{\mathrm{ecr}} = -\bar{f}_{\mathrm{rez}} = -(\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3), \tag{52}$$

constatîndu-se menținerea aproximativ constantă a modulului forței asupra ecranului, în timp ce orientarea este diferită pentru diferite valori ale lui ωt (fig. 12*b*).

5. FORȚA EXERCITATĂ ASUPRA UNUI CONDUCTOR RECTILINIU PARCURS DE CURENT ÎN PREZENȚA UNUI ECRAN SUBȚIRE DE CONDUCTIVITATE FINITĂ

Considerînd expresia potențialului vector din cazul unui singur fir cu σ_s finit

$$\underline{A} = \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi}\sum_0^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1 - \mathrm{j}\omega\,\sigma_s\,\mu_0\,a\dfrac{1}{n}}{1 + j\omega\,\sigma_s\,\mu_0\,a\dfrac{1}{n}}\cos n\theta -$$

$$-\frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi}\ln R + \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi}\ln a + \frac{\underline{I}}{2\pi a}\frac{1}{j\omega\sigma_s}, \tag{53}$$

și aplicînd aceleași formule de calcul, se obține

$$f_{\mathrm{med}} = \mathrm{Re}\{\underline{I}^* \,\mathrm{grad}\,(\underline{A} - \underline{A}_f)\} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r_0}\left\{\sum_0^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{2n} - 2\sum_0^{\infty}\frac{\left(\dfrac{r_0}{a}\right)^{2n}}{\dfrac{n^2}{k^2}+1}\right\}. \tag{54}$$

Reținînd primii opt termeni în sumă, se obține

$$f_{med} = 0{,}3326 \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}, \tag{55}$$

unde $k = \omega \sigma_s \mu_0 a$, față de

$$f'_{med} = 0{,}33 \frac{\mu_0 I^2}{\pi a}, \tag{56}$$

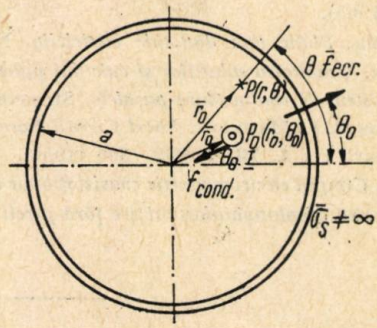


Fig. 13. – Forța dintre fir și ecran în cazul $\sigma_s \neq \infty$.

care a rezultat dintr-o valoare aproximativă (fig. 13) și în cazul considerării $\sigma_s = \infty$.

6. CONCLUZII

În lucrare s-au calculat forțele electrodinamice medii și maxime exercitate asupra barelor și ecranului în cazul unui sistem trifazat de bare parcurse de curent aflate în prezența unui ecran electromagnetic subțire perfect conductor, așezarea conductoarelor fiind în același plan și în triunghi echilateral. Așezarea în triunghi a rezultat mai avantajoasă (forțe mai mici) în special în cazul scurtcircuitelor bifazate (tabela 1).

Comparînd rezultatele obținute pentru toate cazurile de scurtcircuit ale barelor situate în ecran cu rezultatele obținute în cazul barelor neecranate, conductoarele fiind situate la aceeași distanță ca în primul caz, rezultă net avantajul folosirii barelor ecranate, obținîndu-se o micșorare considerabilă a forțelor. În ceea ce privește forțele care acționează asupra ecranului, ele variază în timp la scurtcircuit trifazat, atît ca modul, cît și ca orientare, așa cum rezultă din tabelele (2) și (3) și din diagrama din figura 11, valorile lor maxime depășind cu aproximativ 74 % $f_{ec.\ max}$ la scurtcircuite bifazate, ceea ce justifică necesitatea studierii variației lor în timp în cazul acestor scurtcircuite.

Influența considerării conductivității finite a ecranului este neglijabilă, așa cum rezultă din calculele efectuate pentru un singur fir, eroarea fiind de 0,12 %.

În concluzie, calculul forțelor electrodinamice, considerînd ecranul subțire și perfect conductor, este justificat, iar conductoarele pot fi plasate fie în același plan, fie în triunghi, nici una din cele două soluții neprezentînd avantaje deosebite din acest punct de vedere.

BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULEȚ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I—III, București, 1954.
2. A. ȚUGULEA, *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al conductoarelor rectilinii parcurse de curenți alternativi în prezența ecranelor electromagnetice cilindrice*, St. cerc. energ. electr., **XVI**, *6*, 807—837 (1964).
3. — *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al conductoarelor rectilinii trifazate în prezența ecranelor electromagnetice cilindrice subțiri*, St. cerc. energ., **XV**, *4*, 549—560 (1965).
4. W.R. SMYTHE, *Static and dynamic electricity*, New York—Toronto—Londra, 1950.
5. AL. TIMOTIN, *Unicitatea soluțiilor și calculul puterii în cîmpul magnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare paralele*, St. cerc. energ., **XVII**, *1*, 143—156 (1964).
6. W.R. WILSON, L.L. MANKOFF, *Short Circuit Forces in isolated phase busses*, Trans. A.I.E.E., part III A, **73**, *4*, 382—396 (1954).
7. C. IONESCU, *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al unui sistem trifazat de bare situate într-un ecran dreptunghiular subțire fără pereți despărțitori* (Tom. 18 nr. 3, 1969).

UNICITATEA SOLUȚIILOR ȘI CALCULUL PUTERILOR ÎN CÎMPUL ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR AL SISTEMELOR AXIAL-SIMETRICE

DE

AL. TIMOTIN și I.R. CIRIC

538.311 :621.3.013

În regim tranzitoriu, cîmpul magnetic cvasistaționar cu simetrie axială și tensiunile la borne corespunzătoare unui sistem de conductoare nefiliforme coaxiale, cu proprietăți de material liniare, sînt univoc determinate de variația în timp a curenților din conductoare și de repartiția inițială a acestor curenți pe secțiunile axiale ale conductoarelor.

Lucrarea prezintă și cazul regimului permanent sinusoidal, precum și expresii pentru calculul puterilor instantanee, activă și reactivă, primite de către sistemul considerat, în care apar curenții și valorile medii ale potențialului magnetic vector pe secțiunile axiale ale conductoarelor.

1. INTRODUCERE

În anumite probleme de curenți turbionari, de ecranare electromagnetică, de efect pelicular, de levitație electromagnetică etc. este necesar să se determine cîmpul electromagnetic cvasistaționar [1] al unui sistem de n conductoare masive avînd simetrie de rotație în raport cu o axă comună și fiind parcurse de curenții $i_k(t)$ (cu $k = 1, 2, ..., n$). Suprafețele celor n conductoare se obțin prin rotația în jurul aceleiași axe a unor contururi conținute în plane trecînd prin această axă, unele dintre conductoarele considerate putînd fi extinse pînă la infinit.

Aducerea din exterior a curentului electric la conductoarele *active* ale sistemului se face prin două secțiuni transversale echipotențiale și suficient de apropiate ale fiecărui conductor, astfel încît să se poată considera că liniile cîmpului magnetic corespunzător sînt conținute numai în planele axiale (care trec prin axa de simetrie a sistemului) și că spectrul cîmpului magnetic este același în oricare dintre aceste plane. Vom numi cîmpul magnetic care se bucură de aceste proprietăți *cîmp magnetic cu simetrie axială*.

O parte dintre conductoarele sistemului, numite *pasive*, pot să fie complet izolate, nealimentate din exterior. Astfel de conductoare izolate vor fi parcurse numai de către curenţii induşi de cîmpul magnetic variabil în timp al sistemului. Conductoarele extinse pînă la infinit (de exemplu conductorul n din figura 1) sînt conductoare pasive, fiind parcurse numai de către curenţi induşi.

Pentru integrarea corectă a ecuaţiilor cîmpului electromagnetic cvasistaţionar ataşat sistemului de conductoare considerat, ca şi pentru formularea corectă a teoremei superpoziţiei soluţiilor, interesează condiţiile care asigură determinarea unică a soluţiilor. Deoarece conductoarele nu sînt filiforme (curentul lor nu e repartizat uniform pe secţiune), această problemă nu este banală. Teoremele de unicitate cunoscute pentru cîmpul electromagnetic general-variabil [2], [3] impun cunoaşterea variaţiei în timp a componentei tangenţiale a cîmpului magnetic (sau electric) în fiecare punct al unei suprafeţe închise care conţine sistemul de corpuri considerat, cum şi cunoaşterea repartiţiei iniţiale a cîmpurilor magnetic şi electric în întreg domeniul interior suprafeţei. Aceste condiţii sînt însă supraabundente în aproximaţia regimului cvasistaţionar (în care se neglijează curentul de deplasare din punctul de vedere al producerii cîmpului magnetic) şi pentru cîmpuri cu simetrie axială.

În lucrarea de faţă se demonstrează teoremele de unicitate necesare în studiul cîmpului în cazul arătat şi se stabilesc noi expresii de calcul pentru puterile instantanee, respectiv activă şi reactivă, primite de către sistem în regim tranzitoriu, respectiv în regim permanent sinusoidal. Se va considera că sistemul este constituit din materiale liniare şi izotrope din punctele de vedere electric şi magnetic şi că sistemul are structură cu simetrie de rotaţie.

2. PROPRIETĂŢILE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAŢIONAR AL SISTEMULUI DE CONDUCTOARE

Fie Oz axa de simetrie a sistemului de conductoare (fig. 1), poziţia unui punct curent fiind determinată prin coordonatele cilindrice (r, φ, z). Configuraţia şi structura sistemului sînt prin ipoteză independente de φ. Semiplanele $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi - \varepsilon$ $(\varepsilon \to 0)$ delimitează sistemul în sensul de creştere al coordonatei φ şi definesc o tăietură în care are loc alimentarea cu curent a conductoarelor active.

Ecuaţiile cîmpului magnetic cvasistaţionar în medii liniare cu permeabilitatea μ şi conductivitatea σ au forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \qquad (\text{în dielectric } \sigma = 0), \tag{4}$$

în care $\boldsymbol{E}$ şi $\boldsymbol{H}$ sînt intensităţile cîmpului electric şi, respectiv, magnetic, iar $\boldsymbol{J}$ e densitatea curentului electric de conducţie. Pe suprafeţele conduc-

toarelor, care sînt suprafețe de discontinuitate ale cîmpului, sînt valabile condițiile de trecere

$$\boldsymbol{u}_\nu \times (\boldsymbol{H}_{ex} - \boldsymbol{H}_{in}) = \boldsymbol{J}_S, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu [(\mu \boldsymbol{H})_{ex} - (\mu \boldsymbol{H})_{in}] = 0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu \times (\boldsymbol{E}_{ex} - \boldsymbol{E}_{in}) = 0, \tag{7}$$

în care $\boldsymbol{u}_\nu$ este versorul normalei exterioare pe suprafețele conductoarelor (fig. 1), indicii *ex* și *in* se referă la valorile din exteriorul și interiorul conductoarelor, iar $\boldsymbol{J}_s$ este densitatea pînzei de curent eventual existente la supra-

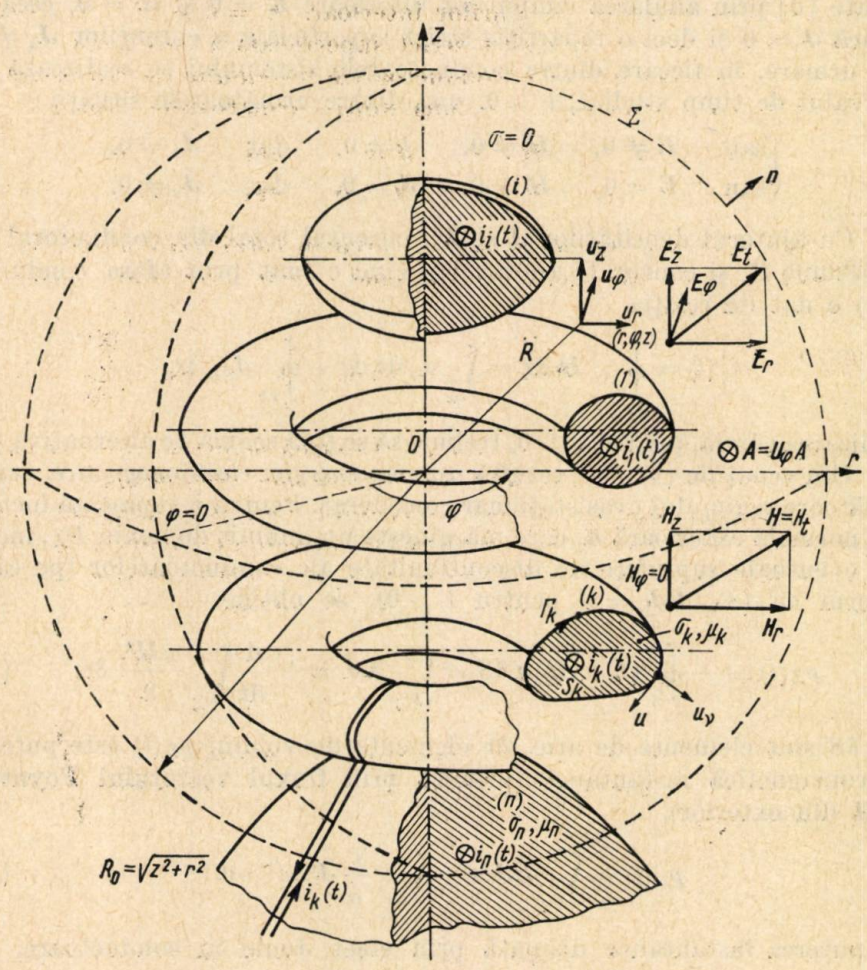


Fig. 1. — Sistem de conductoare cu simetrie axială.

fața conductoarelor. Relația (5) exprimă saltul componentelor tangențiale ale intensității cîmpului magnetic, iar relațiile (6) și (7) conservarea componentelor normale ale inducției magnetice, respectiv conservarea componentelor tangențiale ale intensității cîmpului electric.

Pentru conductoarele *reale*, cu pierderi şi cu conductivitate finită, existenţa unei pînze de curent superficiale e incompatibilă cu legea conducţiei electrice (4), deoarece presupune valori infinit de mari pentru densitatea de curent şi pentru cîmpul electric, respectiv pentru tensiunile aplicate conductoarelor. În anumite probleme [4], [5] este însă convenabil să se idealizeze proprietăţile unora dintre conductoarele sistemului, considerîndu-le *perfecte*, adică fără pierderi Joule $\left(\frac{1}{\sigma} J^2 = \sigma E^2\right)$, ceea ce implică o conductivitate infinit de mare. Aceste conductoare perfecte pot fi caracterizate [6] prin anularea cîmpurilor interioare $\boldsymbol{E} = 0$ şi $\boldsymbol{H} = 0$, ceea ce implică $\boldsymbol{J} = 0$ şi deci o repartiţie strict superficială a curenţilor $\boldsymbol{J}_s \neq 0$ Prin urmare, în fiecare dintre conductoarele sistemului se realizează în. intervalul de timp studiat, $t > 0$, una dintre următoarele situaţii :

$$\begin{cases} \text{sau} & \boldsymbol{E} \neq 0, \quad \boldsymbol{H} \neq 0, \quad \boldsymbol{J} \neq 0, \quad \text{dar} \quad \boldsymbol{J}_s = 0, \\ \text{sau} & \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{J} = 0, \quad \text{dar} \quad \boldsymbol{J}_s \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Cu ajutorul densităţilor $\boldsymbol{J}$ şi $\boldsymbol{J}_s$, curentul total din conductorul (k) de secţiune S_k şi contur Γ_k (notat $\Gamma_{k_{ex}}$ cînd e luat prin afara conductorului) e dat de relaţia

$$i_k(t) = \oint_{\Gamma_{k_{ex}}} \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{S_k} J_\varphi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r + \oint_{\Gamma_k} J_{s_\varphi} \, \delta s, \tag{9}$$

a utilizarea căreia, pentru $t > 0$, trebuie să se ţină seama de alternativa (8)

Din ecuaţiile (1)—(7) rezultă *teorema energiei electromagnetice*, corespunzătoare regimului cvasistaţionar considerat. Pentru o suprafaţă închisă Σ de normală exterioară $\boldsymbol{n}$, care mărgineşte un anumit domeniu D_Σ, incluzînd eventuale suprafeţe de discontinuitate ale conductoarelor (pe care, conform cu (8), $\boldsymbol{E}\boldsymbol{J}_s = 0$ pentru $t > 0$), se obţine

$$p_\Sigma(t) \equiv -\oint_\Sigma (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\boldsymbol{n}\, \delta S = \int_{D_\Sigma} \boldsymbol{E}\boldsymbol{J}\, \delta v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{D_\Sigma} \frac{\mu \boldsymbol{H}^2}{2}\, \delta v. \tag{10}$$

Aici δS sînt elemente de arie, δv elemente de volum, $p_\Sigma(t)$ este puterea electromagnetică instantanee (primită prin fluxul vectorului Poynting $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ din exterior),

$$p_J(t) = \int_{D_\Sigma} \boldsymbol{E}\boldsymbol{J} \delta v = \int_{D_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J}^2 \delta v \geqslant 0 \tag{11}$$

este puterea instantanee disipată prin efect Joule în conductoare, iar

$$W_m(t) = \int_{D_\Sigma} \frac{\mu \boldsymbol{H}^2}{2}\, \delta v \geqslant 0 \tag{12}$$

este energia magnetică localizată în domeniul D_Σ (în aproximaţia regimului cvasistaţionar, energia electrică nu participă la bilanţul puterilor).

Legile (2) și (3) permit introducerea potențialelor electrodinamice prin relațiile

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{14}$$

unde $\boldsymbol{A}$ este un *potențial magnetic vector*, definit pînă la gradientul unei funcții arbitrare, iar V *potențialul electric scalar*, definit pînă la derivata în raport cu timpul a aceleiași funcții.

Cîmpul magnetic cu simetrie axială $\left(H_\varphi \equiv 0, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \varphi} \equiv 0\right)$ se poate scrie sub forma

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{u}_z H_z(z, r, t) + \boldsymbol{u}_r H_r(z, r, t). \tag{15}$$

Fără a particulariza acest cîmp magnetic, se poate alege un potențial vector strict tangențial ($A_z = 0$, $A_r = 0$), independent de coordonata $\varphi \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varphi} = 0\right)$ și deci solenoidal:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_\varphi A(z, r, t), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0. \tag{16}$$

Relația (13) se poate scrie deci sub forma

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \operatorname{grad}(rA) \times \boldsymbol{u}_\varphi \begin{cases} H_z = \dfrac{1}{\mu} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (rA)}{\partial r}, \\ H_r = -\dfrac{1}{\mu} \dfrac{\partial A}{\partial z}, \end{cases} \tag{17}$$

care asigură verificarea legii (3) fără să introducă vreo restricție asupra cîmpului (15). Relațiile (17) definesc produsul (rA) pînă la o constantă aditivă, adică definesc potențialul vector pînă la această constantă aditivă amplificată cu $\frac{1}{r}$.

Impunînd condiția ca cîmpul magnetic să fie finit pe axa de simetrie Oz,

$$\lim_{r \to 0} |\boldsymbol{H}| < \infty, \tag{18}$$

constanta aditivă trebuie luată egală cu zero. Din relațiile (17) rezultă că A este constant în lungul axei Oz ($H_r = 0$ în punctele acestei axe) și, mai mult, că A este nul în lungul axei Oz:

$$A|_{r=0} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_0^r (\mu H_z) r \mathrm{d}r = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{2} |\boldsymbol{H}| r = 0. \tag{19}$$

Prin urmare, relaţiile (17), cu condiţia (18), definesc univoc potenţialul vector, potenţialul electric scalar (14) fiind acum definit pînă la o constantă aditivă.

Din relaţiile (15) şi (17) cu (1) şi (5)—(6) rezultă că densităţile de curent sînt strict tangenţiale şi independente de coordonata φ:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{u}_\varphi J(z, r, t), \qquad \boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{u}_\varphi J_s(z, r, t), \tag{20}$$

şi că densitatea J este legată de potenţialul vector prin relaţia

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right] = -J. \tag{21}$$

În regiunile omogene din interiorul conductoarelor, relaţia (21) reprezintă proiecţia ecuaţiei lui Poisson vectoriale $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$ după versorul $\boldsymbol{u}_\varphi$:

$$[\Delta(\boldsymbol{u}_\varphi A)]_\varphi = -\mu J. \tag{22}$$

În *interiorul conductoarelor*, $k = 1, 2, \ldots, n$, din (4) şi (20) rezultă pentru cîmpul electric doar componentă tangenţială independentă de φ

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{u}_\varphi E_\varphi(z, r, t) \quad \text{în} \quad (k), \tag{23}$$

iar cu (14) şi (16) se obţine

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial t} = E_\varphi(z, r, t) = \frac{1}{\sigma} J(z, r, t), && (24)\\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0, && (25) \end{aligned}\right\} \text{în } (k).$$

Din relaţiile (25) rezultă că în interiorul conductoarelor potenţialul electric scalar poate depinde numai de coordonata φ, adică este constant pe secţiunile lor axiale ($\varphi = \text{const}$). Deoarece însă E_φ şi A sînt independente de φ, din (24) rezultă că potenţialul electric scalar depinde liniar de unghiul φ în interiorul conductoarelor:

$$V_k(\varphi, t) = V_k(0, t) + \frac{\varphi}{2\pi}[V_k(2\pi, t) - V_k(0, t)], \quad \text{în } (k). \tag{26}$$

În particular, în conductoarele pasive (nealimentate din exterior), potenţialul electric scalar rezultă constant, deoarece pentru aceste conductoare $V_k(2\pi, t) = V_k(0, t)$; deci conductoarele pasive sînt echipotenţiale.

În dielectric (prin ipoteză perfect izolant şi neîncărcat), potenţialul electric scalar are structura electrostatică corespunzătoare ecuaţiei

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = 0, \tag{27}$$

iar cu (14) și (16) rezultă caracterul electrostatic al componentei cîmpului electric conținută în planele axiale Ozr:

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E} - \mathbf{E}_\varphi = -\operatorname{grad}_{zr} V. \tag{28}$$

În cele ce urmează se consideră întregul cîmp electromagnetic atașat sistemului de conductoare, iar suprafața închisă Σ se alege ca fiind constituită din semiplanele $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, care mărginesc tăietura de alimentare și porțiunea delimitată de aceste semiplane pe sfera $z^2+r^2 = R_0^2 \to \infty$.

Se admit condițiile la infinit

$$\lim_{\sqrt{z^2+r^2}\to\infty} [(z^2+r^2)|\boldsymbol{H}|] < \infty, \quad \lim_{\sqrt{z^2+r^2}\to\infty} [(z^2+r^2)|\boldsymbol{E}|] < \infty, \tag{29}$$

prin care se exclude existența unor cîmpuri exterioare suprapuse cîmpului sistemului de conductoare.

Din relațiile (17) rezultă că în lungul unei linii de cîmp magnetic, produsul (rA) este constant. Pentru linia de cîmp care ocupă axa de simetrie Oz și care se închide pe la infinit avem $rA = 0$, ceea ce corespunde cu anularea lui A și la infinit.

Dacă se alege de asemenea la infinit și originea lui V, din (17) și (28), cu (29), rezultă

$$\lim_{\sqrt{z^2+r^2}\to\infty} (\sqrt{z^2+r^2}.A) < \infty, \quad \lim_{\sqrt{z^2+r^2}\to\infty} (\sqrt{z^2+r^2}.V) < \infty. \tag{30}$$

În aceste condiții, *ambele potențiale sînt definite univoc* ca funcți continue de punct ce se anulează la infinit. Din relațiile (17) și (14), cu (30), rezultă expresiile

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(z, r, t) &= \frac{1}{r}\int_\infty^{(z,r)} \mu r\, \boldsymbol{H} \times \delta\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{u}_\varphi}{r}\int_\infty^{(z,r)} \mu r\, (\boldsymbol{H}\boldsymbol{\nu})\, \delta s, \\ V(z, r, \varphi, t) &= -\int_\infty^{(z,r)} \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \boldsymbol{u}\, \delta s = -\int_\infty^{(z,r)} \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{u}\, \delta s, \end{aligned} \tag{31}$$

în care integrările se efectuează în lungul unei curbe arbitrare situate într-un plan $\varphi = \text{const}$, de la infinit pînă la un punct curent (z, r), $\delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}\,\delta s$ fiind elementul de arc al curbei, iar $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}_\varphi$ un versor normal.

Cunoscînd cîmpul magnetic $\boldsymbol{H}$ (cu simetrie axială) și cîmpul electric transversal $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{u}_\varphi E_\varphi$, se pot calcula potențialele $\boldsymbol{A}$ și V. Componenta $E_\varphi = \boldsymbol{E}\boldsymbol{u}_\varphi$ a cîmpului electric e calculabilă ulterior cu relația

$$E_\varphi(z, r, t) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{32}$$

atît în dielectric, cît și în conductoare; în acestea din urmă

$$J(z, r, t) = \sigma E_\varphi(z, r, t), \tag{33}$$

iar $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ e independent de φ(relația (26)).

3. UNICITATEA SOLUŢIILOR ÎN REGIM TRANZITORIU. CALCULUL PUTERII INSTANTANEE

Cu (14), (29) şi (30), fluxul vectorului Poynting din (10) se scrie sub forma

$$p_\Sigma(t) \equiv -\oint_\Sigma (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\boldsymbol{n}\,\delta S = \oint_\Sigma (\operatorname{grad} V\times\boldsymbol{H})\boldsymbol{n}\,\delta S,$$

deoarece integrala produsului $\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\times\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{n}$ se anulează pe sfera $z^2+r^2 = R_0^2 \to \infty$ şi se compensează pe semiplanele $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ (acest produs fiind independent de φ). Utilizînd identitatea rot $(V\boldsymbol{H}) = \operatorname{grad} V \times \boldsymbol{H} + V\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$ şi relaţiile (1), (5), (6) şi (26), se obţine următoarea expresie a puterii instantanee (independentă de caracterul volumic sau superficial al repartiţiei curenţilor din conductoare) :

$$p_\Sigma(t) = \sum_{k=1}^{n} [V_k(0,t) - V_k(2\pi,t)]i_k(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,i_k(t), \tag{34}$$

în care $u_k(t)$ sînt tensiunile la bornele conductoarelor active :

$$u_k(t) = V_k(0,t) - V_k(2\pi,t) \tag{35}$$

(care *nu* sînt egale cu căderile de tensiune din lungul acestor conductoare datorită componentelor induse $\frac{\partial A}{\partial t}$ ale cîmpului electric). Se observă că la suma din expresia (34) nu contribuie conductoarele nealimentate din exterior (conductoarele pasive), pentru care $u_k(t) = 0$. Dacă conductorul al n-lea, de exemplu, se extinde pînă la infinit (cum se arată în figura 1), condiţia (30) impune $V_n = V_\infty = 0$.

Ţinînd seama de simetria axială a cîmpului magnetic, cu (1), (13) şi (5) se obţine pentru energia magnetică (12) următoarea expresie :

$$W_m(t) = \pi \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{S_k} rAJ\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r + \oint_{\Gamma_k} rAJ_s\,\delta s\right]. \tag{36}$$

Cu (34), (11) şi (12), teorema energiei electromagnetice (10) se scrie

$$p_\Sigma(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,i_k(t) = p_J(t) + \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}. \tag{37}$$

Teorema de unicitate a soluţiilor. Demonstraţia teoremei se face în două etape. Într-o primă etapă se observă că, dacă

$$i_k(t) = 0, \quad J(z,r,0) = 0, \quad J_s(z,r,0) = 0, \tag{38}$$

cîmpul magnetic rezultă identic nul :

$$H(z,\ r,\ t) \equiv 0. \tag{39}$$

Într-adevăr cu (38) se anulează identic puterea $p_\Sigma(t) = 0$ din (37) şi se anulează valoarea iniţială $W_m(0) = \lim_{t\to 0} W_m(t) = 0$ a energiei magnetice

(36). Cum $p_J \geqslant 0$, din (37) rezultă atunci $\frac{dW_m}{dt} = -p_J(t) \leqslant 0$. Energia magnetică ar fi deci o funcție necrescătoare, care este nulă în momentul inițial. Dar energia magnetică (12) e pozitivă sau nulă. Prin urmare, $W_m(t) \equiv 0$ și cu (12) rezultă că această funcțională, pozitiv definită de $\mathbf{H}(z, r, t)$, poate fi mereu nulă numai dacă cîmpul magnetic este identic nul (adică (39)).

În a doua etapă se demonstrează că intensitatea cîmpului magnetic e univoc determinată în fiecare punct din spațiu și în fiecare moment $t > 0$ de funcțiile de timp reprezentate de curenții cu care se alimentează din exterior conductoarele și de valorile inițiale ale densităților de curent în conductoare :

$$i_k = i_k(t) \text{ (pentru conductoarele } (k) \text{ alimentate din exterior)} \quad (40)$$

$$J(z, r, 0) = \psi(z, r), \; J_s(z, r, 0) = \psi_s(z, r). \quad (41)$$

Într-adevăr, dacă ar exista două soluții distincte, $\boldsymbol{H}^{(1)}(z, r, t)$ și $\boldsymbol{H}^{(2)}(z, r, t)$ care ar satisface condițiile (40) și (41), datorită liniarității relațiilor (8), (1) și (5)—(6), diferența lor,

$$\boldsymbol{H}(z, r, t) = \boldsymbol{H}^{(1)}(z, r, t) - \mathbf{H}^{(2)}(z, r, t), \quad (42)$$

ar satisface condițiile „identic nule" (38) și ar fi identic nulă (relația (39)), adică

$$\boldsymbol{H}^{(1)}(z, r, t) \equiv \boldsymbol{H}^{(2)}(z, r, t). \quad (43)$$

Cu (31), potențialul magnetic vector $A(z, r, t)$ este univoc determinat de cîmpul magnetic ; prin relațiile (1) și (5), densitățile de curent sînt de asemenea univoc determinate de cîmpul magnetic ; cu relațiile (26), (31), (32) și (33), cîmpul electric din interiorul conductoarelor și tensiunile la borne (35) sînt și ele univoc determinate :

$$u_k(t) = V_k(0, t) - V_k(2\pi, t) = -2\pi \frac{\partial V_k(\varphi, t)}{\partial \varphi} = \frac{2\pi r}{\sigma_k} J(z, r, t) + \\ + 2\pi r \frac{\partial A(z, r, t)}{\partial t}. \quad (44)$$

Se poate deci enunța următoarea *teoremă de unicitate* :

Cîmpul magnetic cu simetrie axială, potențialul magnetic vector, repartiția de curent și tensiunile la borne ale unui sistem de conductoare coaxiale cu proprietăți de material liniare sînt univoc determinate în regim cvasistaționar pentru $t > 0$, de funcțiile de timp $i_k(t)$ din conductoarele active și de repartiția inițială (41) a curenților (dacă sînt valabile condițiile la infinit (30)).

Relațiile (27) și (30) arată că în dielectric intensitatea cîmpului electric (care nu prezintă simetrie de rotație) are o structură electrostatică univoc determinată (în baza teoremei de unicitate a cîmpurilor electrostatice) în fiecare moment de repartițiile $V_k(\varphi, t)$ ale potențialelor pe suprafețele conductoarelor.

Din (44) şi (26) rezultă însă că aceste potenţiale sînt univoc determinate de structura instantanee a cîmpului magnetic şi de valorile $V_k(0, t)$ pentru $\varphi = 0$.

Dacă se consideră, prin urmare, alături de condiţiile (30), (40) şi (41), care determină univoc cîmpul magnetic, şi condiţiile (independente)

$$V_k(0, t) = \chi_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{45}$$

care impun valorile potenţialelor conductoarelor la „bornele" de intrare ale conductoarelor active sau potenţialele (constante) ale conductoarelor pasive, potenţialul $V(z, r, \varphi, t)$ este şi el univoc determinat şi o dată cu el şi cîmpul electric $\boldsymbol{E}$ din dielectric (calculabil cu (28) şi (32)).

Împărţind expresiile (44) cu $\frac{2\pi r}{\sigma_k}$ şi integrîndu-le apoi pe secţiunile axiale ale conductoarelor alimentate din exterior presupuse omogene, se obţin pentru tensiunile la borne expresiile

$$u_k(t) = r_k^0 i_k(t) + r_k^0 \sigma_k S_k \frac{\partial \widetilde{A}_k}{\partial t}, \tag{46}$$

în care

$$\widetilde{A}_k(t) = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} A(z, r, t)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r \tag{47}$$

sînt valorile medii ale potenţialului vector pe secţiunile axiale ale conductoarelor, iar

$$r_k^0 = 1 \Big/ \int_{S_k} \sigma_k \frac{\mathrm{d}z\, \mathrm{d}r}{2\pi r} \tag{48}$$

rezistenţele de curent continuu ale conductoarelor.

Puterea instantanee primită (34) se exprimă sub forma

$$\boxed{p_\Sigma(t) = -\oint_\Sigma (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, \boldsymbol{n}\delta S = \sum_{k=1}^{n} r_k^0 i_k^2(t) + \sum_{k=1}^{n} (r_k^0 \sigma_k S_k) i_k(t) \frac{\partial \widetilde{A}_k(t)}{\partial t},} \tag{49}$$

în care îşi aduc contribuţia *numai* conductoarele active (alimentate din exterior), termenii din cele două sume corespunzători fiecărui conductor pasiv (pentru care $u_k(t) = 0$) fiind egali şi de semne contrarii în acord cu relaţia (46).

Primul termen din membrul drept al expresiei (49) reprezintă puterea instantanee disipată în conductoare pentru o repartiţie de curent continuu a curenţilor pe secţiunile conductoarelor. Comparînd expresiile (10) şi (49), rezultă că al doilea termen cuprinde puterea disipată suplimentară (corespunzătoare efectului pelicular) în conductoarele active, puterea disipată de curenţii turbionari induşi în conductoarele pasive şi viteza de variaţie a energiei magnetice.

4. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ȘI UNICITATEA SOLUȚIILOR ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Ecuațiile (1)—(4) ale cîmpului se pot scrie sub forma

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}, \tag{50}$$

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{E}} = -j\,\omega\mu\,\underline{\boldsymbol{H}}, \quad (j \equiv \sqrt{-1}), \tag{51}$$

$$\operatorname{div}(\mu \underline{\boldsymbol{H}}) = 0, \tag{52}$$

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \sigma \underline{\boldsymbol{E}}, \tag{53}$$

cu condițiile de trecere corespunzătoare relațiilor (5)—(7), în care s-a folosit reprezentarea în complex a vectorilor cîmp în regim permanent sinusoidal de pulsație ω [1]:

$$\boldsymbol{H}(z, r, t) = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\, e^{j\omega t} \underline{\boldsymbol{H}}(z, r)\}; \quad \boldsymbol{E}(z, r, \varphi, t) = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\, e^{j\omega t} \underline{\boldsymbol{E}}(z, r, \varphi)\}. \tag{54}$$

Forma în complex a teoremei energiei electromagnetice este [6]

$$\underline{S}_\Sigma = -\oint_\Sigma (\underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}^*)\, \boldsymbol{n}\, \delta S = \int_{D_\Sigma} \underline{\boldsymbol{E}}\, \underline{\boldsymbol{J}}^*\, \delta v + j2\omega \int_{D_\Sigma} \frac{\mu \underline{\boldsymbol{H}}\, \underline{\boldsymbol{H}}^*}{2}\, \delta v, \tag{55}$$

în care $\underline{S}_\Sigma = P + jQ$ e puterea complexă primită, iar

$$P = \int_{D_\Sigma} \underline{\boldsymbol{E}}\, \underline{\boldsymbol{J}}^*\, \delta v = \int_{D_\Sigma} \frac{1}{\sigma} |\underline{\boldsymbol{J}}|^2 \delta v \geqslant 0 \tag{56}$$

puterea activă disipată de conductoare (asteriscul indică conjugata complexă), iar

$$Q = 2\omega \int_{D_\Sigma} \frac{\mu |\underline{\boldsymbol{H}}|^2}{2}\, \delta v \geqslant 0 \tag{57}$$

puterea reactivă primită de sistemul de conductoare.

Introducînd potențialele electrodinamice complexe $\underline{V}$ și $\underline{A}$ prin relațiile

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \operatorname{grad}(r \underline{A}) \times \boldsymbol{u}_\varphi, \tag{58}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}} = -\operatorname{grad} \underline{V} - j\omega\, \underline{A} \boldsymbol{u}_\varphi, \tag{59}$$

cu condițiile la infinit (analoge cu (30))

$$\lim_{\sqrt{z^2+r^2} \to \infty} (\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \underline{A}) < \infty, \qquad \lim_{\sqrt{z^2+r^2} \to \infty} (\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \underline{V}) < \infty, \tag{60}$$

aceste potențiale sînt univoc definite, iar puterea complexă primită se scrie analog cu (34)

$$\underline{S}_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} [\underline{V}_k(0) - \underline{V}_k(2\pi)]\, \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k \underline{I}_k^*, \tag{61}$$

în care

$$\underline{U}_k = \underline{V}_k(0) - \underline{V}_k(2\pi) = \frac{2\pi r}{\sigma_k}\underline{J}(z, r) + j\omega\, 2\pi r\, \underline{A}(z, r) \qquad (62)$$

sînt reprezentările în complex ale tensiunilor la borne.

Printr-un raţionament analog celui urmărit în cazul regimului tranzitoriu [6] se demonstrează următoarea teoremă de unicitate:

Cîmpul magnetic cu simetrie axială, potenţialul magnetic vector, repartiţia de curent şi tensiunile la borne ale unui sistem de conductoare coaxiale cu proprietăţi de material liniare sînt univoc determinate în regim permanent sinusoidal de valorile curenţilor din conductoarele active (în condiţiile la infinit (60)).

Se observă şi în acest caz că relaţia (59), cu condiţia (60), determină univoc potenţialul electric scalar dacă se dau potenţialele $\underline{V}_k(0)$ ale „bornelor" de intrare ale conductoarelor active.

Presupunînd toate conductoarele ca fiind active (exceptînd conductoarele extinse pînă la infinit), din teorema de mai sus rezultă că intensităţile complexe $\underline{I}_k$ ale curenţilor din aceste conductoare determină univoc tensiunile la borne complexe $\underline{U}_k$ corespunzătoare (relaţiile (62)). Datorită liniarităţii şi omogenităţii ecuaţiilor cîmpului, dependenţa tensiunilor la borne de curenţi rezultă liniară şi omogenă:

$$\underline{U}_k = \underline{V}_k(0) - \underline{V}_k(2\pi) = \sum_{m=1}^{n_c} \underline{Z}_{km}\underline{I}_m \quad (k = 1, 2, \ldots, n_c), \qquad (63)$$

unde n_c este numărul total al conductoarelor sistemului care nu sînt extinse pînă la infinit.

Aceste relaţii definesc impedanţele proprii $\underline{Z}_{kk}$ respectiv mutuale $\underline{Z}_{km}$ ale circuitelor determinate de conductoare (în prezenţa eventuală a conductoarelor extinse pînă la infinit). Cînd unele conductoare sînt pasive, $\underline{U}_k = 0$ pentru ele şi relaţiile (63) permit aflarea curenţilor induşi în aceste conductoare de către curenţii conductoarelor active.

5. EXPRESII DE CALCUL ALE PUTERILOR

Introducînd reprezentările în complex ale valorilor medii ale potenţialului vector pe secţiunile $\varphi = \text{const}$ ale conductoarelor,

$$\underline{\tilde{A}}_k = \frac{1}{S_k}\int_{S_k} \underline{A}(z, r)\, dz\, dr, \qquad (64)$$

şi rezistenţele de curent continuu (48), se obţine din (62) următoarea expresie pentru tensiunea la borne complexă:

$$\underline{U}_k = r_k^0 \underline{I}_k + j\omega\,(r_k^0 \sigma_k S_k)\underline{\tilde{A}}\,, \qquad (65)$$

iar pentru puterea complexă (61) expresia

$$\underline{S}_\Sigma = P + jQ = \sum_{k=1}^{n} r_k^0 |\underline{I}_k|^2 + j\omega \sum_{k=1}^{n} (r_k^0 \sigma_k S_k)\, \underline{\tilde{A}}_k^{\,*}. \qquad (66)$$

Puterea activă disipată în conductoarele sistemului rezultă,

$$\boxed{P = \sum_{k=1}^{n} r_k^0 |\underline{I}_k|^2 + \mathrm{Re}\left\{ j\omega \sum_{k=1}^{n} (r_k^0 \sigma_k S_k) \widetilde{\underline{A}}_k \underline{I}_k^* \right\}}, \tag{67}$$

iar puterea reactivă primită de sistem

$$\boxed{Q = \mathrm{Im}\left\{ j\omega \sum_{k=1}^{n} (r_k^0 \sigma_k S_k) \widetilde{\underline{A}}_k \underline{I}_k^* \right\}}. \tag{68}$$

În expresiile (66), (67) și (68) își aduc contribuția numai conductoarele active (alimentate din exterior), termenii corespunzători conductoarelor pasive (pentru care $\underline{U}_k = 0$) neintervenind, în acord cu relația (65).

Expresiile (67) și (68) sînt mai simple decît expresiile generale cunoscute :

$$P = -\mathrm{Re}\left\{ \oint_{\Sigma} (\underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}^*) \boldsymbol{n} \, \delta S \right\} = \int_{D_\Sigma} \frac{1}{\sigma} |\underline{\boldsymbol{J}}|^2 \, \delta v, \tag{69}$$

$$Q = -\mathrm{Im}\left\{ \oint_{\Sigma} (\underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}^*) \boldsymbol{n} \, \delta S \right\} = 2\omega \int_{D_\Sigma} \frac{\mu |\underline{\boldsymbol{H}}|^2}{2} \, \delta v, \tag{70}$$

deoarece calculul integralei (64) se face mai simplu, în ea intervenind soluția ecuațiilor potențialului magnetic vector, obținută de obicei cu metoda separării variabilelor sub formă de serie Fourier generalizată, în timp ce pentru calculul cu expresiile (69) și (70) trebuie efectuate integralele unor produse de astfel de serii.

În cazul unor conductoare neomogene cu conductivitatea σ variabilă pe secțiune (funcție de z și r), însă independentă de φ, se obțin expresii similare cu (67) și (68), în care $\sigma_k \underline{A}_k$ se înlocuiește cu $\widetilde{(\sigma \underline{A})}_k$ semnul $\sim$ indicînd efectuarea valorii medii pe secțiunea $\varphi = \mathrm{const}$ a conductorului (k) considerat.

6. CONCLUZII

Cîmpul magnetic cvasistaționar cu simetrie axială al unui sistem de conductoare cu simetrie de rotație, satisfăcînd condițiile (29) de anulare la infinit, e univoc determinat de curenții din conductoarele active (alimentate din exterior) și, în regim tranzitoriu, de repartiția inițială a curenților. În lucrare se demonstrează această teoremă de unicitate, arătîndu-se că o dată cu cîmpul magnetic sînt determinate univoc și tensiunile la bornele conductoarelor active, respectiv curenții induși în conductoarele pasive (nealimentate din exterior, scurtcircuitate).

Se prezintă de asemenea noi expresii pentru calculul puterii instantanee primite de sistem în regim tranzitoriu, respectiv pentru calculul puterii active și reactive în regim sinusoidal, în care intervin valorile medii ale potențialului magnetic vector pe secțiunile axiale ale conductoarelor.

Se regăsesc astfel rezultate analoge celor stabilite anterior în cîmpul magnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare paralele [6].

BIBLIOGRAFIE

1. R. Răduleţ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Bucureşti, Tipografia şi litografia învăţământului, 1956.
2. I.E. Tamm, *Bazele teoriei electricităţii*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1952.
3. R. Răduleţ, A. Timotin, A. Ţugulea, *Introducerea parametrilor tranzitorii în studiul circuitelor electrice lineare avînd elemente nefiliforme şi pierderi suplimentare*, St. cerc. energ. electr., **16**, *4*, 857—929 (1966).
4. A. Ţugulea, I.R. Ciric, *Cîmpul electromagnetic al unor spire parcurse de curent alternativ în prezenţa unor coji sferice conductoare*, St. cerc. energ. electr., **18**, *2*, 355—379 (1968).
5. I.R. Ciric, *Levitaţia electromagnetică a conductoarelor masive sferoidale*, St. cerc. energ. electr., **19**, *2*, 275—299 (1969).
6. A. Timotin, *Unicitatea soluţiilor şi calculul puterii în cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al unui sistem de conductoare paralele*, St. cerc. energ. electr., **17**, *1*, 143—156 (1967).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL FENOMENELOR DE DIFUZIE NORMALĂ *)

DE

C.I. MOCANU

538.3 :621.3.001 :621.371

Pentru examinarea fenomenelor în care mărimile difuzează numai parțial la suprafața domeniului, numite de difuzie normală, cum sînt încălzirea sau răcirea rapidă a corpurilor, uscarea și degazarea superficială, pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic etc., ecuațiile difuziei volumetrice nu sînt potrivite.

În această lucrare, autorul elaborează o teorie unitară a proceselor difuziei parțiale la suprafața corpurilor și fundamentează conceptele de difuzie local normală, total normală, de difuzie locală netă și total netă. Se stabilesc soluțiile ecuației de difuzie normală și netă în regim tranzitoriu în problema plan-paralelă și în două cazuri-limită ale problemei tridimensionale.

Transmisia căldurii, cîmpul electromagnetic în conductoare și în plasma izotropă, procesele de osmoză și mișcarea browniană în anumite condiții difuzia neutronilor etc. sînt descrise de o ecuație scalară (1) sau de una vectorială (2), care în mediile liniare, izotrope și imobile sînt ecuații liniare cu derivate parțiale de tip parabolic

$$a\Delta f(\boldsymbol{r}_M, t) = \frac{\partial f(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$a\Delta \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t) = \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial t}, \tag{2}$$

în care $f(\boldsymbol{r}_M, t)$ și $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$ sînt mărimile scalară și vectorială ale proceselor de difuzie, funcții de punct M (reperat de raza vectoare $\boldsymbol{r}_M$) și de timpul t, iar a este difuzivitatea scalară, termică în procesele de transmisie a căldurii:

$$a = \frac{\lambda_c}{C_v}, \tag{3}$$

*) Comunicare prezentată la a XV sesiune științifică a Institutului de Energetică al Academiei R.S. România din mai 1969.

λ_c fiind conductivitatea termică la căldură specifică sub volum constant c_v, şi magnetică pentru cîmpul electromagnetic :

$$a = \frac{1}{\mu\sigma}, \tag{4}$$

unde μ este permeabilitatea şi τ conductivitatea electrică.

Dacă mărimea vectorială $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$ variază sinusoidal în timp cu pulsaţia ω şi cu fazele iniţiale ale componentelor α_k,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t) = \sum_{k=1}^{3} G_{k\,max}(\boldsymbol{r}_M) \sin [\omega t + \alpha_k(\boldsymbol{r}_M)]\, \mathrm{e}_k,$$

ecuaţia care descrie regimul armonic permanent al difuziei mărimii vectoriale $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$ este de tip Helmholtz :

$$\Delta \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, \omega) = \gamma_0^2 \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, \omega), \tag{5}$$

în care $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, \omega)$ este reprezentarea în complex simplificat a mărimii $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$:

$$G_k(\boldsymbol{r}_M, \omega) = \frac{G_{k\,max}(\boldsymbol{r}_M)}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{j\alpha_r(\boldsymbol{r}_M)}, \tag{6}$$

$\boldsymbol{e}_r$ $(k = 1, 2, 3)$ sînt versorii sistemului de coordonate, şi s-a notat cu

$$\gamma_0 = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = (1 + j)\frac{1}{\delta_0}, \tag{7}$$

δ_0 fiind adîncimea de pătrundere în semispaţiu :

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}. \tag{8}$$

Integrarea exactă a ecuaţiilor (1), (2) şi (6) este posibilă numai pentru cîteva forme geometrice simple ale suprafeţei domeniului $D_{\Sigma^{(0)}}$.

Datorită în principal condiţiilor iniţiale şi pe frontieră, se preferă sistemul de coordonate în care suprafaţa $\Sigma^{(0)}$ este suprafaţă de coordonate. Din cauza numărului redus al sistemelor de coordonate în care se pot rezolva exact ecuaţiile (1), (2), şi (6) şi al condiţiilor iniţiale şi pe frontieră extrem de variate, numărul problemelor de difuzie pentru care se pot determina soluţiile exacte este mic.

În anumite condiţii procesele de difuzie sînt localizate în subdomenii d_j şi, la condiţii iniţiale şi pe frontieră date, valorile mărimilor $f(\boldsymbol{r}_M, t)$ şi $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$ sînt în rest neglijabile. Cele mai frecvente localizări ale proceselor sînt la suprafaţa domeniului $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ şi fenomenele de difuzie se numesc *normale*.

Din clasa fenomenelor de difuzie normală în regim tranzitoriu fac parte : încălzirea şi răcirea rapidă a corpurilor (de exemplu încălzirea superficială prin inducţie electromagnetică), uscarea şi degazarea superficială ; pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic la stabilirea acestuia în conductoare procesele de transfer superficial de masă şi de uniformizare a concentraţiei etc.

Din clasa fenomenelor de difuzie *normală* în regim permanent fac parte refulările superficială și netă ale curentului alternativ în conductoare.

Procesele de difuzie normală se studiază în literatură cu ecuațiile (1), (2) și (6) ale proceselor de difuzie având loc în întregul volum, care se dovedesc nepotrivite. Astfel, la încălzirea sau la răcirea rapidă a corpurilor variația spațio-temporală a temperaturii este nulă în interiorul corpurilor, iar în regimul armonic permanent al refulării nete a curentului alternativ în conductoare, intensitățile cîmpurilor electric și magnetic, inducțiile electrică și magnetică și densitatea curentului electric de conducție sînt nule în conductoare, cu excepția unei pelicule periferice, avînd grosimea de ordinul adîncimii de pătrundere a cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor.

În această lucrare se elaborează o teorie unitară a proceselor de difuzie normală pentru mărimile scalare și se fundamentează conceptele de *difuzie local normală*, *difuzie total normală*, *difuzie local netă* și *difuzie total netă*; se demonstrează prin examinarea calitativă a ecuației (1), exprimată în sistemul de coordonate intrinsec asociat suprafeței de discontinuitate a difuzivității, că difuzia normală în domeniile $D_{\Sigma^{(0)}}$, mărginite de suprafețe regulate $\Sigma^{(0)}$, este descrisă de ecuația scalară (9)

$$a\Delta f(x_3, t) = \frac{\partial f(x_3, t)}{\partial t}, \tag{9}$$

în care mărimea $f(x_3, t)$ depinde numai de coordonata după normala x_3 și de timpul t.

În regimul de difuzie normală, mărimea $f(x_3, t)$ a cărei variație spațio-temporală se poate urmări în lungul normalei din punctul de pe suprafața domeniului pînă în centrul de curbură, nu depinde de coordonatele tangențiale x_1 și x_2 ale sistemului intrinsec de coordonate, iar dependența fenomenelor de coordonata x_3 se examinează în problema plan-paralelă într-un sistem de coordonate cilindric-local cu axa în axa de curbură, iar în problema tridimensională, în care local razele principale de curbură sînt egale, într-un sistem de coordonate sferic-local cu centrul în centrul de curbură.

1. ECUAȚIA DIFUZIEI NORMALE A MĂRIMILOR SCALARE

Fie $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ domeniul mărginit de suprafața regulată $\Sigma^{(0)}$ cu normala peste tot continuă (fig. 1), în care difuzivitatea mediului a este constantă.

Sistemul de coordonate intrinsec sau atașat, în care suprafața $\Sigma^{(0)}$ este una dintre suprafețele de coordonate ale sistemului, se definește conform unei teoreme a lui Dupin [1], cum urmează : o suprafață $\Sigma^{(0)}$ aparține unui sistem de coordonate format de suprafețele Σ paralele cu $\Sigma^{(0)}$ și de două familii de suprafețe desfășurate de normalele x_3 la $\Sigma^{(0)}$ în lungul liniilor principale de curbură ale acesteia.

În figura 2 s-a reprezentat linia principala de curbură $\Gamma_1^{(0)}$ (presupusă în plan) a suprafeței $\Sigma^{(0)}$ și evoluta Γ_n. Desfășurînd tangenta $\overline{CM_0}$ la evoluta Γ_n, punctul M_0 descrie linia principală de curbură $\Gamma_1^{(0)}$ a suprafeței $\Sigma^{(0)}$ a domeniului, iar punctele M_q și M_{-q} $(q = 1, 2, \ldots n)$ descriu liniile principale de curbură $\Gamma_1^{(q)}$ și $\Gamma_1^{(-q)}$, atașate liniei principale de curbură $\Gamma_1^{(0)}$.

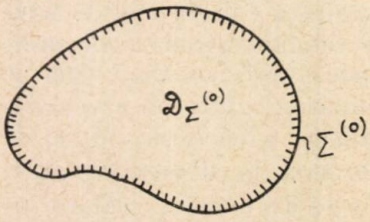


Fig. 1. — Domeniu $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ mărginit de o suprafață regulată $\Sigma^{(0)}$.

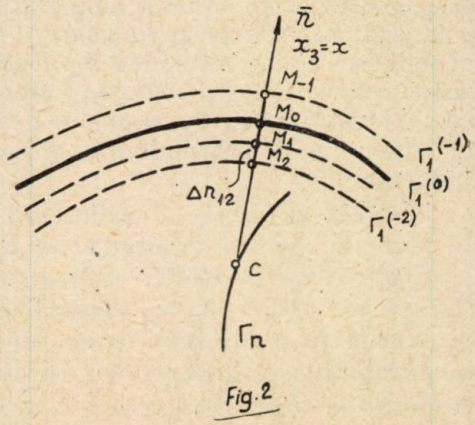


Fig. 2. — Figură pentru sistemul de coordonate intrinsec.

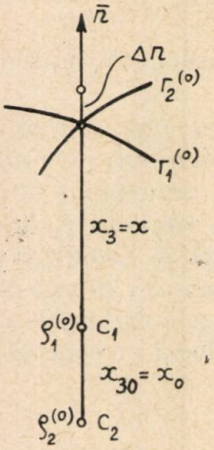


Fig. 3. — Figură pentru sistemul de coordonate intrinsec.

Tangentele $\overline{CM_q}$ și $\overline{CM_{-q}}$ sînt normale la liniile $\Gamma_1^{(q)}$ și Γ_1^q și segmentul $\Delta n_{q,q+1}$, determinat de liniile $\Gamma_1^{(q)}$ și $\Gamma_1^{(q+1)}$ este egal cu diferența razelor de curbură $\rho_1^{(q)}$ și $\rho_1^{(q+1)}$:

$$\Delta n_{q,q+1} = \rho_1^{(q)} - \rho_1^{(q+1)}. \tag{10}$$

Alegînd originea pentru normalele x_3 în centrul de curbură C_1, rezultă din relația (10), figura

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}\rho_1, \tag{11}$$

și, alegînd originea pentru x_3 în centrul de curbură C_2, rezultă din relația

(10) pentru cea de-a doua linie principală de curbură (fig. 3)

$$dn = d\rho_2, \tag{11'}$$

în care s-a notat cu dn și cu $d\rho_1$, $d\rho_2$ creșterile elementare ale normalei și ale razelor principale de curbură ρ_1 și ρ_2, menținînd fixe centrele de curbură C_1 și C_2.

Deoarece versorii $\boldsymbol{e}_1(x_1, x_2, x_3)$ și $\boldsymbol{e}_2(x_1, x_2, x_3)$ ai tangentelor la liniile principale de curbură Γ_1 și Γ_2 conținute în suprafața atașată Σ, împreună cu versorul normal $\boldsymbol{e}_3(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{n}(x_1, x_2, x_3)$, sînt triortogonali, sistemul de coordonate intrinsec (x_1, x_2, x_3) este curbiliniu triortogonal, cu elementele de linie ds_j.

$$ds_1 = h_1\, dx_1;\quad ds_2 = h_2\, dx_2;\quad ds_3 = dn = h_3\, dx_3, \tag{12}$$

în care h_1, h_2 și $h_3 = 1$ sînt coeficienții lui Lamé.

Cu expresia laplaceanului în sistemul de coordonate intrinsec, (anexa A.1) unde s-au separat termenii în care intervin derivatele parțiale după normală, ecuația (1) are următoarea formă:

$$\Delta f(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial n} +$$

$$+ l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) f(\boldsymbol{r}, t) = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}, \tag{13}$$

în care s-a notat cu λ valoarea reciprocă a difuzivității:

$$\lambda = \frac{1}{a}. \tag{14}$$

În condiții inițiale de repaus și la momentul inițial $t = 0$, mărimea $f(\boldsymbol{r}, t)$ este nulă în domeniu și are valoarea $f(\boldsymbol{r}_{M0}, 0)$ nenulă și continuă pe suprafața $\Sigma^{(0)}$. Suprafața $\Sigma^{(0)}$ fiind peste tot regulată, rezultă că la început mărimea f difuzează în lungul normalei interioare, avînd o lege de variație spațio-temporală ca în semispațiu. Deoarece în cazul difuziei în semispațiu mărimea f (egală cu o constantă pe suprafața semispațiului) nu depinde decît de coordonata după normală x_3, urmează că în intervalul de timp $t_p(0)$, în care fenomenele se pot aproxima ca în semispațiu, în ecuația (13) termenul $l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$ este nul și ecuația se simplifică cum urmează:

$$\Delta f(\boldsymbol{r}, t) = \sim \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial n} = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}. \tag{15}$$

Notînd cu $F(\boldsymbol{r}, p)$ transformata Laplace a funcției $f(\boldsymbol{r}, t)$, formele operaționale ale ecuațiilor (13) și (15) sînt următoarele:

$$\Delta F(\boldsymbol{r}, p) = \frac{a^2 F(\boldsymbol{r}, p)}{an^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{aF(\boldsymbol{r}, p)}{an} +$$

$$+ l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) F(\boldsymbol{r}, p) = \gamma_p^2 F(\boldsymbol{r}, p), \tag{16}$$

$$\Delta F(\boldsymbol{r}, p) = \sim \frac{d^2 F(\boldsymbol{r}, p)}{dn^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{dF(\boldsymbol{r}, p)}{dn} = \gamma_p^2 F(\boldsymbol{r}, p), \tag{17}$$

în care s-a notat

$$\gamma_p = \sqrt{\lambda p}. \tag{18}$$

Împărțind ecuațiile (16) și (17) cu γ_p, se obține

$$\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{r}, p)}{\partial (\gamma_p n)^2} + \left(\frac{1}{\gamma_p \rho_1} + \frac{1}{\gamma_p \rho_2}\right) \frac{\partial F(\boldsymbol{r}, p)}{\partial (\gamma_p n)} +$$

$$+ \frac{1}{p\lambda} l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) F(\boldsymbol{r}, p) = F(\boldsymbol{r}, p), \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(\boldsymbol{r}, p)}{\mathrm{d}(\gamma_p n)^2} + \left(\frac{1}{\gamma_p \rho_1} + \frac{1}{\gamma_p \rho_2}\right) \frac{\mathrm{d} F(\boldsymbol{r}, p)}{\mathrm{d}(\gamma_p n)} = F(\boldsymbol{r}, p). \tag{20}$$

Fiindcă între funcțiile original $f(\boldsymbol{r}, t)$ și imaginea Laplace $F(\boldsymbol{r}, p)$ există relația valorilor inițiale [2],

$$\lim_{t \to \infty} f(\boldsymbol{r}, t) = \lim_{p \to \infty} p F(\boldsymbol{r} p), \tag{21}$$

care permite aproximarea funcției original la începutul regimului tranzitoriu dacă se cunoaște expresia imaginii Laplace și deoarece prima și a doua derivată după normală a funcției imagine, $\partial F/\partial n$ și $\partial^2 F/\partial^2 n$ sînt finite, rezultă că termenul

$$\frac{1}{\lambda q} l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) F(\boldsymbol{r}, p),$$

pentru $p \to \infty$, este neglijabil în raport cu ceilalți termeni în punctele în care razele de curbură ρ_1 și ρ_2 sînt mici și deci ecuația (19) se poate aproxima cu ecuația (20), deci cu ecuația (17). Urmează că în ecuațiile (16) și (17) mărimea $f(\boldsymbol{r}, t) = f(x_3, t)$ și imaginea sa Laplace $F(\boldsymbol{r}, p) = F(x_3, p)$ depind spațial numai de coordonata x_3 după normală, pe care se găsesc centrele de curbură C_1 și C_2 ale liniilor principale de curbură, situate la distanța x_0 (fig. 3):

$$\rho_2^{(0)} - \rho_1^{(0)} = \rho_2 - \rho_1 = x_0. \tag{22}$$

Intervalul de timp t_ρ, în care fenomenele se pot aproxima la fel ca în semispațiu, depinde de curbura locală și este mai mare pentru curbură mică (rază de curbură mare) și mai mic pentru curbură mare (rază de curbură mică). Dacă $\rho_2^{(0)} > \rho_1^{(0)}$, prin urmare și $\rho_2 > \rho_1$, legea de variație a mărimii f în domeniul $D_{\Sigma^{(0)}}$ mărginit de suprafața regulată $\Sigma^{(0)}$ se poate aproxima cu legea de variație a mărimii f în semispațiul în intervalul de timp t_ρ, care depinde de raza minimă de curbură $\rho_1^{(0)}$.

Alegînd originea 0 pentru coordonata după normală

$$x_3 = x \quad (h_3 = 1) \tag{23}$$

în centrul de curbură al razei minime de curbură C_1 ecuațiile (15) și (17) se transformă cum urmează:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(x,p)}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\mathrm{d}F(x,p)}{\mathrm{d}x} = \gamma_p^2 F(x,p). \tag{25}$$

Ecuația (24) descrie regimul tranzitoriu al *difuziei local normale* a mărimii $f(\boldsymbol{r}, t)$, caracterizat astfel: pe durata t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, mărimea f, soluție a ecuației (24), nu depinde decît de coordonata x după normala interioară; durata t_ρ este o mărime locală și depinde de cea mai mică dintre razele principale de curbură. Dacă $\rho_{min}^{(0)}$ este cea mai mică dintre razele principale de curbură ale suprafeței regulate, $\Sigma^{(0)}$, căreia îi corespunde durata $t_{\rho\,min}$, rezultă că în intervalul de timp $t_{\rho\,min}$ difuzia este normală în toate punctele de pe suprafața $\Sigma^{(0)}$. Acest regim este de *difuzie total normală*.

1.1. Problema plan-paralelă a difuziei normale

În problema plan-paralelă, conturul $\Gamma^{(0)}$ al secțiunii transversale cu normala peste tot continuă este linie principală de curbura (fig. 4) și sistemul de coordonate intrinsec are proprietățile

$$\rho_1 = \rho: \quad \rho_2 = \sim \infty \quad (x_0 = \sim \infty). \tag{26}$$

Cu relațiile (26), ecuațiile (24) și (25) se transformă astfel:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(x,p)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}F(x,p)}{\mathrm{d}x} = \gamma_p^2 F(x,p). \tag{28}$$

Ecuația (28), de tip Bessel, are soluția

$$F(x,p) = A\,J_0(j\,\gamma_p\,x) + B\,Y_0(j\,\gamma_p\,x), \tag{29}$$

în care $J_0(j\,\gamma_p\,x)$ și $Y_0(j\,\gamma_p\,x)$ sînt funcțiile lui Bessel de ordinul zero, de prima și respectiv a doua speță, iar A și B sînt constante complexe de integrare.

a) Dacă centrul de curbură C al unui punct M_0 de pe suprafața $\Sigma^{(0)}$, în care curbura este concavă, este situat în domeniu (fig. 5 *a*), soluția $F(x, p)$ fiind finită în punctul C, constanta B este nulă. În punctul M_0, la momentul inițial, mărimea $f(x, t)$ avînd valoarea

$$f(x,t)_{\substack{x=\rho^{(0)}\\ t=0}} = f(\rho^{(0)}), \tag{30}$$

imaginea sa Laplace are expresia

$$F(\rho^{(0)}, p) = \frac{f(\rho^{(0)})}{p}. \tag{31}$$

Din relaţiile (29) şi (31) rezultă

$$F(\rho^{(0)}, p) = A J_0(j \gamma_p \rho^{(0)}) = \frac{f(\rho^{(0)})}{f},$$

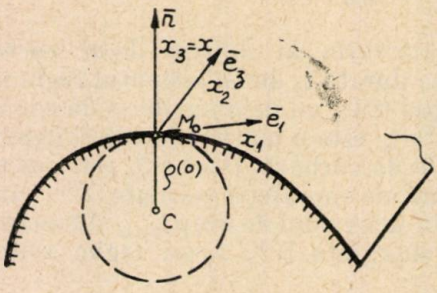


Fig. 4. — Domeniu $\mathcal{D}_\Sigma^{(0)}$ plan-paralel (conturul $\Gamma^{(0)}$ al secţiunii transversale drepte, linie principală de curbură).

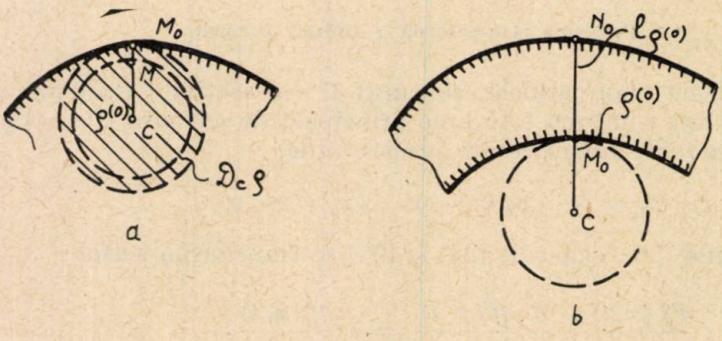


Fig. 5. — Centrul de curbură în domeniu (*a*) şi în exteriorul domeniului (*b*).

de unde se obţine constanta de integrare A :

$$A = f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p J_0(j \gamma_p \rho^{(0)})}. \tag{32}$$

Introducînd valoarea constantei de integrare A din relaţia (32) în relaţia (29), se obţine soluţia $F(x, p)$:

$$F(x, p) = f(\rho^{(0)}) \frac{J_0(j, \gamma_p x)}{p I_0(j \gamma_p \rho^{(0)})}, \tag{33}$$

iar funcţia original $f(x,t)$ se obţine cu formula de inversiune Mellin-Fourier [3], [4], după cum urmează :

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\alpha_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n I_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 t/\tau} \right], \tag{34}$$

în care α_n sînt rădăcinile ecuației

$$I_0(\alpha_n) = 0, \tag{35}$$

și s-a notat cu τ mărimea

$$\tau = \lambda \rho^{(0)2}. \tag{36}$$

Soluția (34) în punctele situate pe normala interioară x este identică cu soluția mărimii f pentru difuzia în cilindrul circular drept, avînd raza egală cu raza de curbură $\rho^{(0)}$ și valoarea inițială $f(\rho^{(0)})$ pe suprafața cilindrului. În intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, mărimea f difuzează după normala interioară din punctul M_0 pînă în centrul de curbură C, ca și cum în locul domeniului $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ s-ar găsi domeniul cilindrului de curbură $\mathcal{D}_{c\rho}$ (fig. 5*a*).

Deoarece timpul mediu de difuzie t_r al mărimii $f(\rho^{(0)})$ în cilindrul circular de rază r este [3]

$$t_r = \frac{1}{4} \lambda r^2, \tag{37}$$

rezultă că intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, în care difuzia este local normală, are ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{1}{4} \lambda \rho^{(0)2}. \tag{38}$$

Cu expresiile (34) și (38) se calculează supratemperaturile $T(x, t)$, $T'(x, t)$ și intervalul de timp de difuzie t_ρ în procesele de încălzire și de răcire rapidă a corpurilor cu suprafețe regulate, în punctele de *curbură concavă*, avînd centrele de curbură în interiorul corpurilor.

Dacă $T(\rho^{(0)})$ este supratemperatura la momentul inițial în punctul M_0 pe suprafața corpului, supratemperatura $T(x, t)$ în punctul situat pe normala interioară a punctului M_0, la distanța x de centrul de curbură, are la încălzire expresia

$$T(x, t) = T(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\alpha_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n I_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 t/\tau} \right], \tag{39}$$

iar la răcire expresia

$$T(x, t) = 2T(\rho^{(0)}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\alpha_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 t/\tau}, \tag{40}$$

b) Dacă centrul de curbură C al punctului M_0 de pe suprafața $\Sigma^{(0)}$, în care curbura este convexă, este situat în exteriorul domeniului $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ (fig. 5 *b*) și $l_{\rho^{(0)}} \gg \rho^{(0)}$, în soluția (29), pusă sub forma

$$F(x, p) = A I_0(\gamma_p x) + B k_0(\gamma_p x), \tag{41}$$

$I_0(\gamma_p x)$ și $K_0(\gamma_p x)$ fiind funcțiile modificate ale lui Bessel de ordinul zero, de prima și respectiv a doua speță, constanta A este nulă și constanta B se determină din condiția ca în punctul M_0 funcția $f(x, t)$ să fie egală cu $f(\rho^{(0)})$, adică

$$B = f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p\, Y_0(j\, \gamma_p \rho^{(0)})}, \tag{42}$$

Soluția funcției imagine $F(x, p)$ are forma

$$F(x, p) = f(\rho^{(0)}) \frac{Y_0(j\, \gamma_p x)}{p\, Y_0(j\, \gamma_p \rho^{(0)})}, \tag{43}$$

iar funcția original $f(x, t)$ [3]

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n\, Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau} \right], \tag{44}$$

în care β_n sînt rădăcinile ecuației

$$Y_0(\beta_n) = 0. \tag{45}$$

Deoarece timpul mediu de difuzie t_ρ pentru cilindrul cav cu raza exterioară r_e și raza interioară r_i este [3]

$$t_r = \frac{1}{4} \lambda (r_e^2 - r_i^2), \tag{46}$$

rezultă că difuzia este superficială în intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, avînd ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{1}{4} \lambda (l'^2_{\rho^{(0)}} - \rho^{(0)^2}) = \sim \frac{1}{4} \lambda\, l'^2_{\rho^{(0)}} (l^{(0)} \gg \rho^{(0)}), \tag{47}$$

$$l'_{\rho^{(0)}} = (l_{\rho^{(0)}} - \rho^{(0)})/2.$$

Cu expresiile (44) și (47) se calculează supratemperaturile $T(x, t)$ și $T'(x, t)$, respectiv timpul de difuzie superficială t_ρ, în procesele de încălzire și de răcire a corpurilor cu suprafețe regulate în punctele de *curbură convexă*.

Supratemperatura $T(x, t)$ are la încălzire expresia

$$T(x, t) = T(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n\, Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau} \right], \tag{48}$$

iar la răcire

$$T'(x, t) = 2T(\rho^{(0)}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n\, Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau}. \tag{49}$$

Aplicație. Pentru domeniul avînd forma cilindrului eliptic cu semiaxele a și b (fig. 6), raza de curbură $\rho^{(0)}$ a unui punct de pe suprafață are în coordonate carteziene (x', y') expresia

$$\rho^{(0)} = a^2 b^2 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right)^{3/2} \tag{50}$$

și valorile maximă și minimă la extremitățile axelor mici și mari sînt

$$\rho^{(0)}_{min} = \rho_A = \frac{b^2}{a}; \quad \rho^{(0)}_{max} = \rho_B = \frac{a^2}{b}. \tag{51}$$

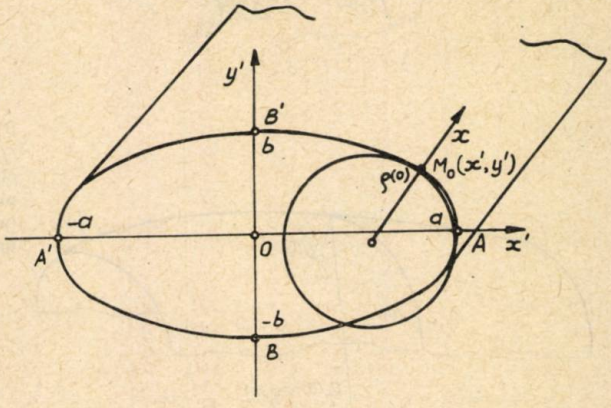


Fig. 6. — Domeniu de forma cilindrului eliptic.

Intervalul minim de timp $t_{\rho min}$, în care difuzia este total normală pe suprafața cilindrului eliptic, se calculează cu raza minimă de curbură $\rho^{(0)}_{min}$ după cum urmează :

$$t_{\rho\, min} = \frac{\lambda}{4} \frac{b^4}{a^2}. \tag{52}$$

Supratemperaturile la încălzire $T(x, t)$ și la răcire $T'(x, t)$ au expresiile

$$T(x, t) = T(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t/\tau}}{\alpha_n I_1(\alpha_n)} I_0 \left(\frac{\alpha_n x}{a^2 b^2 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right)^{3/2}} \right) \right], \tag{53}$$

$$T'(x, t) = 2T(\rho^{(0)}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t/\tau}}{\alpha_n I_1(\alpha_n)} I_0 \left(\frac{\alpha_n x}{a^2 b^2 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{l^4} \right)^{3/2}} \right). \tag{54}$$

1.2. Problema tridimensională a difuziei normale

În problema tridimensională, ecuațiile (24) și (25) se vor examina în cazurile cînd razele principale de curbură sînt egale :

$$\rho_1^{(0)} = \rho_2^{(0)} = \rho^{(0)}; \quad x_0 = 0, \tag{55}$$

deci cînd centrele de curbură C_1 și C_2 coincid (fig. 7 *a*), și cînd una dintre razele principale de curbura $\rho_2^{(0)}$ este mult mai mare decît cealaltă rază $\rho_1^{(0)}$, $\rho_2^{(0)} \gg \rho_1^{(0)}$, și se poate aproxima (fig. 7*b*),

$$\rho_2^{(0)} = \sim\infty \; (x_0 = \sim\infty). \tag{56}$$

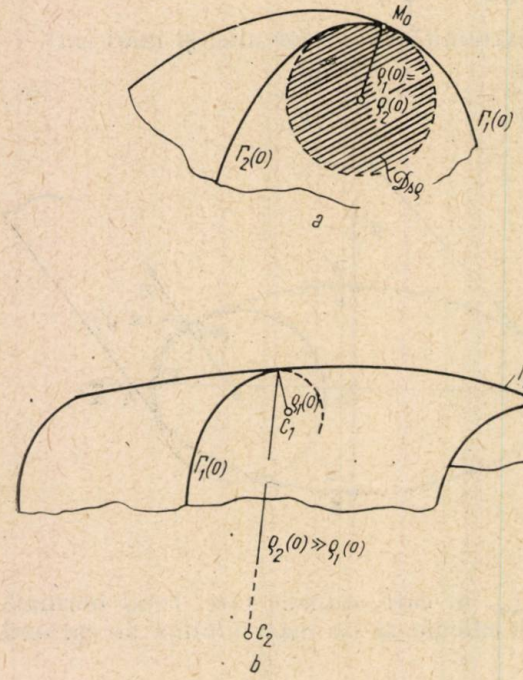


Fig. 7. — Domeniu tridimensional $\mathcal{D}_{\Sigma(0)}$: *a* — vîrf în care razele principale de curbură sînt egale; *b* — muchie în care una dintre razele principale de curbură este mult mai mare decît cealaltă rază de curbură.

În primul caz, ecuațiile (24) și (25) se transformă după cum urmează

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(x,p)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}F(x,p)}{\mathrm{d}x} = \gamma_p^2 F(x,p). \tag{58}$$

Soluția ecuației (58) este

$$F(x,p) = c\frac{\sin(j\,\gamma_p\, x)}{x} + D\frac{\cos(j\gamma_p\, x)}{x}, \tag{59}$$

în care C și D sînt constante de integrare.

a) Dacă centrul de curbură C al punctului M_0, în care curbura este concavă, e situat în domeniu (fig. 7 *a*), soluția $F(x,p)$ fiind finită în centrul de curbură, constanta D este nulă, iar constanta C se determină din condiția ca în punctul M_0 mărimea $f(x,t)$ să fie egală cu $f(\rho^{(0)})$, adică

$$C = \rho^{(0)} f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p \sin(j\,\gamma_p\, \rho^{(0)})}. \tag{60}$$

Soluția $F(x, p)$ are următoarea formă :

$$F(x, p) = f(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \frac{\sin(j\gamma_p x)}{p \sin(j\gamma_p \rho^{(0)})}, \tag{61}$$

iar funcția original $f(x, t)$ are expresia [3]

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{\sin \gamma_n x/\rho^{(0)}}{x/\rho^{(0)}}\right], \tag{62}$$

în care

$$\gamma_n = n\pi ; n = 1, 2, \ldots \tag{63}$$

Soluția (62) în punctele situate pe normala interioară x este identică cu soluția mărimii f pentru difuzia în sfera avînd raza egală cu raza de curbură $\rho^{(0)}$ și valoarea inițială $f(\rho^{(0)})$ pe suprafața sferei.

În intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, mărimea f difuzează după normală din punctul M_0 pînă în centrul de curbură C, ca și cum în locul domeniului $\mathcal{D}^{\Sigma^{(0)}}$ s-ar găsi sfera de curbură $\mathcal{D}_{s\rho}$ (fig. 7*a*).

Deoarece timpul mediu de difuzie t_ρ a mărimii $f(\rho^{(0)})$ în sfera de rază r este [3]

$$t_r = \frac{\lambda}{b} r^2, \tag{64}$$

rezultă că în intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, avînd ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{\lambda}{b} \rho^{(0)2}, \tag{65}$$

difuzia este superficială.

Cu expresiile (62) și (65) se calculează supratemperaturile $T(x, t)$, $T(x, t)$ și timpul de difuzie t_ρ în procesele de încălzire și de răcire rapidă a corpurilor cu suprafețe regulate în punctele de *curbură concavă*, avînd razele principale de curbură egale, la încălzire :

$$T(x, t) = T(\rho^{(0)}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{\sin \gamma_n x/\rho^{(0)}}{x/\rho^{(0)}}\right], \tag{66}$$

și la răcire :

$$T(x, t) = 2T(\rho^{(0)}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{\sin \gamma_n x/\rho^{(0)}}{x/\rho^{(0)}}. \tag{67}$$

b) Dacă centrul de curbură al punctului M_0, în care curbura este convexă și $l_{\rho^{(0)}} \gg \rho^{(0)}$, este situat în exteriorul domeniului, în soluția ecuației (58), pusă sub forma

$$F(x, p) = C' \frac{e^{\gamma_p x}}{x} + D' \frac{e^{-\gamma_p x}}{x}, \tag{68}$$

constanta C' este nulă şi constanta D' se determină din condiţia ca în punctul M_0 mărimea $f(x, t)$ să fie egală la momentul iniţial cu $f(\rho^{(0)})$, adică

$$D' = \rho^{(0)} f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p e^{-\gamma_p \rho^{(0)}}}. \tag{69}$$

Soluţia $F(x, p)$ este

$$F(x, p) = \frac{\rho^{(0)}}{x} f(\rho^{(0)}) \frac{e^{-\gamma_p (x-\rho^{(0)})}}{p} \tag{70}$$

şi funcţia original $f(x, t)$ are forma

$$f(x, t) = \frac{\rho^{(0)}}{x} f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(x-\rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}, \tag{71}$$

în care s-a notat cu $\operatorname{erfc} \frac{(x-\rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}$ funcţia de eroare complementară.

Cu formula (71) se calculează supratemperaturile $T(x, t)$ şi $T'(x, t)$ în punctele de *curbură convexă*, avînd razele principale de curbură egale, la încălzire :

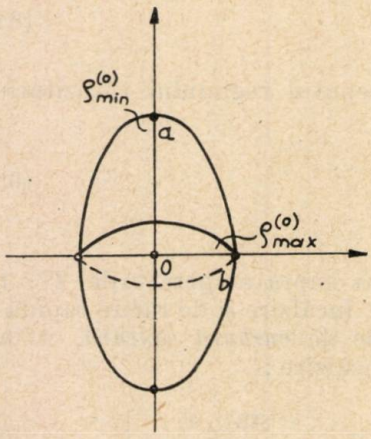


Fig. 8. — Domeniu de forma elipsoidului de rotaţie.

$$T(x, t) = T(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \operatorname{erfc} \frac{(x-\rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}, \tag{72}$$

şi la răcire

$$T(x,t) = T(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{(x-\rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= T(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \operatorname{erf} \frac{(x-\rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}. \tag{73}$$

Dacă în punctul M_0 una dintre razele principale de curbură $\rho_2^{(0)}$ este mult mai mare decît cealaltă rază $\rho_1^{(0)}$ cu aproximaţia (56), ecuaţiile (24) şi (25) se reduc la ecuaţiile (27) şi (28), adică local problema este plan-paralelă.

Aplicaţie. Pentru elipsoidul de rotaţie cu semiaxele a şi b (fig. 8), raza minimă de curbură fiind la extremitatea axei mari, $\rho^{(0)}_{min} = b^2/a$, în intervalul de timp $t_{\rho min}$ calculat cu formula (65) :

$$t_{\rho min} = \frac{\lambda}{6} \frac{b^4}{a^2}, \tag{74}$$

difuzia este total superficială și supratemperaturile $T(x, t)$ și $T'(x, t)$ în punctele situate pe axa mare x' a elipsoidului au expresiile

$$T(x, t) = T_A\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{b^2}{xa} \sin \gamma_n \frac{ax}{b^2}\right], \tag{75}$$

$$T'(x, t) = 2T_A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{b^2}{ax} \sin \gamma_n \frac{ax}{b^2}, \tag{76}$$

în care T_A este temperatura inițială la extremitățile elipsoidului.

2. DIFUZIA NETĂ A MĂRIMILOR SCALARE

Intervalul de timp t_ρ, în care mărimea f difuzează normal, depinde de proprietățile locale ale suprafeței de discontinuitate ale difuzivității, fiind cu atît mai mare cu cît razele principale de curbură sînt mai mari, dacă centrul de curbură este situat în domeniu, sau cu cît segmentele $(l_{\rho^{(0)}} - \rho^{(0)})$ ale normalei interioare sînt mai mari, dacă centrul de curbură este în exteriorul domeniului.

Dacă se examinează fenomenele în primele momente ale regimului tranzitoriu, cînd mărimea f difuzează numai pe o adîncime $\Delta x^{(0)}$ mult mai mică decît razele principale de curbură $\rho^{(0)}$ sau segmentele $(l_{\rho^{(0)}} - \rho^{(0)})$, se constată că legea de variație a difuziei este identică cu legea de variație a difuziei în semispațiu.

Acest regim, în care mărimea f este nenulă în domeniul $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ numai pe o adîncime foarte mică $\Delta x^{(0)}$ după normala interioară, se numește de difuzie *local netă*. Dacă $\rho^{(0)}_{min}$ sau $(l_{\rho^{(0)}} - \rho^{(0)})_{min}$ sînt cele mai mici din valorile razelor principale de curbură concavă sau ale segmentelor normalei interioare situate în domeniu, care determină durata minimă $t^{(n)}_{\rho min}$ a difuziei local nete, rezultă că în intervalul de timp $t^{(n)}_{\rho min}$ de la începutul regimului tranzitoriu difuzia este netă în întreg domeniul $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$. Acest regim se numește de difuzie *total netă*.

Pentru valori mari ale argumentului $j\gamma_p x$, funcțiile lui Bessel $I_0(j\gamma_p x)$ și $Y_0(j\gamma_p x)$ pot fi înlocuite în ecuațiile (33) și (43) cu dezvoltările lor asimptotice [5]:

$$I_0(j\gamma_p x) = \sim \frac{e^{\gamma_p x}}{\sqrt{2\pi\gamma_p x}}; \quad Y_0(j\gamma_p x) = \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_p x}} e^{-\gamma_p x}, \tag{77}$$

și se obține următoarea aproximație pentru soluțiile $F(x, p)$ ale problemei plan-paralele pentru punctele de curbură concavă:

$$F(x, p) = \sim f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p} e^{\gamma_p (x - \rho^{(0)})} = f(\rho^{(0)}) \frac{1}{\rho} e^{-\gamma_p \Delta x_0};$$

$$\Delta x^{(0)} = \rho^{(0)} - x, \tag{78}$$

respectiv pentru punctele de curbură convexă:

$$F(x, p) = \sim f(\rho^{(0)}) \frac{1}{p} e^{\gamma_p (\rho^{(0)} - x)} = f(\rho^{(0)}) \frac{1}{\rho} e^{\gamma_p \Delta x_0} \tag{79}$$

De asemenea, pentru valori mari ale argumentului $j\gamma_p x$ în soluțiile $F(x, p)$ ale problemei tridimensionale (61) și (74), se obțin aceleași aproximații (78) și (79).

Aplicînd formula de inversiune Mellin-Fourier expresiilor (78) și (79), se obțin următoarele soluții ale mărimii $f(x, t)$ pentru punctele de curbură concavă :

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(\rho^{(0)} - x)\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}, \tag{80}$$

și pentru punctele de curbură convexă :

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(x - \rho^{(0)})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}. \tag{81}$$

Soluțiile (80) și (81), care descriu difuzia mărimii $f(x, t)$ pe adîncimea $\Delta x^{(0)}$ sînt identice cu soluția difuziei mărimii $f(x,t)$ în semispațiu, avînd la momentul inițial valoarea nulă în semispațiu și valoarea constantă pe suprafața acestuia.

2.1. Difuzia netă la valori mari ale razelor principale de curbură

S-au examinat regimurile de difuzie superficială și netă în punctele de pe suprafața domeniului în care razele principale de curbură sînt suficient de mici pentru realizarea condiției $l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) = 0$. Dacă razele principale de curbură sînt mari și centrul de curbură este situat în domeniu, rezultă că în ecuațiile (20) și (21), pentru $p \to \infty$, sînt neglijabili și următorii termeni :

$$\left(\frac{1}{\gamma_p \rho_1} + \frac{1}{\gamma_p \rho_2}\right) \frac{\partial F(\boldsymbol{r}, p)}{\partial(\gamma_p n)} = \sim 0,$$

și ecuația (20) se simplifică cum urmează :

$$\frac{\partial^2 F(x, p)}{\partial x^2} = \gamma_p^2 F(x, p), \tag{82}$$

adică ecuația difuziei în semispațiu, cu următoarea soluție :

$$f(x, t) = f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}. \tag{83}$$

Dacă punctele M_0 de pe suprafața domeniului sînt situate pe concavități sau convexități și centrele de curbură sînt situate în exteriorul domeniului, cu schimbarea de variabilă $x \to (x' - l_{\rho^{(0)}})$, respectiv $x \to (l_{\rho^{(0)}} - x')$, ecuația (82) are forma

$$\frac{\partial^2 F(x', p)}{\partial(x' - l_{\rho^{(0)}})^2} = \gamma_p^2 F(x', p), \tag{84}$$

cu următoarea soluție în punctele de curbură concavă :

$$f(x', t) = f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(l_{\rho^{(0)}} - x')\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}, \tag{85}$$

respectiv în punctele de curbură convexă :

$$f(x', t) = f(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(x' - l_{\rho^{(0)}})\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{t}}. \tag{86}$$

3. CONCLUZII

Din punctul de vedere al adîncimii de pătrundere al difuziei mărimii scalare $f(\mathbf{r}, t)$ într-un mediu izotrop, liniar, omogen, și imobil, mărginit de suprafața regulată, se disting următoarele regimuri :

— *regimul tranzitoriu al difuziei de volum*, în care mărimea difuzează în întregul domeniu;

— *regimul tranzitoriu al difuziei normale*, în care mărimea difuzează parțial în domeniu, adîncimea de pătrundere fiind de ordinul celei mai mici raze principale de curbură, dacă centrul de curbură este în domeniu, și de ordinul segmentului $|l_{\rho^{(0)}} - l^{(0)}|$, dacă centrul de curbură este în exteriorul domeniului ; mărimea nu depinde de coordonatele tangențiale x_1 și x_2 ale sistemului de coordonate intrinsec, ci numai de coordonate $x_3 = x$ după normală ; regimul de difuzie normală este local, dacă difuzia superficială are loc numai în punctele situate pe normala interioară pînă în centrul de curbură cel mai apropiat, și totală, dacă difuzia normală are loc pe toată suprafața domeniului ;

— *regimul tranzitoriu al difuziei nete*, în care difuzia are loc numai pe o adîncime foarte mică $\Delta x^{(0)}$ la suprafața domeniului, iar legea de variație a mărimii este aceeași ca în semispațiu ; regimul de difuzie netă este local, dacă difuzia are loc numai în lungul normalei interioare a unui punct de pe suprafața domeniului, și totală, dacă difuzia este netă pe toată suprafața domeniului.

ANEXĂ

CALCULUL LAPLACEANULUI UNEI FUNCȚII SCALARE ÎN SISTEMUL DE COORDONATE INTRINSEC

Sistemul de coordonate curbiliniu ortogonal atașat unei suprafețe regulate $\Sigma^{(0)}$ (fără muchii sau vîrfuri ascuțite), numit și sistem intrinsec de coordonate, se definește de trei familii de suprafețe de coordonate după cum urmează :

— o familie de suprafețe de coordonate Σ paralele la suprafața de referință $\Sigma^{(0)}$, numite suprafețe de coordonate atașate;

— două familii de suprafețe de coordonate desfășurate de normalele x_3 la suprafețele atașate Σ în lungul liniilor principale de curbura Γ_1 și Γ_2 ale acestora.

Curbele de coordonate ale sistemului sînt următoarele: pentru coordonata x_3, normalele la suprafața de referință $\Sigma^{(0)}$ și deci și la suprafețele atașate Σ; pentru coordonatele x_1 și x_2, cele două linii principale de curbură Γ_1 și Γ_2 conținute în fiecare dintre suprafețele atașate Σ.

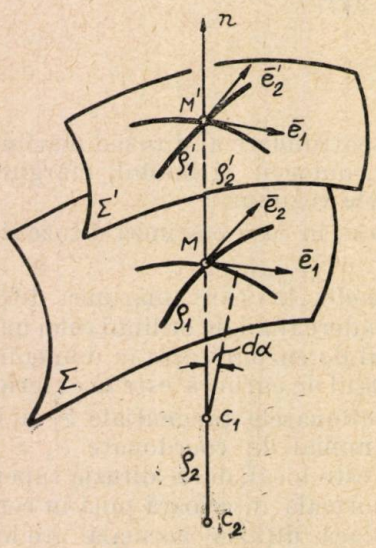


Fig. 9. — Figură pentru sistemul de coordonate intrinsec.

Versorii $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ și $\boldsymbol{e}_3$ ai sistemului de coordonate fiind orientați după tangentă, bitangentă și normală (triedrul lui Frenet), rezultă că sistemul de coordonate intrinsec este triortogonal.

Dacă ρ_1 și ρ_2 sînt razele principale de curbură ale liniilor de curbură Γ_1 și Γ_2, care se intersectează în punctul M de pe suprafața Σ, razele principale de curbură ρ_1' și ρ_2' ale liniilor de curbură Γ_1' și Γ_2', care se intersectează în punctul M' de pe suprafața Σ' la distanța $\Delta\, n$ (fig. 9) vor avea expresiile

$$\rho_1' = \rho_1 + \Delta n\,; \qquad \rho_2' = \rho_2 + \Delta n \tag{87}$$

Notînd cu $d\alpha$ unghiul infinit mic care corespunde unei deplasări infinit mici h_1, $dx_1 = d\,s_1$ efectuate de punctul M în lungul liniei principale de curbură Γ_1, din relația

$$ds_1 = \rho_1\, d\alpha = h_1(x_1, x_2, n)\, dx_1$$

rezultă

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\alpha}{h_1(x_1, x_2, n)\, dx_1}, \tag{88}$$

iar din relația

$$(\rho_1 + \Delta n)\, d\alpha = h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)\, dx_1$$

urmează

$$\frac{1}{\rho_1 + \Delta n} = \frac{d\alpha}{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)\, dx_1}. \tag{88'}$$

Din formulele (88) și (89) se obține

$$\frac{h_1(x_1, x_2, n)}{\rho_1} = \frac{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)}{\rho_1 + \Delta n} = \frac{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n) - h_1(x_1, x_2, n)}{\Delta n}$$

și la limită

$$\frac{h_1}{\rho_1} = \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}h_1}{h_3 \mathrm{d}x_3}; \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}x_3}, \tag{89}$$

Cu o demonstrație similară pentru raza principală de curbură ρ_2 se obține o relație analogă cu (89):

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x_3}. \tag{90}$$

În expresia laplaceanului unei funcții scalare $V(x_1, x_2, x_3)$,

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\right],$$

separînd termenii în care intervin derivatele parțiale după coordonata x_3, și ținînd cont de relațiile (88) și (89), se obține:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n} + l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) V, \tag{A.1}$$

în care s-a notat cu

$$l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) V \tag{91}$$

suma termenilor în care intervin derivatele parțiale în raport cu coordonatele x_1 și x_2. Dacă funcția V nu depinde de coordonatele tangențiale x_1 și x_2, expresia (91) este nulă și laplaceanul are expresia

$$\Delta V(x_3) = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}. \tag{92}$$

BIBLIOGRAFIE

1. G. Darboux, *Leçons sur la theorie generale des surfaces*, Paris, Gauthier Villar, 1941.
2. G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Berlin, Springer, 1937.
3. A. Avramescu, *The time constant of transient Phenomena*, Rev. d'Electr. et d'en., **1**, 2, 1956, 8–13.
4. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford, University Press, 1947.
5. A. Gray, G.B. Mathews, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, București, Edit. tehnică, 1958.

VARIAȚIA EXCITAȚIEI MAȘINII SINCRONE ÎN REGIMURI DINAMICE *)

DE

C. APETREI, M. DOGARU și I. BEȘTEA

621.313.322.013.8

Variația excitației reprezintă unul din factorii hotărîtori pentru comportarea mașinii sincrone în regimurile dinamice. În studiile de stabilitate pentru caracterizarea comportării mașinii sincrone se utilizează constantele de timp ale mașinii definite în mod clasic. În lucrare se prezintă studiul experimental al variației excitației mașinii sincrone în cazul schimbării bruște a sarcinii și intervenției forțării excitației; se urmărește stabilirea legăturii calitative dintre constantele de timp echivalente, caracteristice regimurilor dinamice, și constantele de timp, utilizate în mod curent la rezolvarea problemelor de stabilitate.

1. PUNEREA PROBLEMEI

1. 1. Analiza comportării sistemelor energetice interconectate face apel la reprezentări diferite ale mașinii sincrone în raport cu regimul sau cu natura problemei studiate. Stabilitatea statică și dinamică a sistemelor electroenergetice prin separarea nodurilor și utilizarea curenților de scurtcircuit [1] are ca punct de plecare reprezentarea grafică a mașinii sincrone prin intermediul curenților de scurtcircuit caracteristici în regim de funcționare staționar sau tranzitoriu (fig. 1).

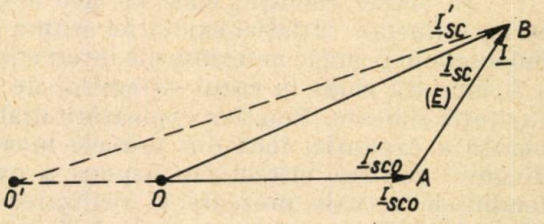


Fig. 1. — Reprezentarea mașinii sincrone prin curenții de scurtcircuit în regim staționar și tranzitoriu.

În figura 1 laturile triunghiului OAB reprezintă curenții de scurtcircuit în sarcină $\underline{I}_{sc}$, în gol $\underline{I}_{sco}$ și curentul de sarcină $\underline{I}$, corespunză-

*) Comunicare prezentată la a XV-a sesiune științifică a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, mai 1969.

tori unui anumit nivel al excitaţiei şi reactanţei sincrone a maşinii. Este de remarcat că, la scară potrivit aleasă, fazorul $\underline{I}_{sc}$, reprezintă şi fazorul tensiunii electromotoare de mărime şi de fază date. Reprezentarea respectivă, valabilă cu anumite aproximaţii pentru regimuri staţionare, poate fi utilizată şi la analiza regimurilor dinamice dacă în locul curenţilor de scurtcircuit $\underline{I}_{sc}$, $\underline{I}_{sco}$, se introduc curenţii $\underline{I}'_{sc}$, şi $\underline{I}'_{sco}$ corespunzători aceleiaşi tensiuni electromotoare, dar calculaţi pentru reactanţa tranzitorie a maşinii sincrone.

Studiul regimurilor dinamice, la excitaţie constantă, prin considerarea a n maşini sincrone — fizice sau echivalente — se dezvoltă prin determinarea fazei curentului de scurtcircuit $\underline{I}'_{sc}$, respectiv a tensiunii electromotoare de mărime constantă.

În cadrul acestei reprezentări, analiza influenţei excitaţiei maşinii sincrone interconectate la sistem asupra comportării sale poate fi făcută prin studiul modificării fazei şi mărimii fazorului $\underline{I}'_{sc}$ (sau a tensiunii electromotoare a maşinii sincrone), determinate de variaţia excitaţiei. În acest mod se procedează în lucrarea [2] care-şi propune optimizarea parametrilor caracteristici sistemului de excitaţie şi maşinii sincrone prin considerarea caracteristicilor sistemului energetic. În lucrarea amintită s-a analizat cu prioritate variaţia fazei tensiunii electromotoare a maşinii sincrone, considerîndu-se variaţia ei în timp, corespunzător unei variaţii exponenţiale, caracterizată de o constantă de timp echivalentă, definită de parametrii caracteristici sistemului de excitaţie şi maşinii sincrone.

1.2. Variaţia curentului de excitaţie şi deci a tensiunii electromotoare induse depinde de inerţia sistemului de excitaţie şi a maşinii sincrone. În cazul sistemelor de excitaţie moderne, inerţia acestora, în mod normal, este cu mult mai mică şi într-o primă aproximaţie poate fi neglijată în raport cu inerţia caracteristică proceselor electromagnetice tranzitorii ale maşinii sincrone. Constantele de timp fizice, definite în mod clasic, caracteristice circuitului de excitaţie al maşinilor sincrone de mare şi de foarte mare putere au valori medii de ordinul secundelor (T_d — constanta longitudinală a circuitului de excitaţie cu indusul deschis), zecimilor de secundă şi chiar secunde (T'_d — constanta longitudinală tranzitorie) sau sutimilor de secundă pînă la valori de ordinul zecimilor de secundă (T''_d — constanta longitudinală supratranzitorie).

În aceste condiţii, dacă se face abstracţie de regimul supratranzitoriu, influenţa variaţiei excitaţiei asupra comportării dinamice a maşinii, îndeosebi în primele momente ale intervenţiei regimului tranzitoriu, rezultă a fi limitată chiar în cazul sistemelor de excitaţie rapide cu plafoane de excitaţie ridicate. Practica exploatării arată însă influenţa de mare însemnătate a excitaţiei încă din primele momente ale intervenţiei regimului dinamic mărirea vitezei de răspuns a excitaţiei constituind una dintre tendinţele actuale prezente la realizarea practică a maşinilor sincrone. „Paradoxul" prezent în cazul de faţă între teoria şi practica exploatării, neelucidat încă în literatura de specialitate, îşi găseşte explicaţia în faptul că inerţia magnetică a maşinii sincrone se caracterizează prin constante de timp fizice, definite în condiţii care diferă de condiţiile ce intervin la variaţiile în limite largi ale excitaţiei şi care, în consecinţă, sînt diferite şi, de regulă, cu mult mai mari în raport cu „constantele de timp echivalente", proprii acestor regimuri.

1.3. Dintre factorii importanți care influențează inerția electromagnetică a mașinii sincrone și deci variația excitației mașinii reținatenția starea de saturație a sistemului magnetic al mașinii, în condițiile în care au loc variații în limite largi ale excitației, starea circuitului indus-deschis, funcționarea în gol sau închis, funcționarea în sarcină, și modificările de structură ale sistemului care determină regimul tranzitoriu al mașinii.

Obiectul lucrării de față constă în analiza influenței factorilor enumerați asupra dinamicii procesului de variație a excitației mașinii sincrone pe baza unor reprezentări de natură teoretică și experimentală. Interesează deci determinarea variației excitației mașinii sincrone și deci și a t.e.m. induse în cazul intervenției forțării excitației la limita plafoanelor prescrise. Cunoașterea evoluției în timp a procesului prezintă, după cum s-a arătat, o deosebită importanță practică pentru rezolvarea problemelor de stabilitate dinamică a mașinilor sincrone și ale sistemelor energetice în condiții cît mai apropiate de condițiile reale.

Este de menționat că s-a urmărit introducerea unor parametri funcționali caracteristici, ușor de determinat prin calcul sau experimental, care pot fi utilizați în studiile curente de stabilitate, cu respectarea laturii fizice a fenomenelor; această cale evident că nu exclude metodele de studiu de detaliu al proceselor cu ajutorul tehnicii de calcul electronice, cînd rezultatele pot avea o mare exactitate, dar sînt greu de utilizat în practică.

2. VARIAȚIA EXCITAȚIEI ÎN CAZUL REGIMURILOR DINAMICE

2.1. Considerarea saturației circuitului magnetic al mașinii sincrone prezintă mare importanță pentru aprecierea corectă a legii de variație a excitației în cazul regimurilor dinamice.

În cazul mașinii sincrone nesaturate cu circuitul indus deschis (mașina în gol) (fig. 2), în cazul intervenției unei creșteri în salt a tensiunii aplicate

Fig. 3. — Variația $I_0 = f(t)$ în cazul creșterii în salt a tensiunii de excitație de la valoarea 0 la valoarea-plafon p_s.

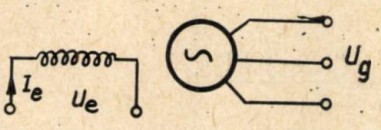
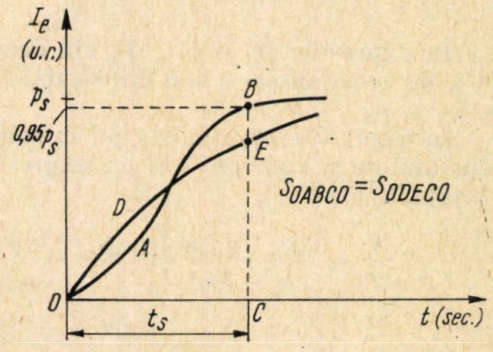


Fig. 2. — Schema de principiu a mașinii sincrone la funcționarea în gol.



circuitului de excitație U_e de la valoarea zero la valoarea plafon p_s, curentul de excitație I_e, respectiv t.e.m. indusă, variază după o lege exponențială de forma

$$I_e = p_s\left(1 - e^{-\frac{t}{T_d}}\right), \tag{1}$$

$$U_g = p_t\left(1 - e^{-\frac{t}{T_d}}\right). \tag{1'}$$

În relațiile (1) și (1'), I_e și U_g se exprimă în unități relative, iar p_s și p_t — plafonul de tensiune — se definesc ca rapoartele

$$p_s = \frac{I_{e\max}}{I_{en}}; \qquad p_t = \frac{U_{g\max}}{U_{gn}} \tag{2}$$

prin alegerea potrivită a valorilor nominale, de referință I_{en} și U_{gn}. Constanta de timp T_a, determinată prin calcul sau experimental, corespunde valorilor nesaturate ale reactanței totale a circuitului de excitație al generatorului sincron.

În cazul considerării saturației circuitului magnetic cu ajutorul unei expresii care aproximează caracteristica magnetică a mașinii la funcționarea în gol, de forma

$$U_g = \frac{aI_e}{1 + bI_e}, \tag{3}$$

expresiile care definesc variația curentului de excitație I_e între limitele 0 și p_s și ale t.e.m. U_g între limitele 0 și p_t se pot stabili sub formă implicită ca funcții în raport cu timpul de forma

$$\frac{t}{T_a} = \frac{(p_t-1)p_t}{(p_s-1)p_s}\left\{\ln\frac{(p_t-1)p_s+(p_s-p_t)I_e}{(p_t-1)(p_s-I_e)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(p_s-1)(p_s-p_t)I_e}{(p_t-1)[p_s(p_t-1)+(p_s-p_t)I_e]}\right\}, \tag{4}$$

$$\frac{t}{T_a} = \frac{(p_t-1)p_t}{(p_s-1)p_s}\left[\ln\frac{p_t}{p_t-U_g} + \frac{p_s-p_t}{p_t(p_t-1)}U_g\right]. \tag{5}$$

În expresiile (4) și (5), T_a are aceeași semnificație ca în relațiile (1) și (1'), iar constantele a și b din relația (3) se definesc în raport cu plafoanele p_s și p_t.

În cazul variației excitației în salt de la valoarea 1 la p_s, respectiv a tensiunii de la valoarea 1 la p_t, expresiile (4) și (5) capătă forma stabilită în lucrarea (3):

$$\frac{t}{T_a} = \frac{(p_t-1)p_t}{(p_s-1)p_s}\left\{\ln\frac{(p_t-1)p_s+(p_s-p_t)I_e}{p_t(p_s-I_e)} + \right.$$
$$\left. + \frac{p_s(p_s-p_t)(I_e-1)}{p_t[(p_t-1)p_s+(p_s-p_t)I_e]}\right\}, \tag{6}$$

$$\frac{t}{T_a} = \frac{(p_t-1)p_t}{(p_s-1)p_s}\left[\ln\frac{p_t-1}{p_t-U_g} + \frac{p_s-p_t}{(p_t-1)p_t}(U_g-1)\right]. \tag{7}$$

Pentru ilustrarea influenței saturației sistemului magnetic asupra variației excitației, în figura 4 sînt redate curbele $U_g = f(t)$ și $I_e = f(t)$, reprezentate pe baza oscilogramelor, înregistrarea la încercarea unei mașini

sincrone în gol cu excitație variabilă în salt de la zero la p_e. Mașina încercată are caracteristicile $U_n = 400$ V; $I_n = 5{,}8$ A; $I_{en} = 2{,}8$A; $m=3$. Caracteristica magnetică la funcționarea în gol a mașinii încercate este reprezentată în figura 5.

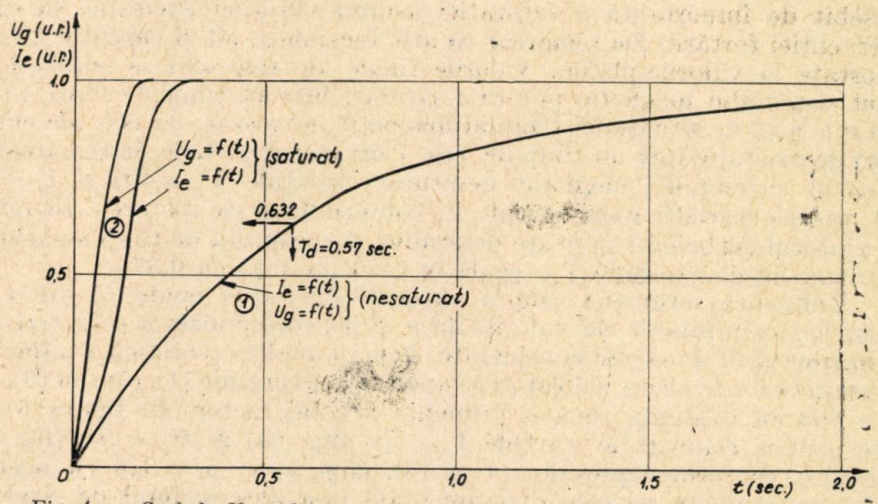


Fig. 4. — Curbele $U_g = f(t)$ la sistem magnetic nesaturat și puternic saturat.

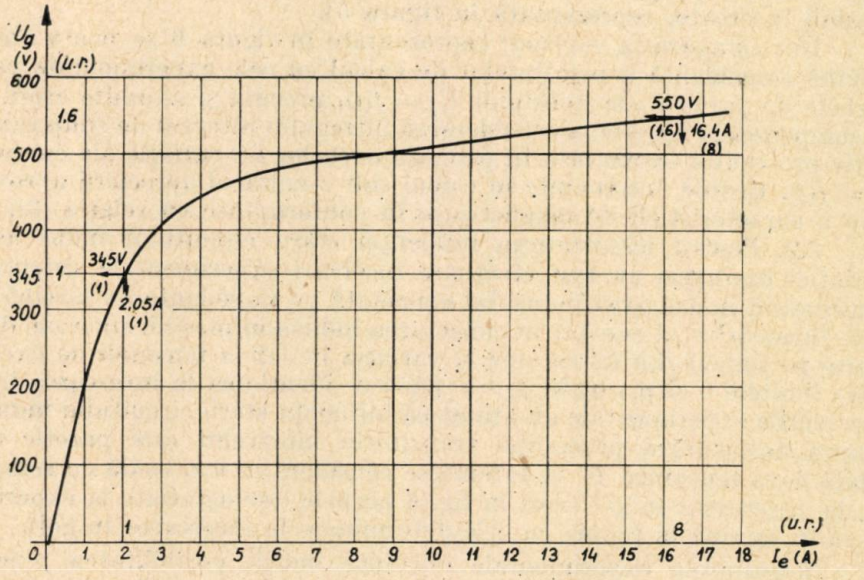


Fig. 5. — Caracteristica de magnetizare la funcționarea în gol a mașinii sincrone încercate.

Curbele *1* din figura 4 reprezintă variațiile în cazul cînd sistemul magnetic al mașinii este practic nesaturat ($I_e = 0 \ldots 1{,}05$ A; $U_g = 0 \ldots$ 220 V), iar curbele *2* cînd sistemul magnetic este puternic saturat ($I_e = 0 \ldots$ 16,4 A; $U_g = 0 \ldots 550$ V). Este de menționat că tensiunea de alimentare

a excitaţiei U_e, variabilă în salt, a fost în toate cazurile aleasă convenabil şi aplicată direct la bornele înfăşurării de excitaţie în a cărui circuit nu au existat rezistenţe adiţionale (fig. 2).

Se observă din comparaţia curbelor reprezentate în figura 4 influenţa deosebit de importantă a saturaţiei asupra variaţiei excitaţiei în cazul intervenţiei forţării. De remarcat că atît tensiunea, cît şi curentul au fost raportate la valorile-plafon. Valorile finale ale tensiunii se stabilesc, în cazul sistemului magnetic puternic saturat, într-un timp de circa 10 ori mai mic faţă de situaţia sistemului magnetic nesaturat, iar cele ale curentului de excitaţie într-un timp de cca 7 ori mai mic. Este de remarcat că în cazul sistemului magnetic nesaturat variaţiile $U_g = f(t)$ şi $I_e = f(t)$ sînt practic variaţii exponenţiale în conformitate cu ipotezele teoretice. Cu ajutorul curbelor *1* se poate determina şi constanta de timp nesaturată a circuitului de excitaţie T_d, egală în cazul de faţă cu 0,57 s.

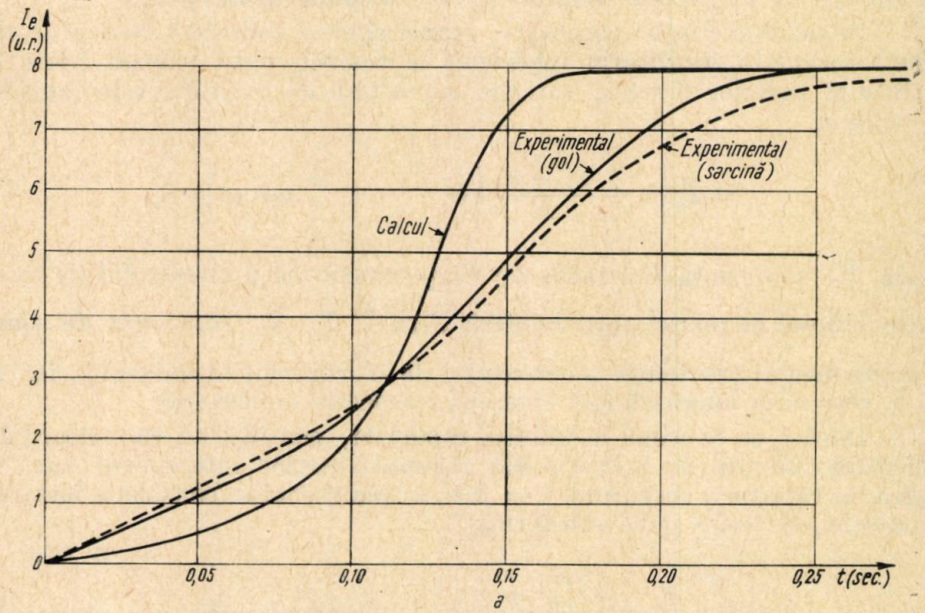
Influenţa saturaţiei asupra variaţiei excitaţiei poate să difere de la caz la caz în funcţie de valorile lui p_s şi p_t, corespunzător caracteristicii de magnetizare a maşinii considerate. Pentru analiza teoretică a influenţei saturaţiei este de aceea indicat să se apeleze la expresiile (4), (5) sau (6), (7), care scot în evidenţă tocmai influenţa acestui factor. În figura 6 sînt date pentru comparaţie curbele $I_e = f(t)$ (fig. 6*a*) şi $U_g = f(t)$ (fig. 6*b*), calculate, conform expresiilor (4) şi (5), la $p_s = 8$; $p_t = 1{,}6$ cu aceleaşi curbe determinate pe cale experimentală (s-a ales regimul de referinţă $U_{gno} = 345$ V şi $I_{eno} = 2{,}05$ A, conform caracteristicii de magnetizare a maşinii încercate, reprezentată în figura 5).

Din comparaţia curbelor reprezentate în figura 6 se poate observa o bună coincidenţă a rezultatelor de calcul cu cele experimentale pentru curbele de variaţie ale tensiunii $U_g = f(t)$, precum şi anumite erori, care se compensează practic la considerarea întregului interval de timp caracteristic procesului tranzitoriu în privinţa curbelor de variaţie ale curentului $I_e = f(t)$. Erorile intervenite în calcul sînt rezultatul aprecierii aproximative a caracteristicii de magnetizare în conformitate cu relaţia (3).

2.2. Pentru identificarea influenţei stării circuitului indus asupra variaţiei excitaţiei au fost efectuate încercări experimentale sistematice, considerînd înfăşurarea indusului conectată pe impedanţe de sarcină diferite. Încercările au constat în conectarea indusului maşinii sincrone dezexcitate pe impedanţa de sarcină şi variaţia în salt a tensiunii de excitaţie între limitele 0 şi p_s, unde p_s s-a păstrat identic ca la încercarea în gol. Încercările experimentale au arătat că influenţa stării circuitului indusului asupra desfăşurării procesului tranzitoriu intervenit este practic neglijabilă dacă tensiunea U_g în sarcină se consideră în *u.r.* egală cu tensiunea U_g la încercarea în gol (vezi în fig. 6 curbele oscilografiate la experimentarea în sarcină în raport cu cele determinate la încercarea în gol).

Rezultatele experimentale obţinute indică posibilitatea reprezentării variaţiilor $I_e = f(t)$; $U_g = f(t)$ cu ajutorul expresiilor de calcul (4) şi (5), unde se determină pe caracteristica magnetică în gol corespunzător valorii lui p_s intervenit la încercarea în sarcină. Erorile introduse prin introducerea expresiilor de calcul atunci cînd acestea se utilizează pentru descrierea procesului tranzitoriu în sarcină sînt de acelaşi ordin de mărime cu cele intervenite la determinarea aceloraşi variaţii cu circuitul indus deschis.

2.3. Influența modificării structurii sistemului analizat asupra procesului de variație a excitației s-a determinat considerînd aspectele importante care urmează a fi studiate în cadrul stabilității sistemelor electroenergetice cu ajutorul metodelor curent aplicate în practică [1]. În aceste condiții a interesat doar procesul tranzitoriu al sistemului analizat. Se consideră deci o mașină sincronă conectată la rețea, la bornele căreia,



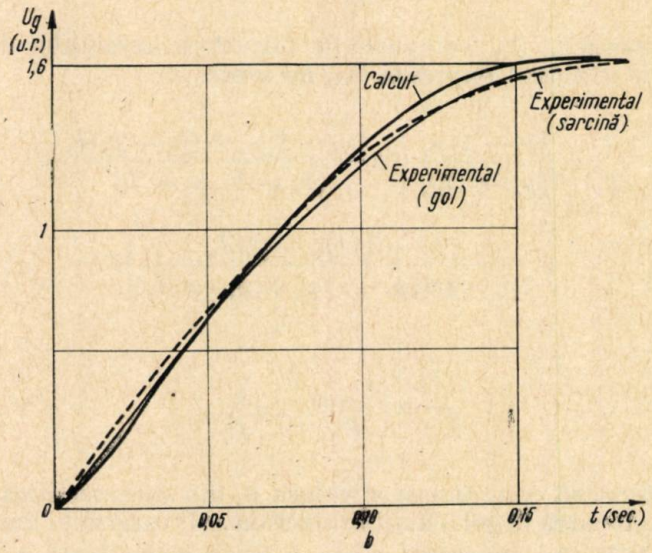


Fig. 6. — Curbele de variație : a — $I_e = f(t)$; b — $U_g = f(t)$, calculate și determinate experimental.

simultan cu intervenția unui scurtcircuit trifazat (modificarea structurii sistemului s-a considerat că intervine în acest mod), este aplicată și forțarea excitației între limitele 0 și $\left(\frac{U_{e\max}}{U_{en}} - 1\right)$.

Este cunoscut că o asemenea problemă poate fi rezolvată prin scrierea ecuațiilor mașinii sincrone și integrarea lor prin metode care pot diferi în funcție de mijloacele tehnice de care dispune operatorul.

În cazul excitației constante, atunci cînd se consideră doar procesul electromagnetic tranzitoriu intervenit la scurtcircuitul trifazat brusc al indusului anterior deschis, variația curentului de excitație este descrisă de relația

$$i_e = I_{eo}\left[1 + \frac{x_d - x'_d}{x'_d}\left(e^{-\frac{t}{T'_d}} - e^{-\frac{t}{T_a}}\cos \omega t\right)\right], \tag{8}$$

unde T'_d reprezintă constanta de timp tranzitorie a circuitului de excitație definită de relația aproximativă $T'_d \cong \frac{x'_d}{x_d} T_a$, T_a constanta de timp a componentei aperiodice a curentului de scurtcircuit al indusului, iar x_d și x'_d reactanța longitudinală sincronă, respectiv tranzitorie.

Dacă i_e se exprimă în unități raportate, considerînd ca valoare de referință curentul de excitație din regimul anterior intervenției s.c. I_{eo} legea de variație a curentului $i_e = f(t)$, în cazul cînd se consideră forțarea excitației, se poate pune sub forma

$$i_e = 1 + \frac{x_d - x'_d}{x'_d}\left(e^{-\frac{t}{T'_d}} - e^{-\frac{t}{T_a}}\cos \omega t\right) + i_{ef}(t), \tag{9}$$

unde componenta $i_{ef}(t)$, componenta forțată a curentului de excitație, are o expresie analoagă expresiei (4), de forma

$$\frac{t}{T'_d} = \frac{(p_t - 1)p_t}{(p_s - 1)p_s}\left\{\ln \frac{(p_t - 1)p_s + (p_s - p_t)I_e}{(p_t - 1)(p_s - I_e)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(p_s - 1)(p_s - p_t)I_e}{(p_t - 1)[(p_t - 1)p_s + (p_s - p_t)I_e]}\right\}, \tag{10}$$

în care

$$p_s = \left(\frac{U_{e\max}}{U_{en}} - 1\right). \tag{11}$$

iar p_t se determină corespunzător valorii p_s din caracteristica de magnetizare la funcționarea în gol a mașinii sincrone. I_e variază în limitele 0 și p_s.

Verificările experimentale arată o bună coincidență a rezultatelor de calcul stabilite cu ajutorul expresiei (5) cu cele experimentale.

În figura 7 sînt reprezentate curbele $i_e = f(t)$, calculată cu expresia (9), și $i_e = f(t)$, oscilografiată pentru mașina sincronă, ai cărei parametri au valorile

$x_d = 1{,}25$; $x'_d = 0{,}218$; $T'_d = 0{,}1$ s; $T_a = 0{,}03$ s; $p_s = 6{,}6$; $p_t = 1{,}51$.

În figură sînt reprezentate doar componentele tranzitorii din expresia (9).

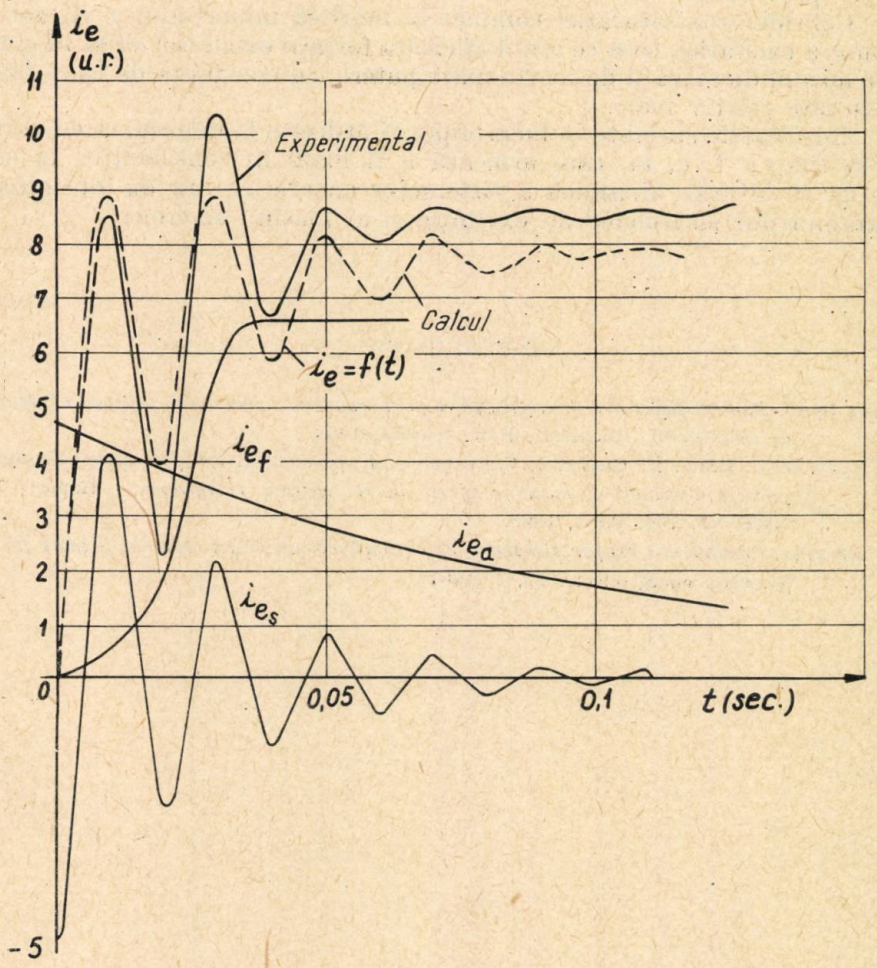


Fig. 7. — Variația $I_e = f(t)$ în cazul intervenției forțării excitației simultan cu intervenția scurtcircuitului brusc.

Este de semnalat că valoarea componentei $i_{ef}(t)$ se stabilizează după un timp egal aproximativ cu 0,035 s, iar tot procesul tranzitoriu practic se stabilizează la $t \cong 0{,}05$ s. Aceste valori sînt cu mult mai mici decît cele ce s-ar fi obținut în cazul cînd procesul tranzitoriu s-ar fi desfășurat corespunzător constantei de timp tranzitorii $T'_d = 0{,}1$ s.

3. CONCLUZII

În lucrare s-a stabilit o metodă relativ simplă pentru determinarea variaţiei excitaţiei maşinii sincrone în cazul intervenţiei unor regimuri dinamice. Reţine atenţia influenţa determinantă prezentată de aprecierea corectă a saturaţiei circuitului magnetic al maşinii sincrone asupra desfăşurării procesului.

Considerarea saturaţiei conduce la mărirea importantă a vitezei de răspuns a excitaţiei, ceea ce arată eficienţa forţării excitaţiei chiar în cazul unor maşini de mare şi de foarte mare putere, cu constanta de timp fizice nesaturate relativ mari.

Rezultatele stabilite în lucrare pot fi utilizate la determinarea variaţiei în timp a t. e. m. care urmează a fi luată în consideraţie în studiile de stabilitate dinamică a sistemelor energetice sau de optimizare a parametrilor sistemelor de excitaţie şi ai maşinii sincrone.

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Dimo, *Analiza sistemelor electroenergetice prin separarea nodurilor şi utilizarea curenţilor de scurtcircuit*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1962.
2. C. Apetrei, C. Bălă, L. Groza, I. Cantaragiu, *L'optimisation des paramétres d'ensamble systeme d'excitation, machine synchrone et système énérgetique*, Raport CIGRE No. 109, Paris, 1968.
3. C. Apetrei, *Consideraţii asupra sistemelor de excitaţie ale maşinilor sincrone de mare putere* St. cerc. energ. electr. **17**, 3 (1967).

FORŢAREA EXCITAŢIEI LA MOTOARELE SINCRONE*)

DE

MIHU BÂRGĂUANU

Cu ajutorul unui model analogic se urmăreşte efectul forţării excitaţiei asupra comportării dinamice a motorului sincron supus la goluri de tensiune. Se determină durata limită a acestor goluri de diferite nivele în care motorul se menţine în sincronism, ca funcţie de plafonul de forţare şi se trag concluzii privitoare la eficienţa acestuia.

Întreruperea accidentală a funcţionării motoarelor sincrone provine adesea din căderea tensiunii de alimentare la zero (mai rar) sau la o oarecare valoare pe o anumită durată (gol de tensiune). S-a definit în lucrări anterioare [1] — [3] „durata-limită" în cadrul căreia motorul nu iese din sincronism. Fără a reveni asupra definiţiei, se reaminteşte că această durată limită depinde de parametrii interni şi externi ai motorului. Analiza acestei dependenţe a parametrilor interni şi a celor externi de nivelul de fund al golului de tensiune sau de nivelul de salt al cuplului a fost prezentată în alte lucrări [3], [9]. S-a mai prezentat şi dependenţa de reglajul excitaţiei pentru cazuri particulare. S-a conchis atunci că reglajul excitaţiei după curent nu este convenabil.

În scopul măririi siguranţei în funcţionare a motorului sincron este necesar a se mări cît mai mult cu puţină durata limită. Dat fiind că asupra parametrilor interni şi-a spus cuvîntul irevocabil constructorul, iar dintre parametrii externi asupra sarcinii a decis tehnologia şi asupra variaţiei tensiunii de alimentare dispune întîmplarea, rămîne ca liberă doar tensiunea de excitaţie. Reglajul ei, oricît de rapid, este, cum s-a amintit, neconvenabil. Rămîne dar s-o forţăm. Problema este a şti la ce plafon şi ce se cîştigă în durata limită. Evident că acest cîştig nu va fi independent de parametrii interni ai maşinii şi nici de nivelul golului de tensiune. Prin urmare, cercetarea prezentată aici urmăreşte să stabilească dependenţa multiplă a duratei limite de :

— un parametru intern (o reactanţă, momentul de inerţie etc.);
— nivelul de fund al golului de tensiune ;
— plafonul forţării excitaţiei.

*) Comunicarea prezentată la a XV-a sesiune ştiinţifică a Institutului de Energetică al Academiei R.S. România, mai 1969.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 169—180, 1970

Metoda folosită nu prezintă particularităţi deosebite faţă de cele din cercetările anterioare. Este vorba de efectuarea de calcule pe un model analogic al maşinii soncrone, care principial se bazează pe ecuaţiile Park, cu deosebire că într-un anumit fel s-a luat în considerare şi saturaţia (s-a folosit curba de magnetizare aşa cum este prezentată în figura 1, care aproximează destul de bine curba „standard").

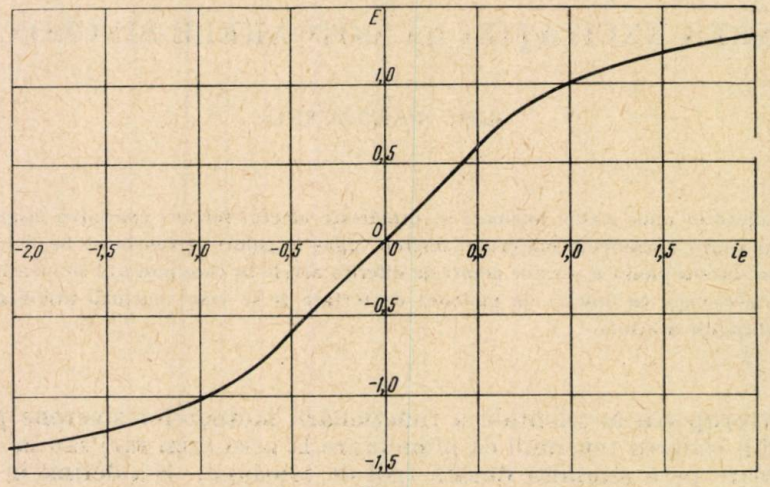
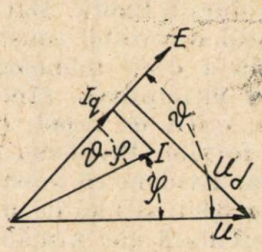


Fig. 1

Ca parametri ai motorului de bază (standard) s-au admis următoarele valori : $x_{ad} = 1{,}5$; $x_{aq} = 1{,}12$; $T_e = 4$; $H = 1\,200$; $r_D = r_Q = 0{,}021$; $x_{\sigma D} = x_{\sigma Q} = 0{,}002$; valori care au fost variate în cursul calculelor din limite largi. Sporadic au primit variaţii şi $x_{\sigma a} = 0{,}07$; $x_{\sigma e} = 0{,}05$; $r_a = 0{,}01$.

Pentru a menţine factorul de putere constant s-au determinat condiţiile iniţiale pentru fiecare set de calcule, astfel încît unghiul intern cvasistaţionar să rezulte conform relaţiilor din figura 2.



$$\mathcal{Y}_q = -U_d = \sin\vartheta, \qquad (1)$$

$$I_q = \frac{\mathcal{Y}_q}{x_q} = \frac{\sin\vartheta}{x_q}, \qquad (2)$$

$$I\cos\varphi = 1, \qquad (3)$$

$$I_q = I\cos(\vartheta-\varphi) = \frac{\cos(\vartheta-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (4)$$

comparînd (4) cu (2)

$$\sin\vartheta = x_q\frac{\cos(\vartheta-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (5)$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{x_q}{1-x_q\operatorname{tg}\varphi}, \qquad (6)$$

dacă $\cos\varphi = 1 \rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0$,

$$\vartheta = \operatorname{arctg} x_q \qquad (7).$$

Fig. 2

Rezultatele obținute se sintetizează în diagramele subsecvente (fig. 3). Ele reprezintă durata-limită funcție de nivelul tensiunii pentru mașina standard și excitația nominală. Valorile ordonatelor din diagramele următoare se raportează la cele din aceasta.

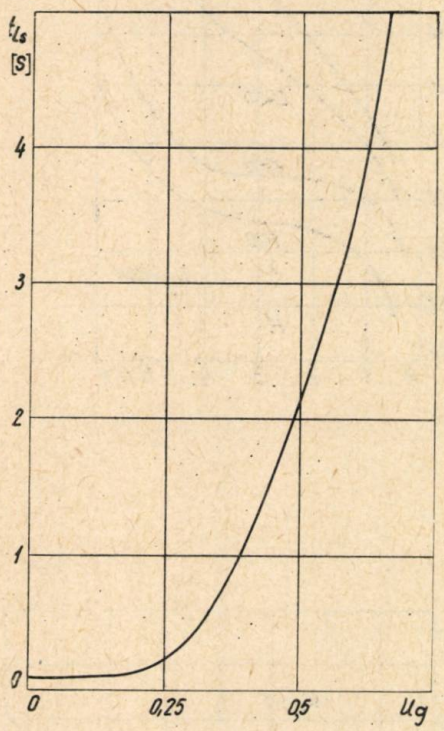


Fig. 3

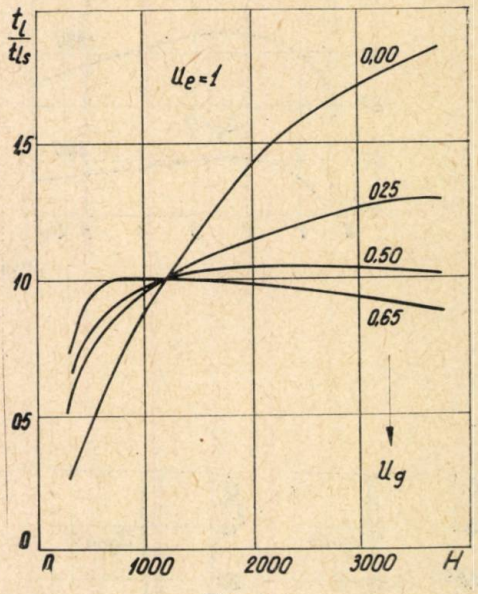


Fig. 4

În diagrama din figura 4, durata-limită este reprezentată ca funcție de constanta de inerție pentru diferitele valori ale tensiunii de fund la excitația nominală; o creștere substanțială a duratei limită cu creșterea constantei de inerție are loc doar pentru căderea tensiunii la zero, unde cîștigul în valoare absolută este totuși foarte mic.

Influența forțării excitației poate fi urmărită în figura 5, în care prima diagramă reprezintă dependența duratei-limită de plafonul de forțare pentru diferite constante de inerție la căderea tensiunii la zero, iar a doua în cazul căderii tensiunii la 0,25. În prima diagramă este de observat maximul din jurul valorii plafonului 2, iar în cea de-a doua începutul unei inflexiuni (pentru constante de inerție mici) tot în jurul plafonului 2.

Pentru nivelele de tensiune 0,5 și 0,65, diagramele din figura 6 ne arată că o forțare la plafonul 2, respectiv 1,5, asigură o durată limită infinită.

Diagramele din aceleași planuri se repetă pentru constanta de timp a excitației variabilă. Figura 7 prezintă astfel diagrama duratei limite funcție de constanta de timp a excitației. Spre deosebire de figura 4, aici influența parametrului este mai puternică la căderi de tensiune relativ mici (nivel ridicat).

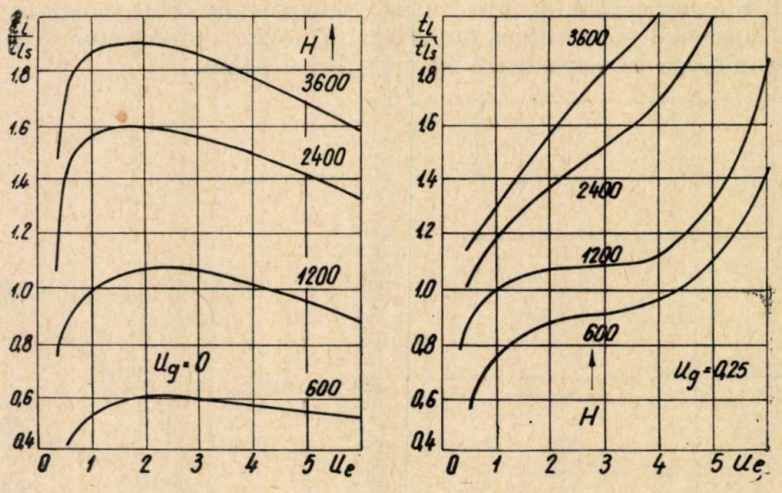


Fig. 5

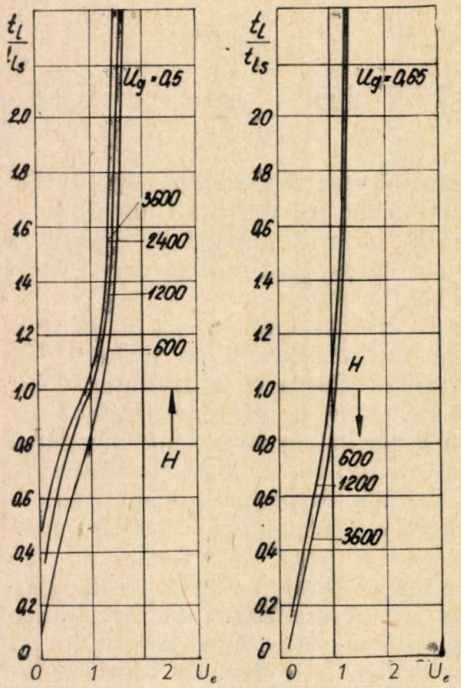


Fig. 6

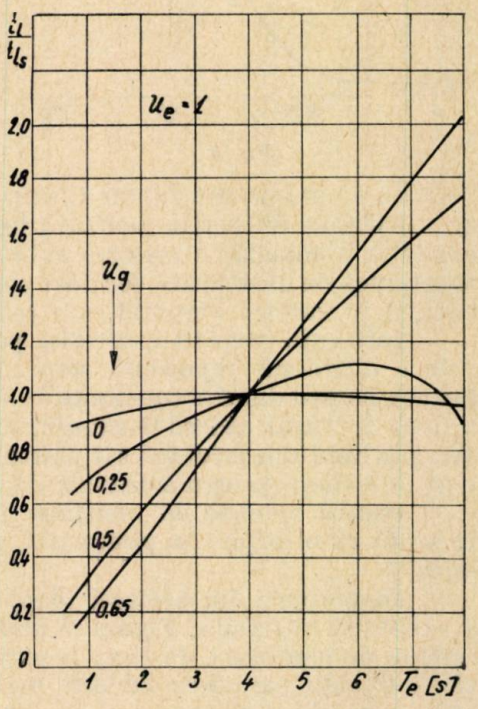


Fig. 7

Reprezentînd efectele forțării excitației, diagramele din figurile 8 și 9 semnalează pentru nivelul zero același maxim în jurul plafonului 2, aceeași inflexiune pentru căderi la 0,25 din tensiunea nominală și aceeași durată limită infinită pentru căderi la 0,5 și 0,65.

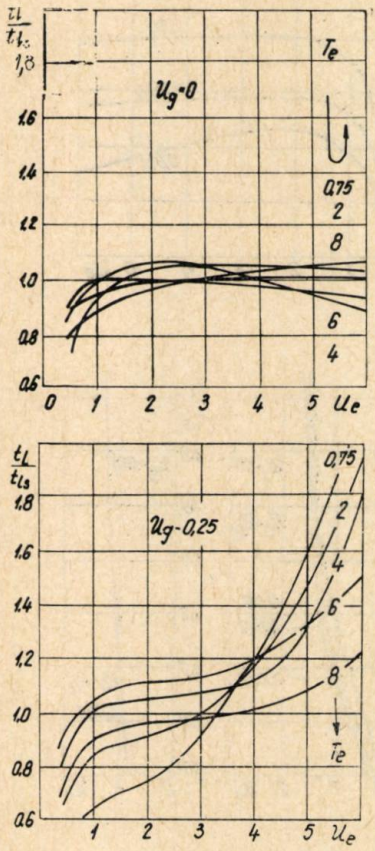


Fig. 8

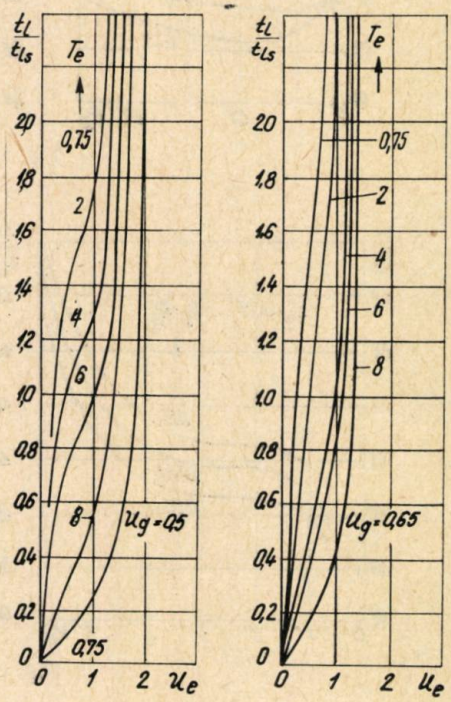


Fig. 9

Influența rezistenței de amortizare asupra duratei limită, ilustrată de figura 10, nu pare atît de importantă pe cît se admite în general. A doua diagramă reprezintă dependența duratei-limite de plafon de excitație.

Nimic de dăugat la constatările anterioare precum nimic nou nici în diagramele din figura 11.

Influența reactanței sincrone, respectiv a reactanței de reacție, este vizualizată în diagrama din figura 12. După cum se vede ea este foarte puternică. Tot în această figură se află diagrama care reprezintă efectul forțării excitației pentru cazul dispariției totale a tensiunii, iar figura 12 cuprinde trei diagrame pentru cazul golurilor la nivelele 0,25 ; 0,5 și 0,65; aici influența forțării excitației are aceeași alură ca în cazurile precedente.

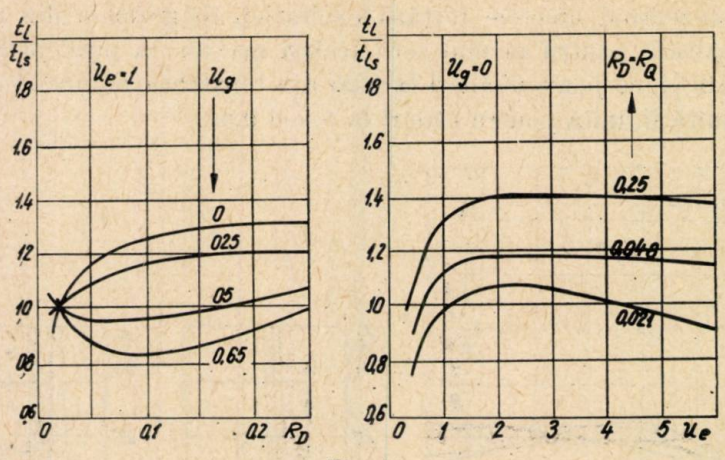


Fig. 10

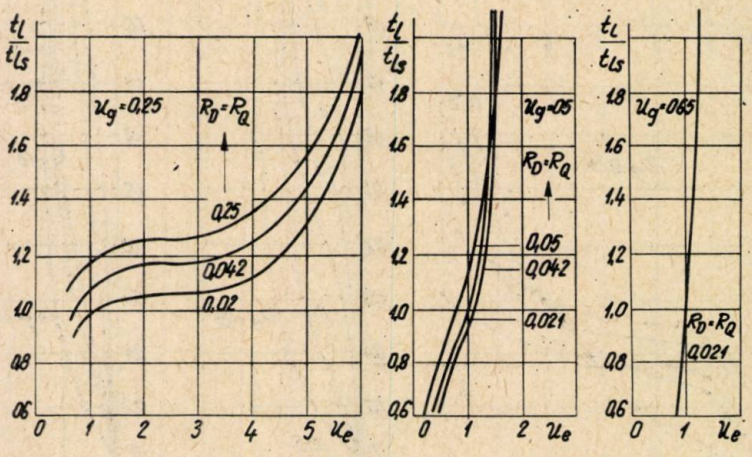


Fig. 11

Figura 14 demonstrează puţina importanţă pe care o are valoarea reactanţei de scăpări a indusului. La o variaţie a reactanţei de scăpări de la simplu la de patru ori, durata limită nu variază decît foarte puţin. Acelaşi lucru se poate spune şi de reactanţa de scăpări a înfăşurării de amortizare.

În figura 15 şi 16 se reprezintă evoluţia în timp a unghiului intern şi a componentei longitudinale a curentului pentru diferite nivele ale golului de tensiune şi diferite plafoane de forţare, respectiv diferite constante de inerţie.

În figura 17 se prezintă unghiul intern, alunecarea şi cuplul electromagnetic funcţie de timp, alunecare şi cuplu electromagnetic funcţie de unghiul intern pentru plafoanele *1*, respectiv *6* de forţare a excitaţiei.

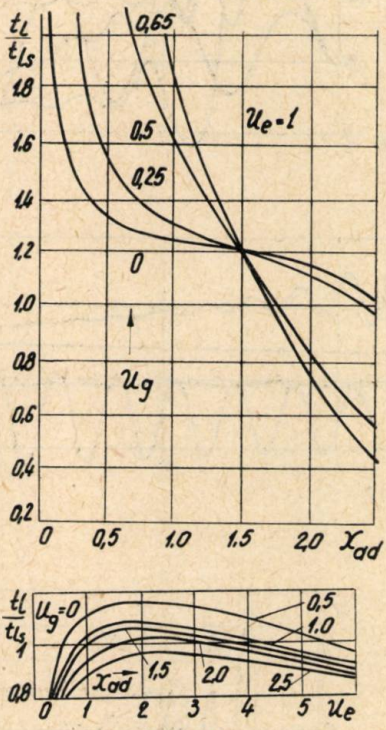


Fig. 12

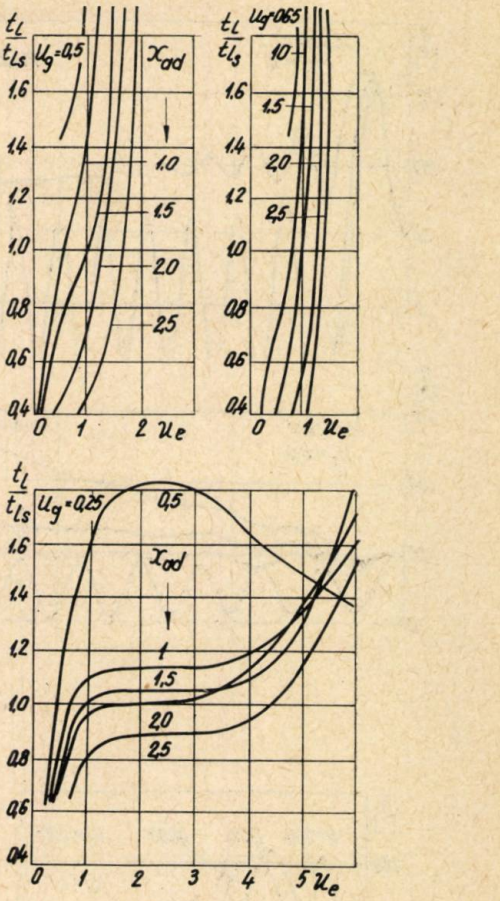
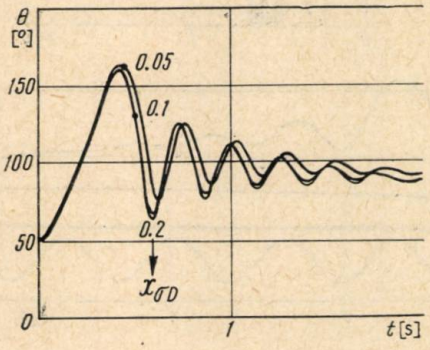


Fig. 13



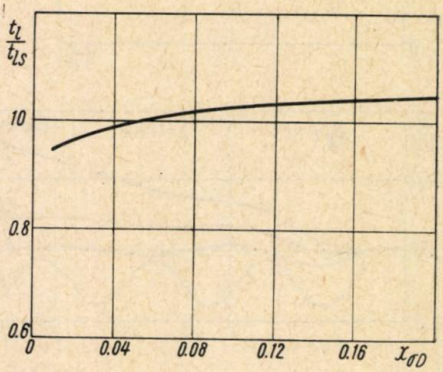


Fig. 14

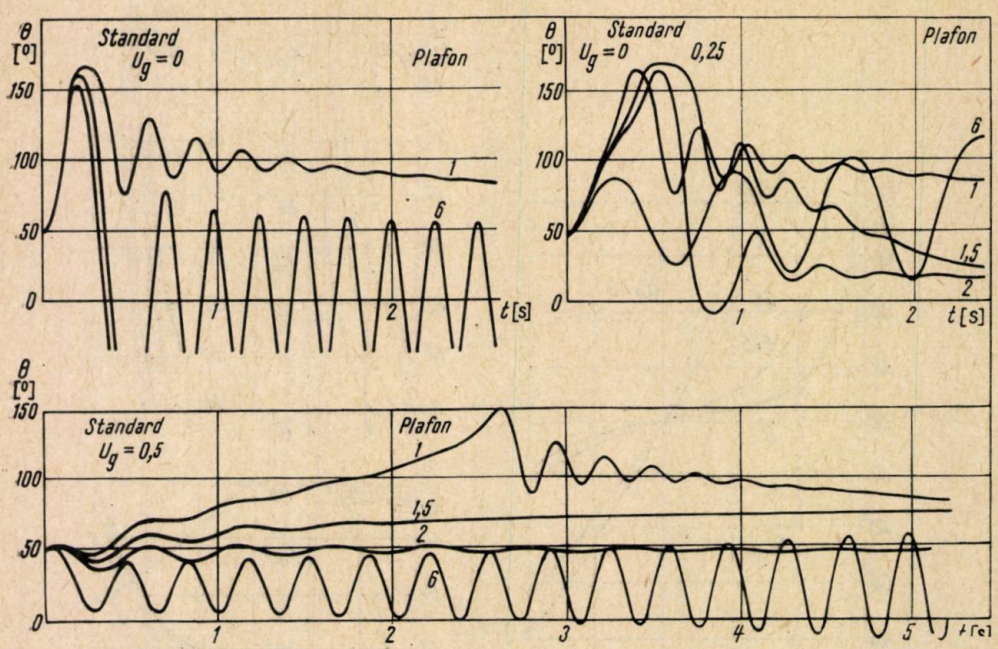

θ [°]
Standard
$U_g = 0$
Plafon
150
100
50
0
1
6
2
t [s]
θ [°]
Standard
$U_g = 0$
0,25
Plafon
150
100
50
0
6
1
1,5
2
1
2
t [s]
θ [°]
150
Standard
$U_g = 0,5$
Plafon
1
100
1,5
2
50
6
0
1
2
3
4
5
t [s]

Fig. 15

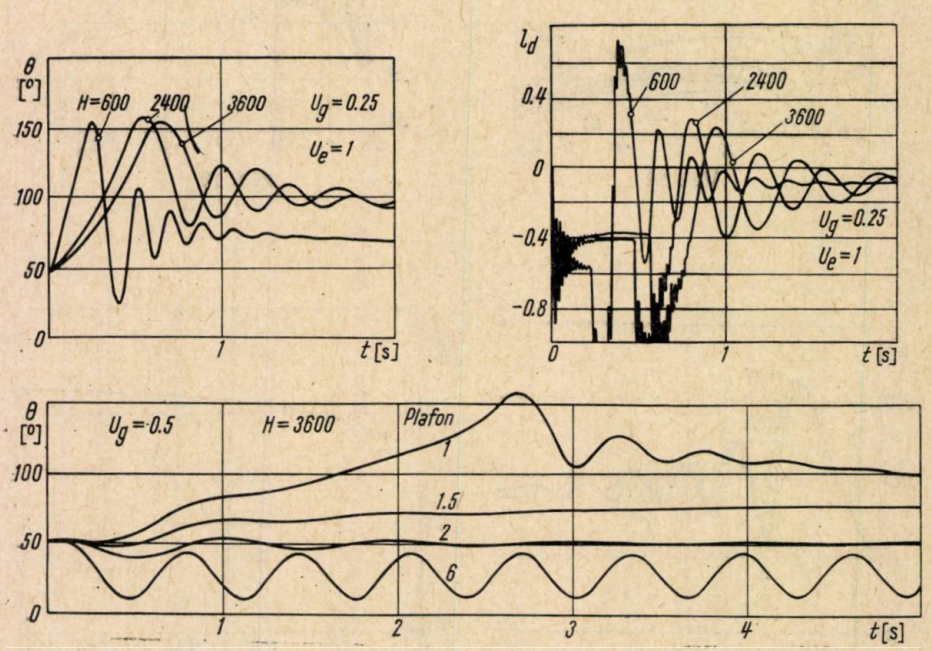

θ [°]
H=600
2400
3600
$U_g = 0.25$
$U_e = 1$
150
100
50
0
1
t [s]
I_d
0.4
600
2400
3600
0
-0.4
$U_g = 0.25$
$U_e = 1$
-0.8
0
1
t [s]
θ [°]
$U_g = -0.5$
H = 3600
Plafon
1
100
1.5
2
50
6
0
1
2
3
4
t [s]

Fig. 16

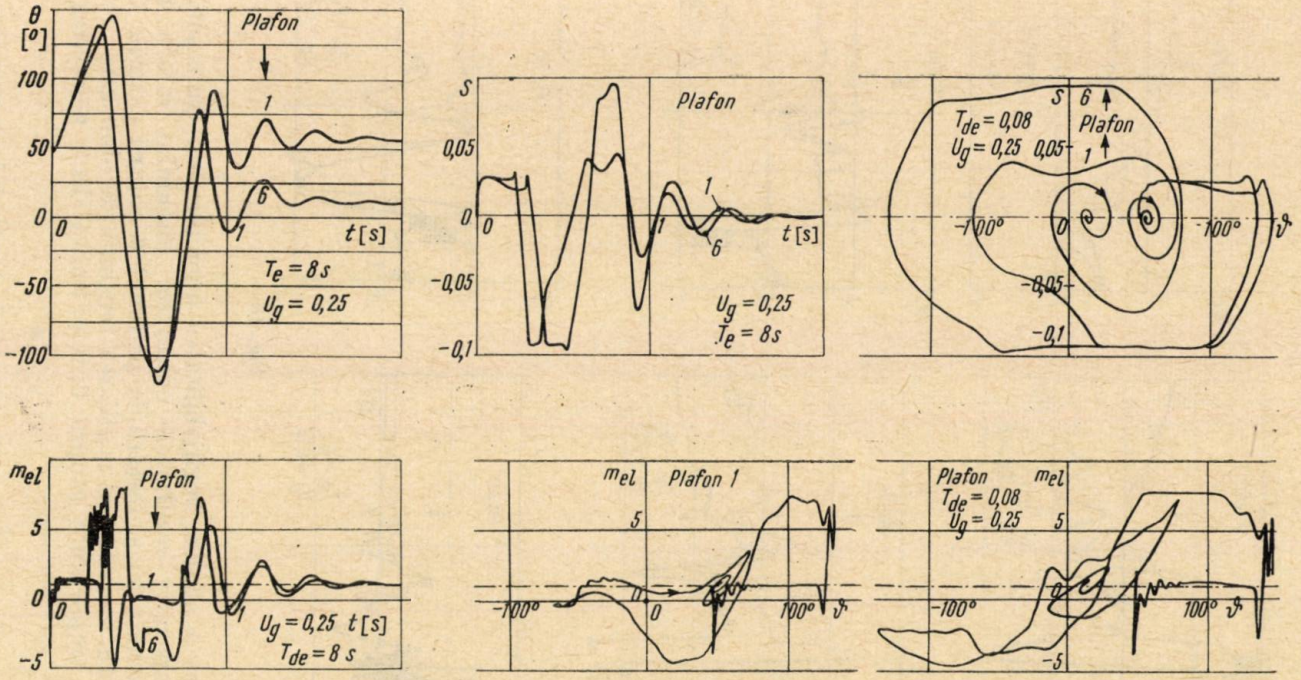

θ [°]
Plafon
100
50
0
-50
-100
1
6
t [s]
$T_e = 8\,s$
$U_g = 0,25$
s
0,05
-0,05
-0,1
$U_g = 0,25$
$T_e = 8\,s$
$T_{de} = 0,08$
$U_g = 0,25$
m_{el}
5
-5
$U_g = 0,25$ t [s]
$T_{de} = 8\,s$
Plafon 1
-100°
100°
ϑ

Fig. 17

Pentru aceleaşi situaţii, în diagramele din figura 18 se prezintă variaţia în timp a curenţilor şi a fluxurilor din maşină.

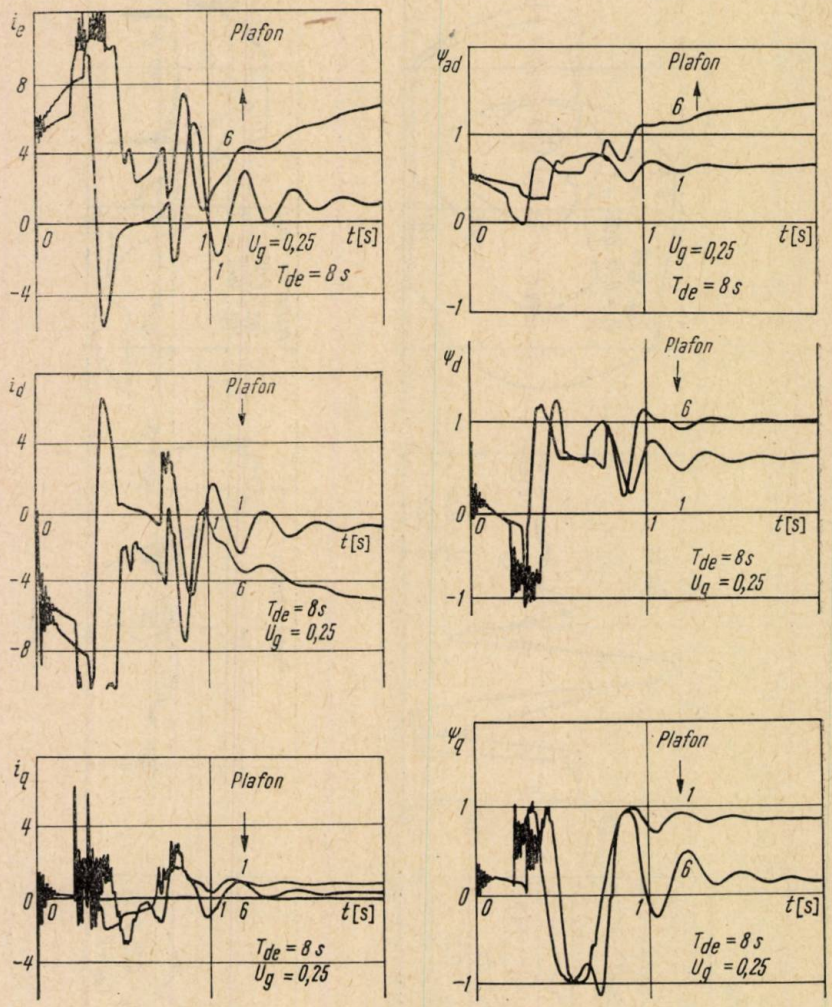


Fig. 18

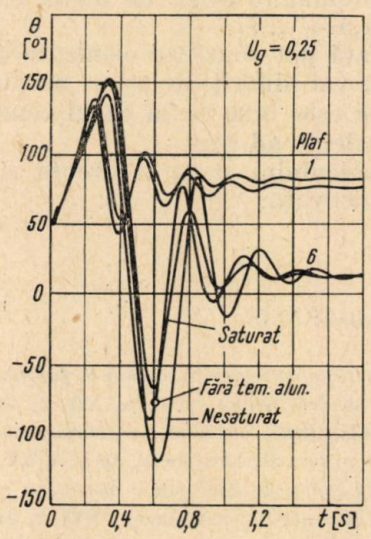
Pentru a analiza neglijabilitatea unor termeni sau a saturaţiei, s-au trasat comparativ rezultatele calculului unghiului intern în situaţia neforţării excitaţiei şi forţării la plafonul *6* pentru cazurile din relaţiile din figura 19. Se vede că neglijarea tensiunii de alunecare are consecinţe mai puţin importante asupra duratei-limită decît neglijarea saturaţiei.

★

Cercetarea descrisă a comportării motorului sincron în regimul de gol de tensiune de alunecare duce la concluzii în vederea micşorării daunelor.

1. Există o durată limită a golurilor de tensiune dincolo de care revenirea în sincronism nu mai este posibilă fără ca rotorul să efectueze rostogoliri.

2. Această durată depinde de parametrii externi (tensiunea de alimentare, tensiunea de excitație, cuplul de sarcină) și de cei interni. Dependența este diferită pentru fiecare dintre parametri.



Saturat:

$$i_d + i_e = \frac{\Psi_{ad}}{C_m \frac{x_{ad}}{p}} + \sum \frac{\Psi_{ad}}{\frac{x_{on(p)}}{p}} \quad (8)$$

Nesaturat:

$C_m = 1$

Fără t.e.m. de alunecare:

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = U_d - C i_d + (1 - X)\Psi_2 \quad (9)$$

$$\frac{d\Psi_q}{dt} = U_q - r_a i_a - \Psi_d \quad (10)$$

Fig. 19

3. Hotărîtoare e dependența duratei limită de nivelul de fund al golului de tensiune. Aceasta variază de la zecime de secundă, pentru cazul căderii tensiunii la zero, pînă la secunde, pentru cazul căderii la 0,65 din tensiunea nominală.

4. Printre parametrii interni care influențează mai sensibil durata limită sînt: reactanțele sincrone, constanta de inerție, constanta de timp a excitației și, în mai mică măsură, rezistența înfășurării de amortizare; rezistența indusului și reactanțele de scăpări au influență redusă.

5. Influența pe care o are plafonul de forțare a excitației depinde atît de parametrii interni ai mașinii, cît și de nivelul tensiunii de fund a golului. Din cele arătate se deduce că forțarea excitației are o eficacitate redusă la valori mici ale tensiunii golului. Eficacitatea crește simțitor cu creșterea tensiunii. Astfel, o forțare la plafonul *2* asigură (la indiferent ce parametri interni ai motorului) o durată limită infinită la goluri la nivelul 0,5, idem la plafonul 1,5 la nivelul 0,65.

6. La alegerea motoarelor sincrone care urmează a se instala acolo unde alimentarea nu se face continuu la parametrii nominali, se va urmări ca acestea să aibă parametri cît mai favorabili din punctul de vedere al duratei limite.

7. La asigurarea protecției motoarelor prin relee de tensiune minimă se va realiza o temporizare a acestora funcție de nivelul tensiunii la durate apropiate de cele limită, astfel încît să fie asigurată în continuare alimentarea motorului și eventual să se efectueze în acest timp comutarea pe alt

sistem de bare (de rezervă) acolo unde acestea există (în majoritatea cazurilor).

8. Pentru prelungirea duratei limite se recomandă o forțare a excitației, dar numai dacă eficacitatea ei este substanțială. La goluri cu nivel de fund coborît, eficacitatea este redusă la limitele unor forțări practic realizabile și aproape nulă la căderi ale tensiunii la zero. În cazul nivelelor mai ridicate se poate obține o prelungire oricît de mare, chiar pînă la infinit, la plafonul de forțare de 1,5 — 2.

9. Curbele din lucrarea de față pot constitui elemente de orientare și pentru cazul altor parametri interni (diferiți de cei ai mașinii standard sau variați unul cîte unul). Totuși este bine ca în cazul concret al unui motor existent să se recurgă la calcule ad-hoc.

10. Funcție de rezultatele calculului și de frecvența și caracterul golurilor se poate adopta soluția adecvată.

BIBLIOGRAFIE

1. C. BĂLĂ, M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, *Studiul unor regimuri speciale de funcționare ale motoarelor sincrone de mare putere*, St. cerc. energ., seria A, **XII**, *3*, 489 (1962).
2. M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, P. OPRIȘAN, *Contribuții la studiul reanclanșării motorului sincron de antrenare a compresoarelor cu piston*, St. cerc. energ., seria A, **XV**, *4*, 831 (1965).
3. M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, *Cu privire la limita de stabilitate a motoarelor sincrone supuse la variații bruște de tensiune și sarcină*, St. cerc. energ., **XVI**, *2*, 285 (1966).
4. C. BĂLĂ, M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, *Zur Frage der Anlau und Wiedersynchronisierfähigkeit von Synchronmotoren unter Belastung*, Revue d'Electrotechnique et d'Energetique, seria A, **VIII** *1* (1963).
5. M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, P. OPRIȘAN, *La réenclanchement du moteur synchrone dans le cas particulier de la charge pulsatoire*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ., **10**, *4*, 685 (1965).
6. R. PARK, *Two reactions theori of synchronous machines*, Tr. A.I.E.E., **48** (1929); **52** (1933).
7. — *Definition of an ideal sychronous machine and formula for the armature flux linkages*, General Electric Review, **31** (1928).
8. M. BÂRGĂUANU, D. CREȚU, P. OPRIȘAN, N. TĂTARU, *Modelarea analogică a motorului sincron în regimuri tranzitorii electromagnetice și dinamice*, St. cerc. energ. electr., **15**, *1*, 177 (1965).
9. I.A. BAHVALOV, *Matematiceskie modelirovanie perehofnîh profesov sinhronov mașinî na asnove experimentalnîh dinamiceskih haracteristik*.
10. M. BÂRGĂUANU, *Influența constantelor de inerție asupra stabilității motoarelor sincrone la goluri de tensiune*, comunicare la simpozionul „Analiza și sinteza rețelelor electrice", București, octombrie, 1967.

SINTEZA ANALITICĂ A REGULATORULUI OPTIMAL PENTRU O CLASĂ DE SISTEME LINIARE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

DE

V. RĂSVAN

621.53.001

În lucrare se extinde metoda aproximativă de sinteză analitică a lui Cian Jen-vei pentru cazul sistemelor multiple cu întîrziere, arătîndu-se că problema sintezei se reduce la rezolvarea unor ecuaţii matriceale algebrice rezultate din degenerarea ecuaţiei Riccati.

Se demonstrează unicitatea soluţiei obţinute pe calea integrării sistemului caracteristic al ecuaţiei Hamilton-Jacobi-Bellman, trăgîndu-se concluzii asupra stabilităţii asimptotice a sistemului cu reacţie şi a aproximării făcute.

1. INTRODUCERE

Problema sintezei analitice a regulatoarelor, formulată în [1], a cunoscut dezvoltări ulterioare foarte variate, dată fiind simplitatea metodelor utilizate în calcule şi simplitatea schemelor de comandă ce se obţin de obicei.

Extinderea tuturor rezultatelor obţinute în cadrul teoriei sistemelor automate descrise de ecuaţii diferenţiale ordinare pentru sistemele automate cu argment întîrziat nu este o problemă uşoară, din cauza caracterului specific al acesteia.

Problema sintezei analitice a regulatorului în sistemele cu întîrziere a fost formulată şi rezolvată de N. N. Krasovski [2] în baza unor rezultate ale sale asupra stabilităţii în sens Leapunov a sistemelor cu întîrziere. În lucrarea citată se menţionează totodată şi dezavantajele de realizare a soluţiei propuse, care constau în special din necesitatea realizării unor funcţionale care intră în expresia comenzii optimale.

Într-o lucrare apărută aproape simultan cu cea menţionată, Cian Jen-vei [3] a indicat o metodă de simplificare a soluţiei în problema sintezei analitice a regulatoarelor pentru sistemele cu întîrziere.

Metoda aceasta se bazează pe programarea dinamică şi reprezintă o aproximare a soluţiei optimale, care conduce la o structură simplă de regulator. Autorul nu a aplicat-o decît pentru un sistem simplu de ordinul unu, pentru care rezultatele date sînt complete.

În cele ce urmează ne propunem extinderea acestei metode pentru sistemele multiple descrise de ecuații vectorial-matriceale. De asemenea în ipotezele admise vom demonstra unicitatea soluției.

2. FORMULAREA PROBLEMEI DE OPTIMIZARE. NOTAȚII

În cele ce urmează se vor folosi următoarele notații : scalarii se vor nota cu litere grecești, vectorii cu litere latine mici, iar matricele cu litere latine mari ; o literă latină mică cu un indice reprezintă un scalar ; o literă latină mare cu un indice reprezintă un vector, iar o literă latină mare cu doi indici reprezintă un scalar. Eventualele abateri de la aceste notații se vor preciza.

Se consideră obiectul descris de ecuația vectorial-matriceală cu întîrziere

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Cu, \tag{1}$$

unde :

x este vectorul n-dimensional al stărilor,

u — vectorul r-dimensional al comenzilor,

A — matrice constantă $n \times n$,

B — matrice constantă $n \times n$,

C — matrice constantă $n \times r$.

Se cere să se facă sinteza mărimii de comandă astfel încît să se minimizeze integrala

$$J[\varphi(t)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^*Qx + u^*Ru)\,dt, \tag{2}$$

unde Q și R sînt matrice constante simetrice, respectiv pozitiv semidefinită și pozitiv definită, iar $\varphi(t)$ este un vector definit pe $[-\tau, 0)$ astfel încît $x(t) = \varphi(t)$ pe acest interval.

Se vede că $\varphi(t)$ joacă rolul condițiilor inițiale de la sistemele fără întîrziere. În cazul de față însă, $J_{opt} = \min\limits_{u} J$ nu mai este o funcție definită pe spațiul stărilor inițiale, ci o funcțională. Dacă admitem, de exemplu, că $\varphi(t)$ sînt funcții în clasa C° pe intervalul de definiție, atunci J_{opt} este definită pe $C[-\tau, 0)$, spațiul funcțiilor continue pe $[-\tau, 0)$.

Faptul că J_{opt} este o funcțională ridică probleme în ce privește aplicarea programării dinamice la rezolvarea problemei. Simplificarea propusă în [3] este următoarea : pe intervalul $[-\tau, 0)$ să se aproximeze $\varphi(t)$ cu o dreaptă. Pentru τ suficient de mic și pentru o clasă largă de funcții $\varphi(t)$, aproximarea este acceptabilă. Ca urmare, J_{opt} devine o funcție de $x(0)$ și $x(-\tau)$. Se știe că în cazul sistemelor fără întîrziere, unde J_{opt} depinde doar de $x(0)$, vectorul comenzilor este legat de cel al stărilor printr-o relație liniară. În cazul de față este de așteptat ca vectorul comenzilor să fie legat și de vectorul stărilor cu argumentul întîrziat, prin analogie cu criteriul de optim. Bineînțeles această afirmație, pe care ne-o dă intuiția, trebuie dovedită prin calcul.

3. DETERMINAREA ANALITICĂ A COMENZII OPTIMALE

Urmînd o cale practic identică cu cea din [3], aplicată pentru cazul vectorial, vom obține ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman pentru problema formulată. Nu vom da demonstrația, deoarece rezultatele obținute pentru cazul scalar se extind aproape imediat în cazul vectorial.

Pentru un obiect descris de ecuația vectorială

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g\,(x(t),\ x\,(t-\tau),\ u(t)), \tag{3}$$

pentru care se cere să se determine comanda ce minimizează criteriul de calitate

$$J = \int_0^\infty \gamma(x(t),\ u(t))\ \mathrm{d}t, \tag{4}$$

comanda optimă și optimul lui J sînt date de ecuația cu derivate parțiale

$$\min_u \left\{\gamma(x(t),\ u(t)) + (\nabla_{x(t)}\ \psi)\ g(x(t),\ x(t-\tau),\ u(t) + \right.$$

$$\left. + (\nabla_{x(t-\tau)}\ \psi)\ [x(t) - x(t-\tau)]\frac{1}{\tau}\right\} = 0, \tag{5}$$

unde

$$\psi(x(0),\ x(-\tau)) = \min_u \int_0^\infty \gamma(x(t),\ u(t))\ \mathrm{d}t. \tag{6}$$

Deja observăm, în sensul celor afirmate în § 2, apariția derivatelor parțiale în raport cu $x_t\ (t-\tau)$, adică un termen suplimentar în ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman.

Pentru problema concretă de care ne ocupăm, remarcăm următoarele : mărimea de comandă u, asupra căreia nu s-au impus restricții, este definită pe un domeniu deschis. Acest fapt permite ca la determinarea comenzii optimale să se utilizeze toate avantajele calculului variațional clasic. Dezavantajul pe care domeniul deschis îl are în demonstrarea existenței optimului este eliminat prin condițiile de pozitivitate impuse matricelor Q și R, care nu sînt decît condiții de convexitate impuse criteriului de calitate ; aceste condiții asigură existența minimului (optimului) în domeniul deschis, iar liniaritatea ecuațiilor și faptul că sub integrală se află forme pătratice conduc la unicitatea acestui minim.

Pentru obținerea soluției vom înlocui în ecuația (5) pe $(x(t),u(t))$ și $g(x(t),\ x(t-\tau),\ u(t))$ cu expresiile lor din relațiile (1) și (2).

Va rezulta ecuația

$$\min_u \left\{\frac{1}{2}\,x^*\,Qx + \frac{1}{2}\,u^*\,Ru + (\nabla_{x(t)}\ \psi)[Ax(t) + Bx(t-\tau) + Cu(t)] + \right.$$

$$\left. + (\nabla_{x(t-\tau)}\ \psi)\,[x(t) - x(t-\tau)]\frac{1}{\tau}\right\} = 0. \tag{7}$$

Deoarece domeniul comenzilor admisibile este deschis, minimul se obţine prin simpla derivare în raport cu u, rezultînd expresia comenzii optimale

$$u = - R^{-1} C^* (\nabla_{x(t)} \psi)^*. \tag{8}$$

Înlocuind pe (8) în (7), rezultă ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul unu

$$\frac{1}{2} x^* Q x + (\nabla_{x(t)} \psi) A x(t) + (\nabla_{x(t)} \psi) B x(t-\tau) -$$

$$- \frac{1}{2} (\nabla_{x(t)} \psi) C R^{-1} C^* (\nabla_{x(t)} \psi)^* + \frac{1}{\tau} (\nabla_{x(t-\tau)} \psi) [x(t) - x(t-\tau)] = 0. \tag{9}$$

Pentru o ecuaţie de această formă, în cazul absenţei întîrzierii (cînd $\tau = 0$) se caută ψ sub forma unei forme pătratice, reducînd problema la una algebrică. În acest caz vom proceda identic, cu deosebirea că se ţine seama de termenii suplimentari care apar.

Se presupune că ψ este de forma

$$\psi(x(t), x(t-\tau) = \frac{1}{2} x^*(t) M x(t) + x^*(t) N x(t-\tau) + \frac{1}{2} x^*(t-\tau) P x(t-\tau) \tag{10}$$

unde M, N, P sînt matrice simetrice, pozitiv definite.

Înlocuind pe (10) în (9), se constată că este valabilă următoarea

Propoziţie. Funcţia $\psi(x(t), x(t-\tau))$, dată de relaţia (10), este soluţie a ecuaţiei (9) dacă şi numai dacă matricele M, N şi P satisfac următoarele ecuaţii matriceale algebrice, care nu sînt decît ecuaţii matriceale Riccati degenerate :

$$MA + A^*M - MCR^{-1} C^*M + \frac{2}{\tau} N + Q = 0; \tag{11}$$

$$NA + A^*N + MB + B^*M - NCR^{-1} C^*M - MCR^{-1} C^*N + \frac{2}{\tau} (P - N) = 0; \tag{11'}$$

$$NB + B^*N - NCR^{-1} C^*N - \frac{2}{\tau} P = 0. \tag{11''}$$

Într-adevăr, propoziţia rezultă imediat din simpla înlocuire şi identificare a coeficienţilor formelor pătratice şi biliniare care apar.

În continuare ne vom referi la soluţionarea acestui sistem de ecuaţii matriceale. Adunînd cele trei ecuaţii, se obţine ecuaţia :

$$S(A + B) + (A^* + B^*) S - SCR^{-1} C^* S + Q = 0, \tag{12}$$

unde $S = M + N$.

Constatăm deci că suma acestor matrice nu depinde de timpul de întîrziere τ. Dar, în baza relaţiilor (8) şi (10), expresia comenzii optimale în funcţie de vectorul de stare (adică, practic vorbind, ecuaţia regulatorului) este

$$u(x(t), x(t-\tau) = -R^{-1} C^* M x(t) - R^{-1} C^* N x(t-\tau). \qquad (13)$$

În baza ecuaţiei (11) se constată că, atunci cînd τ se apropie de zero, norma matricei N tinde către zero. Dacă adoptăm ca normă a matricei expresia

$$\|A\| = \sup_i \left(\sum_j |A_{ij}|\right),$$

care corespunde următoarei norme a vectorului

$$\|x\| = \sup_i |x_i|,$$

atunci se vede că N tinde chiar spre matricea 0 (de fapt, indiferent ce normă am adopta, matricea 0 este singura matrice de normă nulă).

Deoarece suma $M+N$ este o matrice constantă în raport cu τ, este clar că, atunci cînd τ este foarte mic, M se apropie de S, care este soluţia problemei de optimizare în cazul absenţei întîrzierii.

Norma lui M scade cînd creşte τ, în timp ce norma lui N creşte o dată cu creşterea lui τ. Această constatare are o interpretare fizică naturală. Întrucît matricele caracterizează operatorul liniar al căii de reacţie, iar norma operatorului într-un sistem dinamic reprezintă, aşa cum a arătat Kudrewicz [4], factorul de amplificare, rezultă următoarele: stabilizarea sistemului se face acţionînd proporţional cu variabilele de stare atît retardate, cît şi neretardate. Cu cît întîrzierea este mai mare, cu atît amplificarea pe calea de reacţie a variabilelor retardate trebuie să fie mai mare, iar a variabilelor neretardate trebuie să fie mai mică, suma factorilor de amplificare rămînînd limitată superior de o constantă dată, independentă de mărimea timpului de întîrziere. Bineînţeles, acest raţionament este valabil în măsura în care sînt valabile ecuaţiile precedente, adică pentru o întîrziere suficient de mică.

În concluzia acestui paragraf putem arăta că s-a obţinut pe cale analitică expresia comenzii optimale în funcţie de variabilele de stare, rezolvîndu-se problema sintezei, a cărei soluţie este exprimată de (13).

Modul de obţinere a soluţiei, adică de rezolvare a ecuaţiei (7), arată că este necesar să demonstrăm unicitatea soluţiei găsite.

4. DEMONSTRAREA UNICITĂŢII SOLUŢIEI DE LA § 3

Este ştiut faptul că o ecuaţie cu derivate parţiale are soluţie unică dacă se impun şi condiţii la limită. În cazul de faţă, condiţiile la limită sînt date de necesitatea convergenţei integralei (2), sau, ceea ce este acelaşi lucru, de faptul că soluţia banală a sistemului cu reacţie format de (1) şi (13) trebuie să fie asimptotic stabilă.

În demonstrarea unicităţii soluţiei vom adopta calea din [5] unde se demonstrează unicitatea soluţiei din [1]. Se introduc ca variabile

vectorii-coloană p și q definiți mai jos :

$$p = (\nabla_{x(t)}\, \psi)^*, \tag{14}$$

$$q = (\nabla_{x(t-\tau)}\, \psi)^*. \tag{14'}$$

Ca urmare, ecuația (9) devine

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} x^* Q x + p^* A x(t) + p^* B x(t-\tau) - \frac{1}{2} p^*\, C R^{-1}\, C^* p +$$

$$+ \frac{1}{\tau} q^* [x(t) - x(t-\tau)] = 0. \tag{15}$$

Pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul I (15) vom calcula o integrală primă, din care, după cum se știe, se pot obține toate soluțiile ecuației prin variația constantelor, fără a fi necesare decît operații de diferențiere și de integrare.

Găsirea integralei prime se face prin metoda lui Cauchy. În prealabil se introduc vectorii cu 2 n dimensiuni :

$$y = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

numerotarea coordonatelor făcîndu-se după cum urmează :

$$y_j = x_j(t); \; y_{n+j} = x_j(t-\tau), \; (j = 1, .., n).$$

Se scrie sistemul caracteristic al ecuației (15) :

$$\frac{dy_1}{P_1} = \cdots = \frac{dy_n}{P_n} = \frac{dy_{n+1}}{Q_1} = \cdots = \frac{dy_{2n}}{Q_n} = \frac{d\psi}{\sum_1^n (p_i P_i + q_i Q_i)} =$$

$$= \frac{dp_1}{X_1} = \cdots = \frac{dp_n}{X_n} = \frac{dq_1}{X_{n+1}} = \cdots = \frac{dq_n}{X_{2n}} = dt, \tag{16}$$

unde s-au făcut notațiile

$$X_j = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_j} \; ; \; X_{n+j} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_{n+j}} \; ; \; P_j = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j} \; ; \; Q_j = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j} \; (j = 1,2 \ldots, n).$$

Ca urmare, sistemul (16) este echivalent cu următorul sistem scris sub formă matriceal-vectorială :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B x(t-\tau) - C R^{-1} C^* p,$$

$$\frac{dx(t-\tau)}{dt} = \frac{1}{\tau} [x(t) - x(t-\tau)], \tag{17}$$

$$\frac{dp}{dt} = - Q\, x(t) - A^* p - \frac{1}{\tau} q,$$

$$\frac{dq}{dt} = - B^* p + \frac{1}{\tau} q.$$

Acest sistem se mai scrie și sub forma condensată

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \overline{A}y + \overline{B}z \\ \frac{dz}{dt} &= \overline{C}y - \overline{A}^* z, \end{aligned} \tag{18}$$

unde matricele $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$ au expresiile

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ \frac{1}{\tau}E & -\frac{1}{2}E \end{bmatrix}; \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} -CR^{-1}C^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se constată că matricele $\overline{B}$ și $\overline{C}$ sînt simetrice, deoarece Q și $CR^{-1}C^*$ sînt matrice simetrice.

În aceste condiții se poate arăta, printr-o metodă identică cu cea din [6], că valorile proprii ale sistemului (18) sînt dispuse simetric față de axa imaginară : dacă λ este o valoare proprie a sistemului, atunci și $-\lambda$ este o valoare proprie a sistemului.

Fie λ_j $(j = 1, \ldots, 2n)$ acele valori proprii ale sistemului, care au partea reală pozitivă. Vom scrie soluția sistemului (18) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_1^{2n} C_j\, k_j\, e^{-\lambda_j t} + \sum_1^{2n} C_{2n+j}\, k_{2n+j}\, e^{\lambda_j t}, \\ z(t) &= \sum_1^{2n} C_j\, l_j\, e^{-\lambda_j t} + \sum_1^{2n} C_{2n+j}\, l_{2n+j}\, e^{\lambda_j t}, \end{aligned} \tag{19}$$

unde k_β și l_β sînt descompunerile pe spațiile Y și Z ale vectorului propriu corespunzător unei valori proprii oarecare.

Relațiile (9) se scriu sub formă scalară :

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \sum_1^{2n} C_j\, k_{hj}\, e^{-\lambda_j t} + \sum_1^{2n} C_{2n+j}\, k_{h,\,2n+j}\, e^{\lambda_j t}, \\ z_h(t) &= \sum_1^{2n} C_j\, l_{hj}\, e^{-\lambda_j t} + \sum_1^{2n} C_{2n+j}\, l_{n,\,2n+j}\, e^{\lambda_j t} \qquad (h = 1, \ldots, 2n). \end{aligned} \tag{19'}$$

În relațiile de mai sus, C_j și C_{2n+j} sînt constante de integrare, iar k_{ij}, l_{ij} sînt elemente ale matricei de ordinul $4n$ formată cu vectorii proprii ai sistemului de ecuații.

Pentru găsirea integralei prime a ecuației (15) este necesară rezolvarea ecuației Pfaff :

$$d\psi = \sum_1^n (P_i\, dy_i + q_i\, dy_{n+i}) = \sum_1^{2n} z_h\, \dot{y}_h\, dt. \tag{20}$$

Înlocuind în (20) expresiile (19′) ale lui z_h și $\dot{y}_h$, ecuația se integrează ușor și obținem

$$\psi = \psi(C_1 e^{-\lambda_1 t}, \ldots, C_{2n} e^{-\lambda_{2n} t}, C_{2n+1} e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_{4n} e^{\lambda_{2n} t}) + C_0. \tag{21}$$

Introducînd notaţiile

$$v_i = C_i e^{-\lambda_i t}\ ;\ C_{2n+i} e^{\lambda_i t} = \frac{D_i}{v_i},$$

unde $D_i = C_{2n+i} C_i$, se obţin relaţiile

$$y_h(t) = \sum_1^{2n} k_{hj} v_j + \sum_1^{2n} k_{h,2n+j} \frac{D_j}{v_j}, \tag{22}$$

$$\psi = \psi(v_1, \ldots, v_{2n}, D_1, \ldots, D_{2n}) + C_0. \tag{23}$$

Deoarece traiectoriile $y_h(t)$ trebuie să satisfacă ecuaţia (15), se mai obţine încă o relaţie :

$$\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_{2n}, D_1, \ldots, D_{2n}) = 0. \tag{24}$$

Explicitînd din această relaţie una dintre constante, de exemplu D_{2n}, şi exprimînd pe $v_1, \ldots, v_{2n}$ în funcţie de $y_1, \ldots, y_{2n}$, în baza relaţiilor (22) (ceea ce este posibil dacă jacobianul transformării este nenul) rezultă

$$\psi = \psi_1(y_1, \ldots, y_{2n}, D_1, \ldots, D_{2n-1}) + C_0. \tag{25}$$

Aceasta este integrala primă a ecuaţiei (15).

Ţinînd seama de condiţia suplimentară de stabilitate asimptotică impusă sistemului automat, vor fi determinate imediat $2n$ constante de integrare din (19′) :

$$C_{2n+1} = C_{2n+2} = \ldots = C_{4n} = 0.$$

Ca urmare, z_h şi y_h capătă următoarea formă :

$$y_h = \sum_1^{2n} k_{hj} v_j, \tag{26}$$

$$z_h = \sum_1^{2n} l_{hj} v_j. \tag{26′}$$

Dacă matricea transformării (26) este nesingulară, atunci se poate face explicitarea mărimilor v_j :

$$v_j = \sum_1^{2n} m_{ji} y_i. \tag{27}$$

Ca urmare, ecuaţia (20) devine

$$d\psi = \sum_1^{2n} \sum_1^{2n} T_{ij} y_i \dot{y}_j \, dt, \tag{28}$$

unde T_{ij} sînt elementele matricei simetrice T de ordinul $2n$.
Prin integrarea ecuaţiei (28) rezultă

$$\psi = \frac{1}{2} y^* T y + C_0. \tag{28′}$$

Evident, matricea T se poate scinda în patru matrice de ordinul n :

$$T = \begin{bmatrix} M & N \\ N & P \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Rezultă deci, ţinînd seama de expresia lui y, că funcţia ψ are expresia

$$\psi = \frac{1}{2} x^*(t) M x(t) + x^*(t) N x(t-\tau) + \frac{1}{2} x^*(t-\tau) P x(t-\tau) + C_0. \tag{30}$$

Rezultă că soluţia ecuaţiei Hamilton-Jacobi-Bellman care satisface condiţiile problemei este de forma (30), diferind de (10) prin constanta aditivă C_0.

Evident, constanta C_0 nu modifică forma comenzii optimale. Mai mult decît atît, deoarece $\psi(0)$ este o funcţie Leapunov, cînd $x = 0$, $\psi = 0$, deci $C_0 = 0$. Unicitatea soluţiei este astfel complet demonstrată.

5. DESPRE STABILITATEA SISTEMULUI CU REACŢIE

Introducînd în ecuaţia (1) expresia lui u, se obţine ecuaţia sistemului în circuit închis :

$$\frac{dx}{dt} = (A - CR^{-1} C^* M)\, x(t) + (B - CR^{-1} C^* N)\, x(t-\tau). \tag{31}$$

Ţinînd seama de condiţia de stabilitate asimptotică a sistemului (19), rezultă stabilitatea sistemului (31) pentru orice τ.

Dar analiza unui caz, chiar şi extrem de simplu, de ordinul I făcută în [3] arată că sistemul (31) este stabil numai în anumite limite ale lui τ. Aceasta nu este însă o contradicţie, ci semnifică doar faptul că sistemul este stabil în limitele în care este valabilă aproximaţia care a dus la construirea sistemului (17), căruia i s-a impus stabilitatea asimptotică a soluţiei. Rezultă deci că prin găsirea lui τ_0 — cea mai mare valoare a lui τ pentru care (31) are soluţia banală stabilă asimptotic — se găseşte de fapt limita superioară a lui τ pentru care este valabilă aproximarea lui $\varphi(t)$ cu o dreaptă.

Un mod de evaluare a lui τ_0 îl constituie utilizarea evaluării din [7, p. 353]. Constantele din expresia evaluării depind şi ele de τ, deoarece matricele M şi N depind de τ datorită ecuaţiilor din care se determină ; se obţine astfel o inecuaţie a cărei soluţie este τ_0.

Valoarea τ_0 astfel determinată are o semnificaţie precisă : ea reprezintă valoarea întîrzierii pentru care, corespunzător parametrilor obiectului, orice condiţie iniţială $\varphi(t)$ poate fi aproximată cu o dreaptă, sistemul fiind stabilizabil cu o comandă de tipul celei determinate în lucrare.

Se ştie că la sistemele fără întîrziere ecuaţia regulatorului optimal nu depinde de condiţiile iniţiale. În cazul de faţă se realizează o proprietate asemănătoare, dar în limitele lui τ_0.

6. CONCLUZII

Dintre consideraţiile pe care le vom expune în acest paragraf, prima se referă la optimalitatea soluţiei. Deşi de la început s-a introdus o aproximare, trebuie remarcat că soluţia este totuşi optimală şi nu suboptimală. Într-adevăr, soluţia problemei asigură minimul criteriului integral de calitate (2). Ceea ce se aproximează este însuşi criteriul de calitate, dar soluţia optimală este cea exactă, care minimizează astfel un criteriu exprimat în mod aproximativ.

O altă concluzie se referă la legătura dintre această soluţie şi soluţia exactă a lui Krasovski [2]. Soluţia lui Krasovski are următoarea expresie

$$u = Mx(t) + \int_{-\tau}^{0} N(\vartheta)\, x(t+\vartheta)\, d\vartheta. \tag{32}$$

Se vede că, atunci cînd minimul criteriului de calitate este o funcţională de condiţia iniţială, şi în expresia comenzii intră o funcţională liniară, exprimată prin integrală.

Dacă minimul criteriului depinde numai de $x(0)$, atunci în expresia lui u intră numai un termen liniar în variabilele de stare (cazul absenţei întîrzierii). Dacă în dependenţa lui de condiţiile iniţiale mai intră $x(-\tau)$, atunci în expresia lui u mai intră un termen liniar în $x(t-\tau)$.

Este de aşteptat ca prin dezvoltarea în serie a lui $\varphi(t)$ luînd n termeni, ψ să fie o funcţie de $n+1$ variabile. Ca urmare, u va fi suma a $n+1$ termeni. Trecînd la limită, este necesar să se regăsească soluţia lui Krasovski.

Aplicarea metodei la sistemele uzuale descrise prin funcţii de transfer va fi, evident, mai simplă. Aceasta se explică prin faptul că sistemele de mai sus sînt exprimate sub formă canonică, ceea ce face ca să se aplice o metodologie de calcul oarecum standard (separarea variabilelor în rezolvarea ecuaţiilor, forme speciale ale matricelor etc.).

BIBLIOGRAFIE

1. А. М. Летов, *Аналитическое конструирование регуляторов, I*, Автоматика и телемеханика, *4* (1960).
2. Н. Н. Красовский, *Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системах с запаздыванием времени*, П М М, *1* (1962).
3. Чжан Жень Вей, *К задаче синтеза оптимального регулятора с запаздыванием*, Автоматика и телемеханика, *2* (1962).
4. Я. Кудревич, *Устойчивость нелинейных систем с обратной связью*, Автоматика и телемеханика, 8 (1964).
5. Р. П. Лазарева, *К вопросу о единственности решения задачи аналитического конструирования регуляторов*, în „Оптимальные системы автоматического управления", Москва, „Наука" 1967.
6. V. Răsvan, *O sinteză optimală pe baza unui criteriu integral pătratic pe interval finit şi infinit de conducere pentru un obiect liniar şi invariant*. St. cerc. energ. electr., *2* (1969).
7. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale*, Bucureşti, 1963.

ALGORITM PENTRU DETERMINAREA CONDUCERII OPTIME ÎN PROBLEMA TIMPULUI MINIM, FOLOSIND DEZVOLTĂRI ÎN SERIE FOURIER*)

DE

C. BELEA

În lucrarea [1] s-a prezentat un algoritm de sinteză optimală după criteriul timpului minim, care ilustrează sinteza regulată a lui Bolteanski [2] pentru sistemele liniare. La sistemele liniare invariante în timp, acest algoritm foloseşte tehnica valorilor proprii ale matricei ecuaţiilor de stare. În prezenta lucrare se propune o tehnică de calcul proprie teoriei oscilaţiilor, care nu face uz de valorile proprii. Totodată se stabileşte o legătură directă între sistemele optimale şi sistemele neliniare în regim autooscilant, ceea ce lărgeşte cîmpul de legături între sistemele optimale şi sistemele automate clasice [3]—[7].

1. TEHNICA DE CALCUL ŞI CÎTEVA PROBLEME REZOLVABILE CU ACEASTA

Fie un sistem diferenţial, liniar şi invariant în timp, strict propriu [8], definit de ecuaţia matriceal-vectorială de stare şi de relaţia stare-ieşire :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + \bar{b}u, \\ y &= \bar{c}_1 \bar{x}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

în care

u reprezintă mărimea de intrare,
y — mărimea de ieşire,
$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — vectorul de stare,
A — matrice pătrată de dimensiuni $n \times n$,
$\bar{b}$, $\bar{c}$ — vectori-coloană cu cîte n elemente.
Asupra sistemului de ecuaţii (1.1) se impun următoarele condiţii :
1°. Toate mărimile care intervin în aceste ecuaţii sînt reale.

*) Comunicare prezentată la a XV-a sesiune ştiinţifică a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, mai 1969.

2°. Matricea de stare A, vectorul de intrare $\bar{b}$ şi vectorul de ieşire $\bar{c}$ sînt constante.

3°. Perechea $(A, \bar{b})$ este complet controlabilă.

4°. Ecuaţiile (1.1) reprezintă forma redusă a sistemului considerat şi deci perechea $(A_T, \bar{c})$ este complet observabilă**).

5°. Matricea A se va considera nesingulară şi totodată se va menţiona alternativa pentru cazul singular.

Sistemul (1.1) poate fi adus la forma echivalentă

$$L(D)\,y = M(D)_u \begin{cases} L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0, & a_n \neq 0, \\ M(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_0, & m < n, \end{cases} \tag{1.2}$$

pentru care condiţiile 1° — 5° devin:

1°°. Coeficienţii a_i, $i = 1,2,\ldots, n$, b_j, $j = 1,2, \ldots, m$, precum şi perechea intrare-ieşire (u, y), sînt mărimi reale. Operatorul de derivare în raport cu timpul se ia în sens generalizat:

$$D(\ ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ ) + \sum_i \Delta_i(\ )\,\delta\,(t - t_i), \tag{1.3}$$

unde $\delta(t-t_i)$ este distribuţia-impuls a lui Dirac, concentrată în punctul t_i, iar operatorul $\Delta_i(\ )$ reprezintă discontinuitatea în momentul t_i a mărimii pe care o precedă.

2°°. Coeficienţii a_i, b_j sînt constanţi.

3°°. Polinoamele $L(D)$ şi $M(D)$ sînt ireductibile (nu au factori comuni).

4°°. Polinomul $L(D)$ are gradul n, iar polinomul $M(D)$ gradul $m<n$.

5°°. Coeficientul a_0 este nenul.

În particular, dacă starea $\bar{x}$ în sistemul (1.1) este formată din mărimea de ieşire şi derivatele ei:

$$\bar{x} = (y,\ Dy, \ldots,\ D^{n-1} y), \tag{1.4}$$

atunci matricea A, vectorul $\bar{b}$ şi vectorul $\bar{c}$ au forma canonică

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \beta_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{n-i-j}\beta_j; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Ne propunem să determinăm răspunsul sistemului (1.1) la o intrare***) u (t_0, t_1) definită într-un interval (t_0, t_1) constantă pe porţiuni, avînd valorile ± 1 (fig. 1) cu salturi într-un număr finit de puncte $t = \theta_{N-1}, \theta_{N-2}, \ldots, \theta_1, \theta_0$.

**) Indicele T desemnează operaţia de transpunere a matricelor şi vectorilor.

***) Sublinierile desemnează segmente în accepţia din [8].

Intrarea $\underline{u}(t_0, t_1)$ poate fi considerată ca o reuniune de segmente semiînchise :

$$\underline{u}(t_0, t_1) = \underline{u}_N(t_0, \theta_{N-1}) \cup \underline{u}_{N-1}(\theta_{N-1}, \theta_{N-2}) \cup \ldots \cup \underline{u}_1(\theta_1, t_1). \quad (1.6)$$

Prin reuniunea segmentelor ce se obţin în urma translatării segmentului (1.6) la stînga şi la dreapta cu 1,2, ..., ∞ intervale de mărime $t_1 - t_0$, rezultă o funcţie periodică de perioadă $T = t_1 - t_0$:

$$\underline{\tilde{u}}(-\infty, \infty) = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} \underline{u}(t_0 + rT, t_1 + rT). \quad (1.7)$$

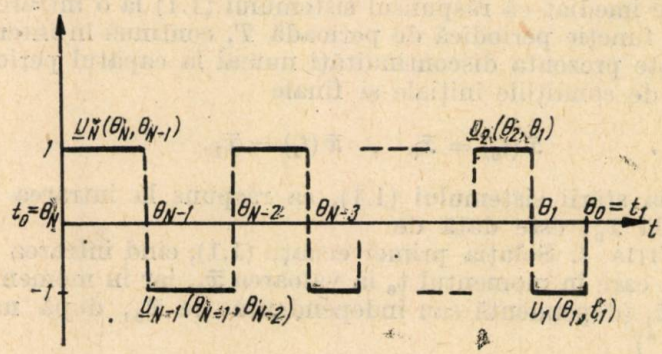


Fig. 1

Vom construi acum răspunsul periodic al sistemului (1.1), generat de o funcţie periodică (1.7) aplicată la intrare. Pentru comoditatea construcţiei vom folosi superpozabilitatea sistemului (1.7) în raport cu descompunerea intrării :

$$\underline{\tilde{u}}(-\infty, \infty) = \bigcup_{j=1}^{N} \underline{\tilde{u}}_j(\theta_j, \theta_{j-1}), \quad (1.8)$$

unde

$$\underline{\tilde{u}}_j = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} \underline{u}_j(\theta_j + rT, \theta_{j-1} + rT). \quad (1.9)$$

Pentru a exprima cele două posibilităţi finale $\underline{u}_1(\theta_1, t_1) = \underline{1}$ şi $\underline{u}_1(\theta_1, t_1) = -\underline{1}$, introducem parametrul α, care poate lua valorea 1 sau -1. Totodată atribuim funcţiilor $\tilde{u}_j(t)$ valorea 0 în afara intervalelor nedefinite. Avem astfel

$$\tilde{u}_j(t) = \begin{cases} (-1)^{j-1}\ \alpha & \forall t \in (\theta_j + rT,\ \theta_{j-1} + rT), \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \forall t \notin (\theta_j + rT,\ \theta_{j-1} + rT), \quad j = 1,2, \ldots, N. \end{cases} \quad (1.10)$$

Condițiile (1.10) permit să se înlocuiască semnul $\cup$ din relația de compoziție (1.9) cu semnul $\sum$ și să se folosească dezvoltarea în serie Fourier

$$\tilde{u}_j(t) = (-1)^{j-1}\alpha \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{ir\omega}(e^{-ir\omega\theta_j}-e^{ir\omega\theta_{j-1}})e^{-ir\omega t},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1.11}$$

Cu aceasta, relația (1.8) devine

$$\tilde{u}(t) = \sum_{j=1}^{N}\tilde{u}_j(t). \tag{1.12}$$

Se vede imediat că răspunsul sistemului (1.1) la o intrare de forma (1.12) este o funcție periodică de perioadă T, continuă în interiorul perioadei, și poate prezenta discontinuități numai la capătul perioadei, care vor depinde de condițiile inițiale și finale

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0\ ,\ \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1. \tag{1.13}$$

Evoluția stării sistemului (1.1), ca răspuns la intrarea (1.12) din starea inițială $\bar{x}_0$, este dată de

PROPOZIȚIA *1.* Soluția primei ecuații (1.1), cînd intrarea u este de forma (1.12), care în momentul t_0 ia valoarea $\bar{x}_0$, iar în momentul $t_1 - 0$, ia valoarea $\bar{x}_1$ (dependentă sau independentă de $\bar{x}_0$, după natura problemei), este *)

$$\bar{x}(t) = P(t-t_0+9\,\bar{x}_0 - P(t-t_1-0)\bar{x}_1 + \sum_{j=1}^{N-1}[P(t-\theta_j+0)-P(t-\theta_j-$$

$$-0)]\bar{x}(\theta_j) + \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\alpha[Q(t-\theta_j)-Q(t-\theta_{j-1})-(AT)^{-1}(\theta_{j-1}-\theta_j)]\bar{b}, \tag{1.14}$$

în care vectorii $\bar{x}(\theta_j)$, $j=1,2,\ldots,N-1$, $\bar{x}(\theta_N)=\bar{x}_0$, $\bar{x}(\theta_0-0)=\bar{x}_1$ satisfac relațiile liniare

$$P(0)\bar{x}(\theta_{j-1}) - P(\theta_{j-1}-\theta_j)\bar{x}(\theta_j) = (-1)^{j-1}\alpha[Q(\theta_{j-1}-\theta_j)-Q(0)-$$

$$-(AT)^{-1}(\theta_{j-1}-\theta_j)]\bar{b} \qquad j=1,2,\ldots,N, \tag{1.15}$$

iar matricele P(t) și Q(t) sînt de forma

$$P(t) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(ir\omega E - A)^{-1}e^{ir\omega t},\quad Q(t) = \frac{1}{T}\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{ir\omega}(ir\omega E - A)^{-1}e^{ir\omega t}, \tag{1.16}$$

E fiind matricea - unitate.

Referitor la matricele $P(t)$ și $Q(t)$ se demonstrează [9].

---

*) Dacă matricea A este singulară, atunci se poate folosi dezvoltarea în serii Fourier simetrice [9]. La funcțiile continue nu se precizează limita la dreapta și limita la stînga.

PROPOZIȚIA 2. Matricele $P(t)$ și $Q(t)$ au următoarele proprietăți, care decurg din formulele (1.16):

2. 1. Sînt matrice pătrate de dimensiuni $n \times n$, avînd elemente reale și periodice, de perioadă T. Datorită acestei proprietăți, este suficient ca matricele $P(t)$ și $Q(t)$ să se calculeze pe un interval $t \in (0, T)$.

2.2. Matricea $P(t)$ este nesingulară pentru orice t și satisface ecuația diferențială

$$DP(t) = AP(t) + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT)E, \tag{1.17}$$

în care operatorul D are sensul din formula (1.3); în interiorul perioadei, matricea $P(t)$ satisface prima ecuație (1.1) pentru $u = 0$. Așadar, matricea $P(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului omogen, care în interiorul perioadei satisface relațiile

$$\begin{aligned} &P^{-1}(+0)\,P(t) = P(t)P^{-1}(+0) = e^{At}, \quad \forall t \in (0, T), \\ &P(t) = P(+0)e^{At} = e^{At}P(+0), \qquad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \tag{1.18}$$

2.3. Matricea $P(t)$ este continuă și derivabilă pentru orice t, cu excepția punctelor $t = rT$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, în care suferă o discontinuitate egală cu matricea-unitate:

$$P(rT + 0) - P(rT - 0) = E, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.19}$$

2.4. Matricea $P(t)$ satisface relațiile

$$P(\tau_1 + \tau_2) = P(\tau_1)\,P^{-1}(+0)\,P(\tau_2) \quad , \ \tau_1 + \tau_2 \in (0, T), \tag{1.20}$$

$$P(\tau_1 - \tau_2) = P(\tau_1)P^{-1}(-0)P(-\tau_2) \ , \ \tau_1 - \tau_2 \in (0, T), \tag{1.21}$$

$$P(\tau_2 - \tau_1) = P(\tau_2)P^{-1}(+0)P(-\tau_1) \ , \ \tau_2 - \tau_1 \in (-T, 0), \tag{1.22}$$

$$P(-\tau) = P(+0)P^{-1}(\tau)\,P(-0) \quad , \ \tau \in (0, T), \tag{1.23}$$

în care toți factorii sînt comutativi la înmulțire.

2.5. Matricea $Q(t)$ satisface ecuația diferențială

$$\frac{dQ(t)}{dt} = AQ(t) + T^{-1}E \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ir\omega t}}{ir\omega}, \quad \forall t \in (-\infty, \infty), \tag{1.24}$$

care în interiorul perioadei devine

$$\frac{dQ(t)}{dt} = AQ(t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)E \quad , \quad \forall t \in (0, T). \tag{1.25}$$

2.6. Matricea $Q(t)$ este continuă și derivabilă pentru orice t, inclusiv punctele $t = rT$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Derivata $\frac{dQ}{dt}$ există și este continuă pentru orice t, cu excepția punctelor $t = rT$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, în care prezintă discontinuitatea

$$\left[\frac{dQ(t)}{dt}\right]_{t=rT+0} - \left[\frac{dQ(t)}{dt}\right]_{t=rT-0} = E, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.26}$$

2.7. Între matricele $P(t)$ și $Q(t)$ există relația diferențială

$$\frac{dQ(t)}{dt} = P(t) + (AT)^{-1}. \tag{1.27}$$

2.8. Între matricele $P(t)$ și $Q(t)$ există identitatea

$$P^{-1}(+0)\ [Q(t) - Q(0) + (AT)^{-1}\ t] \equiv P^{-1}(-t)[Q(0) - Q(-t) - (AT)^{-1}t], \quad \forall\ t \in (0, T). \tag{1.28}$$

Proprietățile 2.1—2.8 permit să se verifice imediat propoziția 1.

Soluția (1.14) poate fi folosită pentru rezolvarea mai multor probleme, dintre care menționăm cîteva mai frecvent întîlnite.

PROBLEMA 1. Dîndu-se mărimea de intrare $u(t)$ și condițiile inițiale $\bar{x}(t_0+0)$ sau finale $\bar{x}(t_1-0)$, se poate construi răspunsul sistemului $\bar{x}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.

Ecuațiile (1.15) permit să se determine valorile răspunsului corespunzătoare momentelor t_0, θ_{N-1}, ..., θ_1, t_1, iar formula (1.14) dă soluția completă.

PROBLEMA 2. Dacă se dă mărimea de intrare $u(t_0, t_1)$ de o formă convenabil aleasă și o rețea echidistantă de noduri θ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, în care se măsoară starea $\bar{x}(\theta_j)$, pentru N suficient de mare se poate determina matricea de tranziție $P(\tau)$*) și apoi parametrii sistemului.

PROBLEMA 3. Considerînd mărimea de intrare ca o excitație periodică de perioadă T, se obține regimul periodic forțat în sistemul deschis.

În această problemă, la ecuațiile (1.15) se adaugă ecuația

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0. \tag{1.29}$$

și regimul periodic forțat este complet determinat.

PROBLEMA 4. Dacă sistemul se închide prin mărimea de ieșire y, definită de relația stare-ieșire (1.1) sub forma

$$\tilde{u}(\bar{y}) = \operatorname{sign} f(\bar{y}), \tag{1.30}$$

unde f este o funcție dată de clasă C°, se pot determina regimurile autooscilatoare din sistemul considerat.

În acest caz, la ecuațiile (1.15) și (1.29), din care se determină univoc mărimile $\bar{x}(\theta_j)$, $j = 0,1, \ldots, N$ atunci cînd se cunosc momentele de comutare θ_j, se adaugă ecuațiile

$$f(\bar{y})(\theta_j)) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ sau } j = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.31}$$

care permit determinarea momentelor de comutare $\theta_0 = t_1$, θ_1, θ_2, ... θ_{N-1}. Momentul $\theta_N = t_0$ se poate lua arbitrar, deoarece ne referim la mișcarea liberă în sistemele invariante în timp. Prin urmare, momentul t_1 determină perioada autooscilațiilor $T = t_1 - t_0$.

Indiferent dacă funcția f este liniară sau nu în raport cu argumentul ei, ecuațiile (1.31) sînt transcendente în raport cu necunoscutele θ_j și pot avea mai multe, una sau nici o soluție care să satisfacă toate condițiile de compatibilitate cu regimurile periodice [10]. Printre aceste condiții

*) Unde τ este distanța dintre nodurile θ_j, considerate echidistante.

figurează şi condiţia de directivitate a comutării, din care se determină parametrul α ($\alpha = +1$ sau $\alpha = -1$).

PROBLEMA 5. Să se determine conducerea optimă $u = u^*(\bar{x}^*)$ care trece sistemul (1.1) într-un timp $t_1 - t_0 = T$ minim dintr-o stare dată $\bar{x}(t_0)$ într-o altă stare dată $\bar{x}(t_1)$.

Această problemă, precum şi interdependenţa ei cu problema oscilaţiilor libere, se va analiza în detaliu mai jos (teoremele 1 şi 2).

2. CONDUCEREA OPTIMĂ DUPĂ CRITERIUL TIMPULUI MINIM

Prin alegerea conducerii din figura 1 s-a ţinut seama de faptul că, în problema timpului minim de răspuns la sistemele liniare, conducerea optimală este unică şi are forma „bang-bang" (tot înainte — tot înapoi), aşa cum rezultă din metodele fundamentale ale teoriei optimizării (principiul maximului, programarea dinamică etc.). Ceea ce se urmăreşte acum este elaborarea unui algoritm de determinare a momentelor de comutare analog cu cel care se foloseşte la determinarea autooscilaţiilor sistemelor în circuit închis. De asemenea se urmăreşte elaborarea unei scheme de conducere în circuit închis.

Prezentăm mai întîi tehnica de elaborare a comenzii optime sub forma

TEOREMA 1. Comanda optimă $u^*(t)$ în circuit deschis este

$$u^*(t) = \operatorname{sign}(\bar{b}_T \bar{z}^*(t)), \tag{2.1}$$

unde vectorul $\bar{z}^*(t)$ satisface ecuaţia adjunctă

$$\dot{\bar{z}}(t) = -A_T \bar{z}(t), \tag{2.2}$$

în condiţiile iniţiale $\bar{z}^*(t_0)$, care verifică ecuaţiile

$$\bar{b}_T R^{-1}(+0) R(\theta_j - t_0) \bar{z}^*(t_0) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n-1, n, \ldots, N-1, \tag{2.3}$$

cu

$$R(t) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (ir\omega \mathrm{E} + A_T)^{-1} e^{ir\omega t}. \tag{2.4}$$

Momentele $\theta_N = t_0$, $\theta_{N-1}, \ldots, \theta_0 = t_1$ verifică sistemul de ecuaţii

$$P^{-1}(t_1 - t_0 - 0) P(+0) \bar{x}_1 + \alpha \sum_{j=1}^{N} (-1)^j P^{-1}(\theta_{j-1} - t_0) [Q(\theta_{j-1} - \theta_j) -$$

$$- Q(0) - \underset{\alpha = \pm 1,}{(AT)^{-1}} (\theta_{j-1} - \theta_j)] \bar{b} = \bar{x}_0, \tag{2.5}$$

şi satisfac următoarele condiţii:

a) formează un şir nedescrescător:

$$t_0 = \theta_N \leqslant \theta_{N-1} \leqslant \theta_{N-2} \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_0 = t_1; \tag{2.6}$$

b) forma liniară

$$\bar{b}_T \bar{z}^*(t) = \bar{b}_T R^{-1}(+0) R(t - t_0) \bar{z}^*(t_0) \tag{2.7}$$

nu admite alte rădăcini în intervalul $[t_0, t_1]$ decît cele din şirul (2.6), iar semnul ei se schimbă la fiecare comutare. Numărul maxim N al momentelor de comutare reprezintă valoarea întreagă pozitivă minimă pentru care ecuaţiile (2.3), (2.5) şi condiţiile (2.6), (2.7) sînt satisfăcute.

Observaţia 1. Pentru fiecare $N = 1, 2, \ldots$, ecuaţiile (2.3) şi (2.5) se rezolvă, iar cu soluţiile obţinute se verifică toate condiţiile (2.6) şi (2.7), atît pentru $\alpha = 1$, cît şi pentru $\alpha = -1$. Numai dacă aceste ecuaţii nu admit soluţii reale, sau soluţiile nu verifică toate condiţiile impuse nici pentru $\alpha = 1$, nici pentru $\alpha = -1$ cu nici un număr întreg $j = 1, 2, \ldots, N$, numai atunci se trece la $j = N + 1$.

Observaţia 2. Indicele N pentru care avem relaţia strictă $\theta_N > t_0$ determină varietatea diferenţiabilă $V_N(\bar{x}_1)$, în care se află punctul iniţial $\bar{x}_0$ [1, 2]. Pentru $N \leqslant n$, acest indice reprezintă dimensiunea varietăţii V_N, iar pentru $N > n$ avem varietăţi n-dimensionale, reprezentînd celule de speţa întîi separate între ele prin varietăţi $n-1$ - dimensionale de speţa a doua [2]. Fiecare varietate este formată din două ramificaţii : una pentru $\alpha = +1$, iar a doua pentru $\alpha = -1$.

Demonstraţia teoremei 1. Comanda (2.1) rezultă, de exemplu, din principiul maximului [11], [12], care, în problema considerată dă condiţiile necesare şi suficiente de optim. Matricea fundamentală $R(t)$ a sistemului adjunct (2.2) se construieşte în acelaşi mod ca şi matricea $P(t)$ pentru sistemul (1.1) şi cu aceasta condiţiile de comutare, care se obţin prin anularea expresiei liniare (2.7), iau forma (2.3). Ecuaţiile (2.5) se obţin din sistemul (1.15) prin eliminarea nodurilor intermediare $\bar{x}(\theta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, care intră liniar în aceste ecuaţii. Condiţiile a) şi b) se impun în mod natural. Cu aceasta teorema 1 este demonstrată.

Se observă analogia dintre ecuaţiile (1.31) şi (2.3). Desigur, ecuaţiile (2.3) au întrucîtva altă destinaţie în problema optimală şi sînt complementate de ecuaţiile (2.5). Mai precis, primele $n-1$ ecuaţii (2.3) servesc a determinarea direcţiei vectorului $\bar{z}^*(t_0)$, iar celelalte, împreună cu ecuaţiile (2.5), determină momentele de comutare.

Analogia dintre cele două regimuri de funcţionare ale unui sistem (optimal şi autooscilant) se poate extinde şi mai departe dacă se trece de la comanda optimă în circuit deschis $u^*(t)$ la conducerea optimă în circuit închis $u^*(x^*)$. Vom prezenta teorema de trecere de la comanda optimă $u^*(t)$ la conducerea optimă $u^*(\bar{x}^*)$.

TEOREMA 2. Fie V_j celula parcursă de traiectoria optimală $\bar{x}^*(t) = \bar{x}_j^*(t)$ în intervalul $t \in (\theta_j, \theta_{j-1}]$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_j(t) = {} & [P(t-\theta_j) - P(t-\theta_{j-1})\,P^{-1}(+0)\,P(\theta_{j-1}-\theta_j)]\,\bar{x}(\theta_j) + \\ & + (-1)^j \alpha\, P(t-\theta_{j-1})\,P^{-1}(+0)\,[Q(\theta_{j-1}-\theta_j) - Q(0) - \\ & - (AT)^{-1}(\theta_{j-1}-\theta_j)]\bar{b} + (-1)^{j-1}\alpha[Q(t-\theta_j) - \\ & - Q(t-\theta_{j-1}) - (AT)^{-1}(\theta_{j-1}-\theta_j)]\bar{b} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

și $\bar{z}_j^*(t)$ soluția sistemului adjunct în același interval de timp.

$$\bar{z}_j^*(t) = R^{-1}(+0)\,R(t-\theta_j)\,\bar{z}^*(\theta_j), \qquad \bar{z}^*(\theta_j) = R^{-1}(+0)\,R(\theta_j - t_0)\,\bar{z}^*(t_0). \tag{2.9}$$

Între matricele de tranziție ale celor două sisteme adjuncte avem relația cunoscută

$$P^{-1}(+0)\,P(\tau)\,R_T(\tau)\,R_T^{-1}(+0) = E, \qquad \forall\ \tau \in (0,\ T). \tag{2.10}$$

Atunci vectorul $\bar{z}_j^*(t)$ este dat de relația

$$\bar{z}_j^*(t) = \bar{z}_j^*(\bar{x}^*) = P_{jT}(\bar{x}^*(\theta_j))\,P_{jT}^{-1}(\bar{x}_j^*(t))\,\bar{z}^*(\theta_j), \tag{2.11}$$

în care

$$P_j(\bar{x}_j^*(t)) = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}\,\pi_{jk}(\bar{x}_j^*(t)), \tag{2.12}$$

unde $\pi_{jk}(x_j^*)$ este soluția sistemului nedegenerat

$$P(+0)\,\bar{x}_j(t) = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}[\bar{x}^*(\theta_j) + (-1)^{j-1}\,\alpha A^{-1}\bar{b}]\,\pi_{jk}(t-\theta_j) - \\ - (-1)^{j-1}\,P(+0)A^{-1}\bar{b}, \tag{2.13}$$

iar matricele B_{k-1} se calculează cu formulele recurente

$$\begin{aligned}
&B_{n-1} = E, && d_{n-1} = -\text{urma}\ (A),\\
&B_{n-2} = B_{n-1}A + d_{n-1}E, && d_{n-2} = -\frac{1}{2}\ \text{urma}\ (B_{n-2}A),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_0 = B_1A + d_1E, && d_1 = -\frac{1}{n-1}\ \text{urma}\ (B_1A),\\
&0 = B_0A + d_0E, && d_0 = -\frac{1}{n}\ \text{urma}\ (B_0A),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

și cu acestea comanda (2.1) devine o conducere în circuit închis.

$$u^*(t) = u^*(\bar{x}^*) = \text{sign}\,(\bar{b}_T\bar{z}^*(\bar{x}^*)). \tag{2.15}$$

Demonstrația teoremei 2. Folosind propoziția 2, traiectoria optimală $\bar{x}_j^*(t)$ poate fi redusă la forma

$$\bar{x}_j(t) = P^{-1}(+0)\,P(t-\theta_j)[\bar{x}^*(\theta_j) + (-1)^{j-1}\,\alpha A^{-1}\bar{b}] - \\ - (-1)^{j-1}\,\alpha A^{-1}\bar{b} \qquad \forall\ t \in (\theta_j,\ \theta_{j-1}]. \tag{2.16}$$

Dacă se ține seama de identitatea [8]

$$(sE - A)^{-1} \equiv \frac{B(s)}{d(s)}, \tag{2.17}$$

în care

$$d(s) = \det(sE - A) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0, \tag{2.18}$$

$$B(s) = s^{n-1}B_{n-1} + s^{n-2}B_{n-2} + \ldots + sB_1 + B_0, \tag{2.19}$$

B_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ fiind matrice constante de dimensiuni $n \times n$, atunci matricea fundamentală $P(t)$, definită cu formula (1.16), poate fi adusă la forma

$$P(t) = B_{n-1}\pi_n(t) + B_{n-2}\pi_{n-1}(t) + \ldots + B_0\pi_1(t), \tag{2.20}$$

unde

$$\pi_k(t) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(ir\omega)^{k-1}}{d(ir\omega)} e^{ir\omega t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.21}$$

reprezintă n funcţii liniar independente, periodice $\left(\text{de perioadă } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ în raport cu t, care pot fi calculate fără a cunoaşte valorile proprii ale matricei A.

Cu aceasta, ecuaţia (2.16) devine

$$P(+0)\bar{x}_j(t) = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}[\bar{x}^*(\theta_j) + (-1)^{j-1}\alpha A^{-1}\bar{b}]\pi_k(t-\theta_j) -$$

$$-(-1)^j \alpha P(+0)A^{-1}\bar{b}. \tag{2.22}$$

A rezultat astfel un sistem de n ecuaţii liniare între funcţiile de bază $\pi_k(t-\theta_j)$ şi componentele vectorului $\bar{x}_j^*(t)$. Dacă determinantul este nenul, sistemul (2.22) se poate rezolva în raport cu $\pi_k(t-\theta_j)$ şi rezultă

$$\pi_k(t-\theta_i) = \pi_{jk}(\bar{x}^*(t)). \tag{2.23}$$

Se introduc aceste expresii în matricea fundamentală, care devine

$$P^{-1}(+0)P(t-\theta_j) = P^{-1}(+0)\left[\sum_{k=1}^{n} B_{k-1}\pi_{jk}(\bar{x}_j^*(t))\right] =$$

$$= P^{-1}(+0)P_j(\bar{x}_j^*(t)) = P_j^{-1}(\bar{x}^*(\theta_j))P_j(\bar{x}_j^*(t)). \tag{2.24}$$

Folosind acum relaţia (2.10) dintre matricele fundamentale adjuncte $P(t)$ şi $R(t)$, avem

$$R_T(t-\theta_j)R_T^{-1}(+0) = P_j^{-1}(\bar{x}_j^*(t))P_j(\bar{x}^*(\theta_j)), \quad t \in (\theta_j, \theta_{j-1}), \tag{2.25}$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 3. Sistemul optimal la care s-a ajuns poate fi realizat cu ajutorul structurii din figura 2, în care intervine un circuit de reacţie obişnuit şi un circuit de testare a parametrilor sistemului şi stării iniţiale.

Starea finală se dă la intrarea unui dispozitiv de calcul. Acest dispozitiv realizează sinteza neliniarității N, care constă din juxtapunerea cap la cap a caracteristicilor neliniare (2.11) corespunzătoare tuturor varietăților străbătute de traiectoria optimală (atît vectorul $\bar{x}^*$, cît și vectorul $\bar{z}^*$ sînt continui la joncțiunile dintre varietăți).

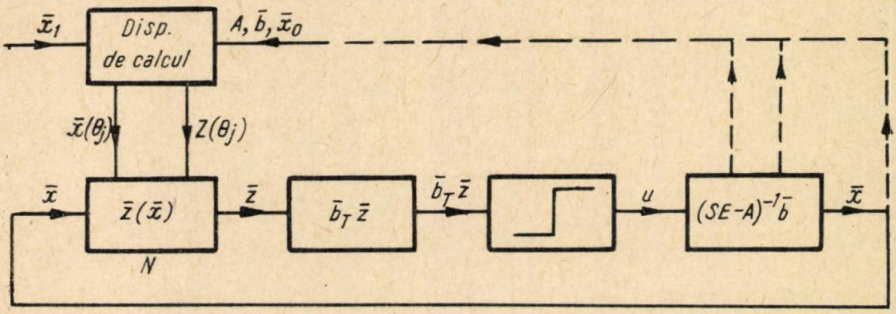
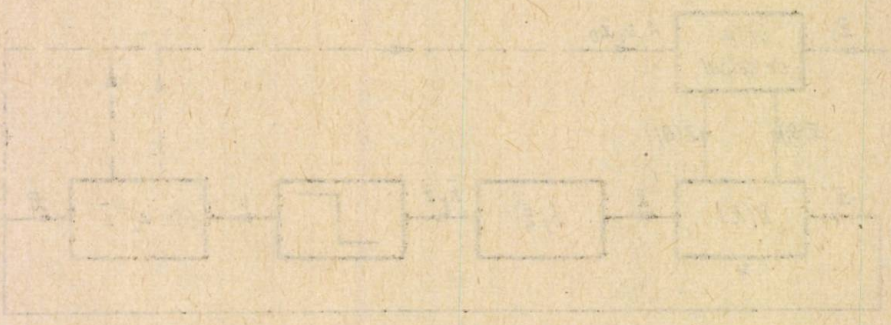


Fig. 2

Cu ajutorul teoremelor 1 și 2 se poate aborda într-un cadru mai larg problema interdependenței dintre sistemele optimale și cele neliniare de tipul considerat. Această problemă va fi reluată și dezvoltată într-o nouă lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Belea, *Algoritm de sinteză optimală după criteriul timpului minim*, comunicare prezentată la Sesiunea științifică festivă organizată cu prilejul sărbătoririi a 150 de ani de la înființarea primelor cursuri de inginerie în limba română, București, 1—3 noiembrie 1968, St. cerc. energ. electr. (sub tipar).
2. В. Г. Болтянский, *Математические методы оптимального управления*, Москва, Издательство „Наука", 1966.
3. А. М. Летов, *Аналитическое конструирование регуляторов*, I — V, Автоматика и телемеханика, *4*, *5*, *6* (1960), *4* (1961); *11* (1962).
4. R.E. Kalman, *When is a Linear Control System Optimal?* Journ. ASME, Series D, March 1964, p. 51—60.
5. V.M. Popov, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, București, Edit. Academiei, 1966.
6. W.M. Wonham, C.D. Johnson, *Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Performance Index*, Jourrn. ASME, Series D. March, 1964, pp. 107—115.
7. C. Belea, *Asupra unor proprietăți ale sistemelor adjuncte și implicațiile lor în problema optimizării sistemelor automate*, comunicare prezentată la a XIV-a Sesiune științifică a Institutului de energetică al Academiei R.S. România, martie, 1968.
8. L.A. Zadeh, Ch.A. Desoer, *Linear System Theory. The State Space Approach*, New York, McGraw Hill Book Comp., 1963.
9. C. Belea, *Integrarea ecuațiilor dinamice și determinarea caracteristicilor de timp ale sistemelor automate*, Automatica și electronica, **7**, *1* (1963).
10. К. Беля, *Нелинейные колебания в системах автоматического регулирования и управления*, Москва, Гостехиздат, 1962.
11. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, Физматгиз, 1961.
12. Л. И. Розоноэр, *Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем*, I—III, Автоматика и телемеханика, *10*, *11*, *12* (1959).



SINTEZA ÎN PUNTE A FUNCȚIEI DE INTRARE BIPĂTRATICĂ

DE

CR. VASILIU

Se dau structurile, condițiile de realizabilitate și valorile elementelor în funcție de coeficienți pentru sinteza în punte a funcției de intrare bipătratice.

1. INTRODUCERE

În problemele practice de sinteză a rețelelor electrice, funcția de intrare bipătratică, adică funcția de forma

$$Z(s)\,\frac{a_2s^2+a_1s+a_0}{b_2s^2+b_1s+b_0}, \tag{1}$$

este frecvent întîlnită. Dacă această funcție este pozitiv reală, ceea ce înseamnă că nici un coeficient nu este negativ și este îndeplinită relația

$$a_1b_1 \geqslant (\sqrt{a_2b_0}\ -\sqrt{a_0b_2}\,)^2, \tag{2}$$

atunci sinteza se poate face totdeauna prin metoda Brune sau prin procedeul Bott-Duffin simplificat. Prima metodă realizează funcția cu un minim de elemente, dar are neajunsul practic că folosește un transformator perfect. A doua duce la o rețea fără inductanțe mutuale, dar are dezavantajul că necesită un număr relativ mare de elemente (cinci elemente reactive și trei rezistive).

Este de aceea util din punct de vedere practic să fie cunoscute toate structurile (schemele) și condițiile suplimentare corespunzătoare care permit realizarea funcției bipătratice tot fără inductanțe mutuale, dar cu un număr de elemente mai mic decît cel cerut de procedeul Bott-Duffin. Pentru aceasta ar fi necesar să se analizeze toate structurile posibile cu mai puțin de opt elemente și să se rețină pe cele care pot duce la o funcție de impedanță bipătratică ce nu poate fi realizată totdeauna cu mai puține elemente decît posedă structura analizată. Această analiză, aparent simplă la prima vedere, nu a fost încă efectuată în totalitate.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, 203–218, 1970,

Dacă o anumită schemă convenabilă a putut fi selecționată, încă trei asemenea scheme pot fi deduse din prima cu ușurință, folosind anumite relații de corespondență [1]. O asemenea schemă este aceea structural inversă schemei inițiale. Pentru calcul sînt necesare următoarele substituții :

$$\begin{aligned} &a_0 \rightleftarrows b_0, && R \longrightarrow \frac{1}{R}, \\ &a_1 \rightleftarrows b_1, && L \rightleftarrows C. \\ &a_2 \rightleftarrows b_2, \end{aligned} \tag{3}$$

Aceasta înseamnă că din orice relație dintre coeficienții funcției aparținînd unei scheme se poate obține relația corespunzătoare aparținînd schemei structural inverse prin substituția coeficienților dată de (3). Tot așa un element din schema structural inversă se calculează cu formula elementului ce-i corespunde după (3) în structura dată (după ce în prealabil a fost efectuată substituția coeficienților în acea formulă).

Altă schemă se poate obține dacă în schema inițială se înlocuiesc toate capacitățile prin inductanțe și invers. Substituțiile necesare sînt

$$\begin{aligned} &a_0 \rightleftarrows a_2, && R \longrightarrow R, \\ &b_0 \rightleftarrows b_2, && L \rightleftarrows \frac{1}{C}, \end{aligned} \tag{4}$$

care se folosesc ca și mai sus. În sfîrșit, schema a patra se poate obține din prima prin aplicarea succesivă a celor două substituții anterioare sau, ceea ce este același lucru, prin aplicarea directă a substituțiilor

$$\begin{aligned} &a_0 \rightleftarrows b_2, && R \longrightarrow \frac{1}{R}, \\ &a_1 \rightleftarrows b_1, && L \longrightarrow \frac{1}{L}, \\ &a_2 \rightleftarrows b_0, && C \longrightarrow \frac{1}{C}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dacă pentru o structură dată, una dintre substituțiile de mai sus lasă condițiile realizabilitate neschimbate, atunci această structură și aceea corespunzătoare substituției sînt echivalente, în sensul că orice impedanță dată numeric, realizabilă sub forma primei structuri, este realizabilă și sub forma celei de-a doua. A doua schemă nu aduce deci nimic nou din punctul de vedere al posibilităților de sinteză.

Funcțiile de intrare bipătratice pot fi realizate prin structuri de tipul serie-paralel sau de tipul punte. Într-o lucrare anterioară [1] au fost

prezentate toate structurile de tipul serie-paralel care pot realiza funcția bipătratică cunoscute pînă în prezent, împreună cu condițiile de realizabilitate și valorile elementelor în funcție de coeficienți.

Lucrarea de față are ca scop să prezinte toate structurile de tipul punte cunoscute care pot realiza funcția bipătratică și să dea pentru fiecare structură în parte condițiile de realizabilitate și valorile elementelor în funcție de coeficienții impedanței. Această lucrare, împreună cu cea precedentă [1], va îngădui celor interesați să realizeze orice funcție bipătratică pozitiv reală dată numeric în condițiile cele mai economice (în cadrul datelor cunoscute pînă în prezent), și aceasta prin intermediul unor calcule elementare.

Deoarece orice funcție bipătratică pozitiv reală cu unul sau cu mai mulți coeficienți egali cu zero poate fi totdeauna realizată printr-o structură de tipul serie-paralel cu un număr minim de elemente, în lucrarea prezentată se va presupune că toți coeficienții funcției (1) sînt *strict pozitivi*.

În afară de ordonarea și prezentarea unitară a întregului material, parte din rezultatele incluse în această lucrare aparțin autorului.

2. STRUCTURI TIP BRUNE

Să presupunem pentru început că relația (2) este îndeplinită de semnul egalității, ceea ce înseamnă că funcția (1) este o *funcție minimă* (de

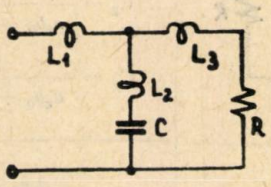


Fig. 1. — Realizarea Brune a funcției bipătratice minime.

minimă reactanță, susceptanță și rezistență). Dezvoltarea cunoscută a ciclului Brune duce la structura din figura 1, în care una dintre inductanțele L_1 și L_3 este negativă, iar între cele trei inductanțe există relația (corespunzătoare relației (2) cu semnul egalității)

$$L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3 = 0. \tag{6}$$

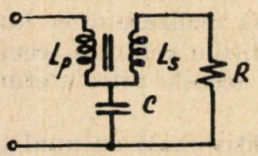
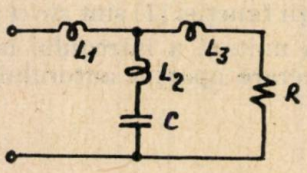
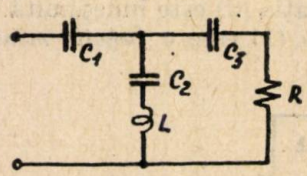
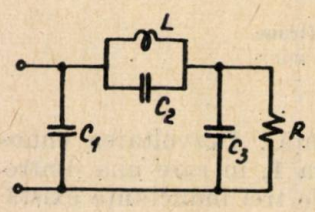
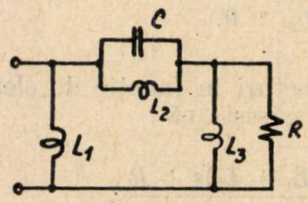
Dacă se scrie impedanța acestei structuri în funcție de elementele ei componente și se ține seama de (6), se găsește că

$$Z(s) = \frac{CR(L_1 + L_2)s^2 + (L_1 + L_3)s + R}{C(L_2 + L_3)s^2 + CRs + 1}. \tag{7}$$

Tabela 1

Structuri Brune

Condiția de realizabilitate: $a_1 b_1 = (\sqrt{a_2 b_0} - \sqrt{a_0 b_2})^2$

Tip	Structura	Valorile elementelor
1		$L_p = \frac{a_2}{b_1}$ $L_s = \frac{a_0 b_2}{b_1 b_0}$ $R = \frac{a_0}{b_0}$ $C = \frac{b_1}{a_0}$
2		$L_1 = \frac{a_2 b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_2}{2 b_0 b_1}$ $L_2 = \frac{a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2}{2 b_0 b_1}$ $L_3 = \frac{-a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2}{2 b_0 b_1}$ $R = \frac{a_0}{b_0}$ $C = \frac{b_1}{a_0}$
3		$C_1 = \frac{2 b_1 b_2}{-a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2}$ $C_2 = \frac{2 b_1 b_2}{a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2}$ $C_3 = \frac{2 b_1 b_2}{a_2 b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_2}$ $R = \frac{a_2}{b_2}$ $L = \frac{a_2}{b_1}$
4		$C_1 = \frac{-a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2}{2 a_1 a_0}$ $C_2 = \frac{a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2}{2 a_1 a_0}$ $C_3 = \frac{a_2 b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_2}{2 a_1 a_0}$ $R = \frac{a_0}{b_0}$ $L = \frac{a_1}{b_0}$
5		$L_1 = \frac{2 a_1 a_2}{a_2 b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_2}$ $L_2 = \frac{2 a_1 a_2}{a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2}$ $L_3 = \frac{2 a_1 a_2}{-a_2 b_0 + a\ b_1 + a_0 b_2}$ $R = \frac{a_2}{b_2}$ $C = \frac{b_2}{a_1}$

Împărțind funcția (1) cu b_0 și egalînd coeficienții astfel obținuți cu cei din (7), se găsesc cinci ecuații, avînd ca necunoscute elementele structurii. Valorile elementelor în funcție de coeficienții impedanței obținuți prin rezolvarea acestor ecuații au fost trecute în tabela 1, structura *1*.

Folosind substituțiile (3), (4) și (5), se găsesc și celelalte trei forme de dezvoltare a ciclului Brune. Întrucît condiția de realizabilitate este invariantă în raport cu aceste substituții ,toate schemele corespunzătoare (trecute în tabela 1) sînt echivalente între ele. Exceptînd prima structură, toate celelalte conțin un element negativ și nu pot deci fi realizate fizic. Aceste structuri pot prezenta însă interes practic în cazul în care funcția bipătratică a rezultat dintr-o funcție de ordin superior, printr-o sinteză parțială prealabilă (reducere de reactanță și de rezistență). Dacă în aceste scheme elementul negativ este L_1 sau C_1, iar din sinteza prealabilă a rezultat o inductanță sau capacitate în serie sau paralel (după caz) mai mare ca elementul negativ, acesta din urmă dispare și realizarea totală se poate face fără transformator perfect.

Să trecem acum la cazul general, acela în care funcția bipătratică (1), deși de reactanță și susceptanță minimă (nici un coeficient nul), nu este și de rezistență minimă. Aceasta înseamnă că relația (2) este satisfăcută de semnul inegalității. Prin extragerea unei rezistențe R_m egală cu valoarea minimă din $\mathrm{Re}Z(j\omega)$, care are loc la o frecvență notată cu ω_0, adică $R_m = \mathrm{Re}\, Z(j\omega_0)$, se pot ivi două cazuri.

Primul caz este acela în care impedanța $Z(s) - R_m$ are un zero pe axa imaginară, adică este de susceptanță neminimă. Impedanța $Z(s)$ se poate sintetiza atunci printr-o structură de tipul serie-paralel, cu număr minim de elemente. Cu notațiile

$$\begin{aligned} \delta_{20} &= a_2 b_0 - a_0 b_2, \\ \delta_{10} &= a_1 b_0 - a_0 b_1, \\ \delta_{21} &= a_2 b_1 - a_1 b_2, \end{aligned} \tag{8}$$

funcția $Z(s) - R_m$ are un zero pe axa imaginară cînd este satisfăcută una dintre condițiile *a*), *b*) sau *c*), și anume [1]

$$\begin{aligned} &a)\ \delta_{20} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad b_1\delta_{10} - b_0\delta_{20} \geqslant 0, \\ &b)\ \delta_{20} \leqslant 0 \quad \text{și} \quad b_2\delta_{20} - b_1\delta_{21} \geqslant 0, \\ &c)\ \delta_{20} = 0 \quad \text{și} \quad \delta_{21} > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Aceste trei condiții corespund situațiilor cînd zeroul de pe axa imaginară are loc în origine, la infinit și la o altă frecvență oarecare. Sinteza se poate face cu ușurință, folosind tabela 1 din [1].

Al doilea caz este acela cînd funcția $Z(s) - R_m$ este o funcție minimă. Aceasta se poate realiza printr-o structură Brune sau prin alte structuri, care vor fi analizate în continuare.

Rezistența R_m se poate determina impunînd coeficienților funcției $Z(s)-R_m$ să îndeplinească relația (2) cu semnul egalității. Această rezistență va fi dată atunci de o soluție reală și pozitivă a ecuației

$$AR_m^2 + BR_m + C = 0, \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned} A &= b_1^2(b_1^2 - 4b_0b_2), \\ B &= 2b_1^2(a_2b_0 - a_1b_1 + a_0b_2) + 4a_1b_0b_1b_2, \\ C &= (a_2b_0 - a_1b_1 + a_0b_2)^2 - 4a_0a_2b_0b_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Este de reținut că rezistența R_m astfel determinată corespunde cu valoarea minimă din Re $Z(j\omega)$ *numai dacă* nici una dintre condițiile (9) nu este satisfăcută. Dacă ecuația (10) duce la două soluții reale și pozitive pentru R_m, se va reține *numai aceea* care duce la o funcție $Z(s)-R_m$ ai cărei coeficienți satisfac relația (2) cu semnul egalității.

Desigur că se poate lucra și pe bază duală, extrăgîndu-se conductanța G_m din $Y(s) = 1/Z(s)$ și folosind aceeași ecuație din (10), dar înlocuind coeficienții a cu b și invers în (11). Conductanța G_m va reprezenta valoarea minimă din Re $Y(j\omega)$ *numai dacă* nici una dintre condițiile care urmează nu este satisfăcută, și anume [1]

$$\begin{aligned} &\text{d)}\ \delta_{20} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad a_1\delta_{21} - a_2\delta_{20} \geqslant 0, \\ &\text{e)}\ \delta_{20} \leqslant 0 \quad \text{și} \quad a_0\delta_{20} - a_1\delta_{10} \geqslant 0, \\ &\text{f)}\ \delta_{20} = 0 \quad \text{și} \quad \delta_{10} > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

cînd sinteza se poate face ușor și cu un număr minim de elemente folosind tabela 1 din [1].

Este de asemenea util să se reținâ că, chiar dacă nici una dintre condițiile (9) nu este satisfăcută și deci $Z(s)-R_m$ este o funcție minimă, este indicat să se verifice și condițiile (12), deoarece, în cazul cînd una dintre aceste condiții este satisfăcută, transformatorul perfect este înlăturat și realizarea se face cu număr minim de elemente.

În cazul în care ecuația (10) are două soluții reale și pozitive pentru R_m, a doua soluție poate duce la o impedanță $Z(s)-R_m$ ai cărei coeficienți satisfac egalitatea

$$a_1b_1 = (\sqrt{a_2b_0} + a_0b_2)^2. \tag{13}$$

Această impedanță (care nu mai este o funcție minimă) se poate realiza printr-o structură la fel cu cea din tabela 1, structura *2*, folosind aceleași expresii pentru valorile elementelor. Însă în situația prezentă inductanța L_2 va fi negativă. Realizarea se va putea face tot cu ajutorul unui transformator perfect ca în structura *1* din tabela 1, dar cu o inductanță mutuală negativă.

3. STRUCTURI TIP BOTT-DUFFIN SIMPLIFICATE

Dacă la realizarea funcției bipătratice (1) dorim să înlăturăm transformatorul perfect, sinteza se poate face prin procedeul Bott-Duffin simplificat (modificat). Pentru aceasta se va extrage în prealabil rezistența R_m, așa cum s-a arătat în paragraful precedent. Să presupunem deci că impedanța

$$Z(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \tag{14}$$

este o funcție minimă, adică

$$Z(j\omega_0) = jX_0, \tag{15}$$

unde ω_0 este o frecvență finită, diferită de zero. Vom presupune că $X_0 > 0$, cazul contrar putîndu-se obține printr-una din substituțiile (3) sau (4). În acest caz, la sinteza funcției minime după Brune, inductanța $L_1 = X_0/\omega_0$ este pozitivă. Acest fapt, împreună cu relația (2), luată cu semnul egalității, duce la condiția de realizabilitate

$$\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_2 b_0} - \sqrt{a_0 b_2}. \tag{16}$$

Frecvența ω_0 este frecvența de rezonanță a circuitului L_2C din ciclul Brune. Folosind valorile elementelor în funcție de coeficienții impedanței (tabela 1, structura 2) și egalitatea (16), se obține

$$L_1 = \sqrt{\frac{a_1 b_2}{b_0 b_1}}; \qquad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{a_0 b_0}{a_2 b_2}}. \tag{17}$$

Pentru a dezvolta ciclul Bott-Duffin, să considerăm impedanța (14) multiplicată cu un factor suplimentar, adică

$$Z(s) = \frac{(\alpha - s)(\alpha + s)}{(\alpha - s)(\alpha + s)} Z(s) = \frac{\alpha^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2} Z(s), \tag{18}$$

unde α este o cantitate reală și pozitivă, și s-o descompunem în suma a două impedanțe de forma

$$Z(s) = \frac{\alpha^2 Z(s) - \mu s}{\alpha^2 - s^2} + \frac{\mu s - s^2 Z(s)}{\alpha^2 - s^2} = Z_A + Z_B. \tag{19}$$

Deoarece impedanțele Z_A și Z_B au cîte un pol în semiplanul drept pentru $s = \alpha$, pentru a fi funcții pozitiv reale este necesar ca și numărătorul acestor funcții să se anuleze pentru $s = \alpha$, ceea ce duce la a impune ca constanta să aibă valoarea

$$\mu = \alpha Z(\alpha), \tag{20}$$

așadar

$$Z_A = \alpha \frac{\alpha Z(s) - s Z(\alpha)}{\alpha^2 - s^2}; \qquad Z_B = s \frac{\alpha Z(\alpha) - s Z(s)}{\alpha^2 - s^2}. \tag{21}$$

Funcţiile Z_A şi Z_B sînt pozitiv reale, deoarece nu au poli în semiplanul drept al variabilei şi nici pe axa imaginară (ca şi $Z(s)$, care este o funcţie minimă), iar

$$\operatorname{Re} Z_A(j\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2} \operatorname{Re} Z(j\omega) \geqslant 0 \tag{22}$$

şi

$$\operatorname{Re} Z_B(j\omega) = \frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2} \operatorname{Re} Z(j\omega) \geqslant 0. \tag{23}$$

Constanta α, nedeterminată încă, se poate alege astfel ca să avem $Z_A(j\omega_0) = 0$, ceea ce duce la egalitatea

$$Z(\alpha) = \alpha \frac{X_0}{\omega_0} = \alpha L_1 \tag{24}$$

sau, folosind (14),

$$L_1 b_2 \alpha^3 + (L_1 b_1 - a_2)\alpha^2 + (L_1 b_0 - a_1)\alpha - a_0 = 0. \tag{25}$$

Două dintre rădăcinile ecuaţiei (24) sînt $\alpha = \pm j\omega$. Cum suma rădăcinilor este egală cu raportul cu semn schimbat dintre coeficientul termenului de gradul doi către cel al termenului de gradul trei, rezultă că

$$\alpha = \frac{a_2 - b_1 L_1}{b_2 L_1} \tag{26}$$

sau, înlocuind L_1 din (17) şi ţinînd cont de (16),

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_0 b_1}{a_1 b_2}}. \tag{27}$$

Funcţiile pozitiv reale Z_A şi Z_B sînt acum complet determinate, dar numărătorul şi numitorul ambelor funcţii au $s-\alpha$ ca factor comun. Înlocuind valoarea constantei α din (27) în (21) şi împărţind numitorul şi numărătorul impedanţei Z_A cu $s-\alpha$, se obţine expresia

$$Z_A(s) = a_0\sqrt{a_0 b_1}\, \frac{\sqrt{\frac{a_2 b_2}{a_0 b_0}}\, s^2 + 1}{b_2\sqrt{a_1 b_2}\, s^3 + \sqrt{a_2 b_0 b_1 b_2}\, s^2 + (b_0\sqrt{a_1 b_2} + b_1\sqrt{a_0 b_1})s + b_0\sqrt{a_0 b_1}} \tag{28}$$

Această funcţie are toate zerourile pe axa imaginară, astfel încît sinteza se poate face cu uşurinţă, obţinîndu-se dipolul cu impedanţa Z_A din figura 2. Elementele acestui dipol au valorile următoare :

$$R_a = \frac{a_0}{b_0}; \qquad C_a = \frac{b_2}{a_0}\,\frac{a_1 b_0}{a_2 b_1},$$

$$C_{a1} = \frac{b_1 a_0 a_2 + a_1 b_0 b_2}{a_1\ a_0 a_2}, \tag{29}$$

$$L_a C_{a1} = \frac{a_2 b_2}{a_0 b_0} = \frac{1}{\omega^2{}_0}.$$

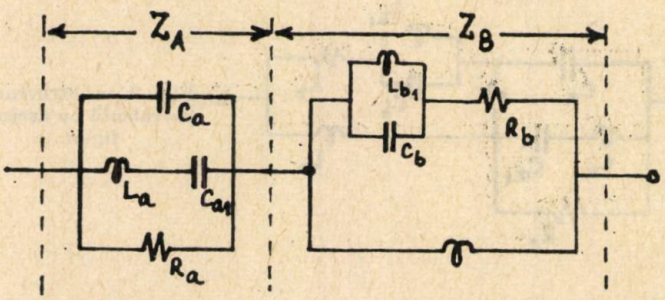


Fig. 2. — Sinteza funcției minime (14) după (28) și (30).

Pentru sinteza funcției Z_B se poate proceda la fel cum s-a procedat cu Z_A. E mai simplu însă să se folosească legătura cunoscută între elementele celor două impedanțe, și anume

$$\frac{L_b}{C_a} = Z_1 Z_2 = Z^2(\alpha), \tag{30}$$

unde Z_1 și Z_2 reprezintă impedanțele dipolilor cu elementele L_a, C_{a1} și R_a, respectiv C_b L_{b1} și R_b din figura 2. După (17), (24) și (27), mărimea $Z(\alpha)$ are valoarea

$$Z(\alpha) = \frac{a_0 a_2}{b_0 b_2}. \tag{31}$$

Din (30) și (31) se obțin elementele dipolului cu impedanța Z_B, și anume

$$\frac{L_b}{C_a} = \frac{L_a}{C_b} = \frac{L_{b1}}{C_{a1}} = R_a R_b = \frac{a_0 a_2}{b_0 b_2}. \tag{32}$$

Pentru a reduce un element în structura din figura 2, se folosește o structură echivalentă cu aceasta, arătată în figura 3. Echivalența este justificată de faptul că, pe baza relației (30), elementele L_b, C_a, Z_1 și Z_2 formează o punte echilibrată și deci punctele x și y din figura 3 sînt la același potențial, între aceste puncte putîndu-se astfel conecta orice impedanță fără a modifica impedanța dipolului total. Luînd pentru L valoarea

$$L = \frac{1}{C_a \omega_0^2}, \tag{33}$$

este posibil să se facă transfigurarea stea-triunghi arătată în figura 4, unde elementele rețelei în triunghi au valorile

$$C_x = \frac{C_b C_a}{C_b + C_a}; \quad C_y = \frac{C_x C_a}{C_b}; \quad L_x C_x = L_y C_y = \frac{1}{\omega_0^2}. \tag{34}$$

Folosind această transfigurare în figura 3, circuitele serie L_o, C_{a1} și $L_y C_y$, rezonante la aceeași frecvență ω_0, se pot reduce la unul singur.

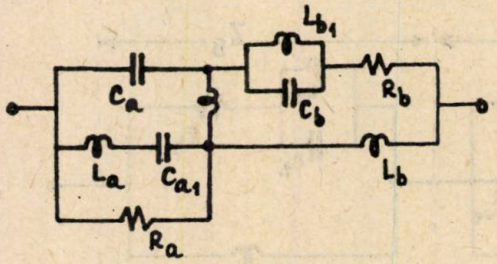


Fig. 3. — Structură echivalentă cu aceea din figura 2.

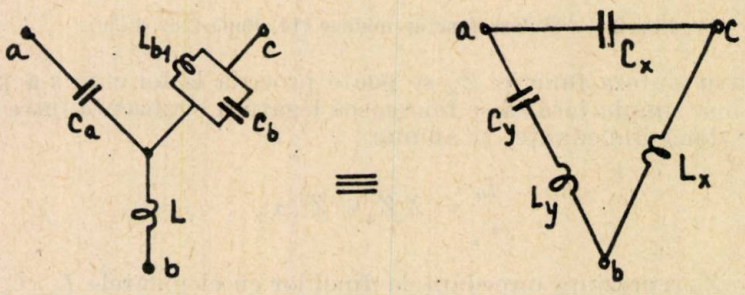


Fig. 4. — Transfigurare în figura 3 pentru reducerea unui element.

Se ajunge în acest mod în final la structura *1* din tabela 2, unde sînt prezentate, pe lîngă condiția de realizabilitate dedusă în (16), și valorile finale ale elementelor componente în funcție de coeficienții impedanței (14), obținute pe baza relațiilor stabilite mai sus.

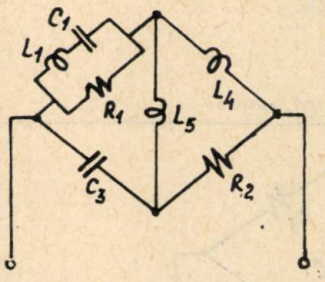
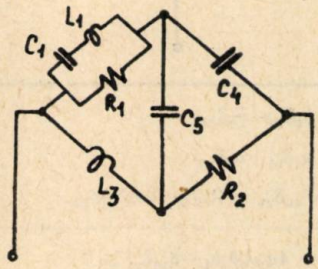
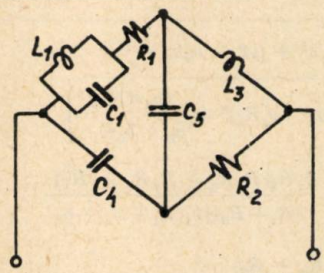
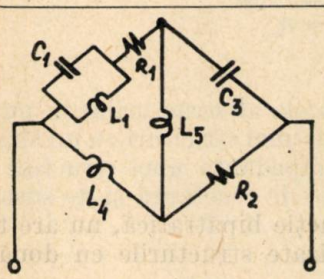
Celelalte trei structuri din tabela 2 se obțin din prima prin substituțiile (3), (4) și (5). Reamintim că structura inversă uneia în punte se obține dacă se inversează impedanțele în toate brațele și apoi se înlocuiesc între ele impedanțele din două brațe opuse. Se constată că structurile *1* și *4* sînt echivalente, deoarece au aceeași condiție de realizabilitate. Pentru același motiv sînt echivalente și structurile *2* și *3*.

4. STRUCTURI ÎN PUNTE CU UN NUMĂR DE ELEMENTE MAI MIC DECÎT TIPUL BOTT-DUFFIN SIMPLIFICAT

În cele două paragrafe anterioare au fost deduse valorile elementelor în funcție de coeficienți pentru sinteza funcției bipătratice după metoda Brune și Bott-Duffin simplificată. Aceste două metode sînt generale,

Tabela 2

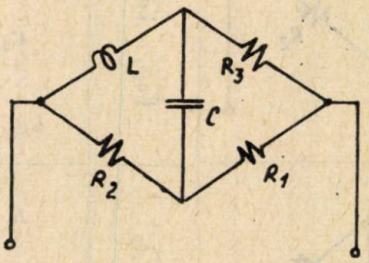
Structuri Bott – Duffin

Tip	Structura	Condiția de realizab.	Valorile elementelor
1		$\sqrt{a_1b_1} = \sqrt{a_2b_0} - \sqrt{a_0b_2}$	$R_1 = \frac{a_0}{b_0} \quad R_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad L_4 = \sqrt{\frac{a_1a_2}{b_0b_1}}$ $C_1 = \frac{(a_1\sqrt{b_0b_2} + b_1\sqrt{a_0a_2})^2}{a_0\sqrt{a_0b_1}\,(a_2\sqrt{a_0b_1} + a_1\sqrt{a_1b_2})}$ $C_3 = \frac{b_2\sqrt{a_1b_2}}{a_2\sqrt{a_0b_1} + a_1\sqrt{a_1b_2}}$ $L_1C_1 = L_5C_3 = \sqrt{\frac{a_2b_2}{a_0b_0}}$
2		$\sqrt{a_1b_1} = \sqrt{a_0b_2} - \sqrt{a_2b_0}$	$R_1 = \frac{a_2}{b_2} \quad R_2 = \frac{a_0}{b_0} \quad C_4 = \sqrt{\frac{b_1b_2}{a_0a_1}}$ $L_1 = \frac{a_2\sqrt{a_2b_1}\,(a_0\sqrt{a_2b_1} + a_1\sqrt{a_1b_0})}{(a_1\sqrt{b_0b_2} + b_1\sqrt{a_0a_2})^2}$ $L_3 = \frac{a_0\sqrt{a_2b_1} + a_1\sqrt{a_1b_0}}{b_0\sqrt{a_1b_0}}$ $L_1C_1 = L_3C_5 = \sqrt{\frac{a_2b_2}{a_0b_0}}$
3		$\sqrt{a_1b_1} = \sqrt{a_0b_2} - \sqrt{a_2b_0}$	$R_1 = a_0/b_0 \quad R_2 = a_2/b_2 \quad C_4 = \sqrt{b_1b_2/a_0a_1}$ $L_1 = \frac{(a_1\sqrt{b_0b_2} + b_1\sqrt{a_0a_2})^2}{b_0\sqrt{a_1b_0}\,(b_2\sqrt{a_1b_0} + b_1\sqrt{a_2b_1})}$ $L_3 = \frac{a_2\sqrt{a_2b_1}}{b_2\sqrt{a_1b_0} + b_1\sqrt{a_2b_1}}$ $L_1C_1 = L_3C_5 = \sqrt{a_2b_2/a_0b_0}$
4		$\sqrt{a_1b_1} = \sqrt{a_2b_0} - \sqrt{a_0b_2}$	$R_1 = a_2/b_2 \quad R_2 = a_0/b_0 \quad L_4 = \sqrt{a_1a_0/b_0b_1}$ $C_1 = \frac{b_2\sqrt{a_1b_2}\,(b_0\sqrt{a_1b_2} + b_1\sqrt{a_0b_1})}{(a_1\sqrt{b_0b_2} + b_1\sqrt{a_0a_2})^2}$ $C_3 = \frac{b_0\sqrt{a_1b_2} + b_1\sqrt{a_0b_1}}{a_0\sqrt{a_0b_1}}$ $L_1C_1 = L_5C_3 = \sqrt{a_2b_2/a_0b_0}$

adică permit sinteza oricărei funcţii pozitiv reale. Ca şi în cazul structurilor de tip serie-paralel, este util din punct de vedere practic să se ştie în ce condiţii şi cu ce structuri în punte o funcţie bipătratică pozitiv reală, cu toţi coeficienţii diferiţi de zero, s-ar putea realiza fără inductanţe mutuale şi cu un număr de elemente mai mic decît cel necesar pentru structurile Bott-Duffin simplificate. Un răspuns integral la această problemă nu a fost încă elaborat. Se cunosc doar cîteva cazuri particulare, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

Tabela 3

Structuri cu două elemente reactive şi trei rezistive

Structura	
Notaţii	$\delta_{20} = a_2b_0 - a_0b_2$ $\quad \varepsilon_1 = b_1\delta_{10} - b_0\delta_{20}$ $\delta_{10} = a_1b_0 - a_0b_1$ $\quad \varepsilon_2 = a_1\delta_{21} - a_2\delta_{20}$ $\delta_{21} = a_2b_1 - a_1b_2$ $\quad \mu = \delta_{10}\delta_{21} - (a_2b_0 - 3a_0b_2)\delta_{20}$
Condiţii de realizabilitate	1. $\delta_{20} > 0$ 2. $(a_2b_0 - 9a_0b_2)\delta_{20} + 4a_1a_0b_2b_1 - \delta_{10}\delta_{21} \geqslant 0$ 3. parametrii ε_1, ε_2 şi μ nu au acelaşi semn.
Valorile elementelor	R_1 este o rădăcină a ec : $b_2\varepsilon_1 x^2 + \mu x + a_0\varepsilon_2 = 0$ $R_2 = \frac{1}{2b_2}\left[(a_2 - b_2R_1) + \sqrt{(a_2 - b_2R_1)^2 + \frac{4b_2R_1^2\delta_{20}}{a_0 + b_0R_1}}\right]$ $R_3 = \frac{a_0(R_1 + R_2)}{b_0(R_1 + R_2) - a_0}$ $\quad L = \frac{b_2R_2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1^2)}{(R_1 + R_3)[b_1(R_1 + R_2) - a_1]}$ $LC = \frac{b_0(R_1 + R_2 + R_3)}{b_2(R_1 + R_3)}$

Singurul caz analizat în totalitate este acela al structurilor în punte formate din *cinci* elemente. Deoarece impedanţa unei structuri cu un singur element reactiv este o funcţie biliniară, iar impedanţa unei structuri cu patru elemente reactive şi unul rezistiv nu este de reactanţă şi de susceptanţă minimă (şi deci, dacă se reduce la o funcţie bipătratică, nu are toţi coeficienţii diferiţi de zero), rămîn a fi analizate structurile cu două şi cu trei elemente reactive.

O structură cu două elemente reactive și trei rezistive este prezentată în tabela 3. Impedanța acestei structuri este o funcție bipătratică. Scriindu-i expresia în funcție de elementele componente și identificînd coeficienții astfel obținuți cu cei ai funcției (1), se obțin cinci ecuații, din care se deduc [3] valorile elementelor trecute în această tabelă. Condițiile de realizabilitate rezultă ca o consecință a faptului că toate elementele trebuie să aibă valori pozitive. O a doua structură se obține din prima prin substituția (3). Celelalte două substituții, adică (4) și (5), duc la structuri identice cu primele două, așa cum se poate constata prin simplă observație. Alte structuri în punte cu două elemente reactive și trei rezistive s-ar obține dacă pe diagonala punții ar fi o rezistență. Asemenea structuri duc însă la impedanțe realizabile prin structuri de tipul serie-paralel cu două elemente reactive și trei rezistive, care sînt mai convenabile practic. Această afirmație se sprijină pe faptul că, atunci cînd pe diagonala punții este o rezistență, apare neapărat un sistem de trei rezistențe în stea (sau în triunghi) care se poate transfigura într-unul în triunghi (sau în stea), astfel încît puntea se transformă într-o structură echivalentă de tipul serie-paralel.

Menționăm că orice structură cu numai două elemente reactive nu poate niciodată realiza o funcție minimă [4].

O primă structură cu trei elemente reactive și două rezistive este structura *1* din tabela 4. Impedanța acestei structuri este în general o funcție bicubică. După stabilirea relației dintre elemente care duce la apariția unui factor comun între numărător și numitor și eliminarea acestui factor, determinarea valorilor elementelor se poate face ca și în cazul precedent [5]. Condițiile de realizabilitate rezultă din relația de reducere a impedanței la o funcție bipătratică și din constrîngerea ca elementele să aibă valori pozitive. În cazul cînd funcția bipătratică este minimă, această structură se transformă în structura *2* din tabela IV, care are elemente egale în brațe opuse ale punții.

O a doua structură cu trei elemente reactive și două rezistive se poate obține din prima prin intermediul substituției (3). Celelalte două substituții, ca și în cazul precedent, duc la structuri identice cu primele două.

Pentru structurile în punte cu mai mult de cinci elemente, n-a fost analizat decît cazul particular în care impedanța corespunzătoare este o funcție minimă [6]. Structurile care satisfac această condiție sînt arătate în tabela 5. Cînd condițiile de realizabilitate sînt satisfăcute, impedanța se reduce la o funcție bipătratică și este o funcție minimă. Structurile *2*, *3* și *4* se obțin din prima prin substituțiile (2), (3) și (4).

5. CONCLUZII

În cele ce precedă au fost deduse mai întîi relațiile care permit să se facă sinteza funcției bipătratice direct din coeficienții acestei funcții în cazul procedeului Brune și cel Bott-Duffin simplificat. Pentru cazul cînd funcția dată nu este minimă, s-a dedus relația care permite determinarea rezistenței minime tot direct din coeficienții funcției, rezistență necesară a fi extrasă înainte de aplicarea celor două procedee menționate.

Tabela 4

Structuri cu trei elemente reactive și două rezistive

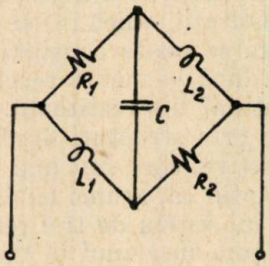
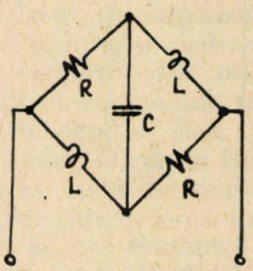
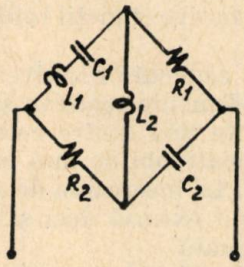
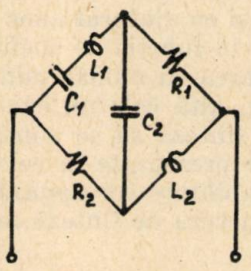
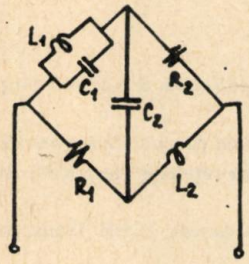
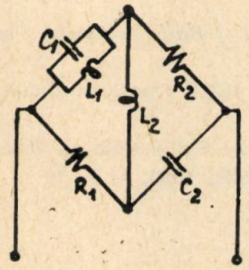
Tip	1	2
Structura		
Notații	$\mu = a_2b_0 - 4a_0b_2$ $\lambda_1 = a_1a_2b_0b_1 \qquad \lambda_2 = a_0a_2b_0b_2$ $\lambda_3 = a_0a_2b_1^2 \qquad \lambda_4 = b_0b_2a_1^2$	
Condiții de realizab.	$\sqrt{a_1b_1} > \sqrt{a_2b_0} - \sqrt{a_0b_2}\ ; \quad \mu > 0$ $a_2b_0\mu^2(\lambda_1-\lambda_2+a_0^2b_2^2)-(a_1b_1-a_0b_2)(\lambda_1-\lambda_3-\lambda_4)+$ $+\mu(a_2^2b_0^2-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)(a_2^2b_0^2-\lambda_1-4\lambda_2+$ $+\lambda_3+\lambda_4) = 0$	$\sqrt{a_1b_1} = \sqrt{a_2b_0} - \sqrt{a_0b_2}$ $a_2b_0 - 4a_0b_2 = 0$
Valorile element.	$R_1 = \frac{a_2b_0 + \sqrt{a_2b_0\mu}}{2b_0b_2} \qquad R_2 = \frac{a_2b_0 - \sqrt{a_2b_0\mu}}{2b_0b_2}$ $L_1+L_2 = \frac{a_0a_1C^2 + 2a_0b_2C + b_1b_2}{a_0b_0C^2}$ $L_1-L_2 = \frac{a_0a_1a_2C^2-a_2b_1b_2}{a_0C^2\sqrt{a_2b_0\,(a_2b_0 - a_0b_2)}}$ $C = \frac{1}{2a_0a_1}\left(T \pm \sqrt{T^2-4a_0a_1b_1b_2}\right)$ unde T este o rădăcină a ec: $T^2 - \mu T + \mu\,(a_2b_0 - a_0b_2) - \lambda_1 = 0$ Dacă se obțin pentru C mai multe valori reale și pozitive, se folosește aceia ce satisface relația $a_2b_2 = a_0b_0L_1L_2C^2$	$R = \frac{a_2}{2b_2} = \frac{2a_0}{b_0}$ $L = \sqrt{\frac{a_1a_2}{b_0b_1}}$ $C = \sqrt{\frac{b_1b_2}{a_0a_1}}$

Tabela 5

Structuri cu patru elemente reactive și două rezistive

Tip	Structura	Condiții de realizabilitate	Valorile elementelor
1		$\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_0 a_2} - \sqrt{a_2 b_0}$ $b_2 \sqrt{a_1 a_2 b_0 b_1} = a_2(b_0 b_2 - b_1^2)$	$L_1 = \frac{a_2 b_1}{b_0 b_2}$ $C_1 = \frac{b_1 \sqrt{b_2}}{\sqrt{a_0 a_2 b_0}}$ $L_2 = \sqrt{\frac{a_0 a_2}{b_0 b_1}}$ $C_2 = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_0 a_1}}$ $R_1 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_0 b_2}$ $R_2 = \frac{a_2}{b_2}$
2		$\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_2 b_0} - \sqrt{a_0 b_2}$ $b_0 \sqrt{a_0 a_1 b_2 b_1} = a_0(b_0 b_2 - b_1^2)$	$L_1 = \frac{\sqrt{a_0 a_2 b_2}}{b_1 \sqrt{b_0}}$ $C_1 = \frac{b_0 b_2}{a_0 b}$ $L_2 = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_0 b_1}}$ $C_2 = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_0 a_1}}$ $R_1 = \frac{a_2 b_0 - a_0 b_2}{b_0 b_2}$ $R_2 = \frac{a_0}{b_0}$
3		$\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_2 b_0} - \sqrt{a_0 b_2}$ $a_2 \sqrt{a_0 a_1 b_1 b_2} = b_2(a_0 a_2 - a_1^2)$	$L_1 = \frac{a_1 \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_0 b_0 b_2}}$ $C_1 = \frac{a_1 b_2}{a_0 a_2}$ $L_2 = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_0 b_1}}$ $C_2 = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_0 a_1}}$ $R_1 = \frac{a_0 a_2}{a_2 b_0 - b_2 a_0}$ $R_2 = \frac{a_2}{b_2}$
4		$\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_2 b_0} - \sqrt{a_2 b_0}$ $a_0 \sqrt{a_1 a_2 b_0 b_1} = b_0(a_0 a_2 - a_1^1)$	$L_1 = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_1 b_0}$ $C_1 = \frac{\sqrt{a_2 b_0 b_2}}{a_1 \sqrt{a_0}}$ $L_2 = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_0 b_1}}$ $C_2 = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_0 a_1}}$ $R_1 = \frac{a_0 a_2}{a_0 b_2 - a_2 b_0}$ $R_2 = \frac{a_0}{b_0}$

Au fost apoi prezentate condițiile de realizabilitate și valorile elementelor în funcție de coeficienți (δ) pentru sinteza în punte a funcției bipătratice în cazurile (cunoscute), cînd această sinteză se poate face fără inductanțe mutuale și cu un număr de elemente mai mic decît cel necesar prin metoda Bott-Duffin. Aceste cazuri cuprind: două structuri cu două elemente reactive și trei rezistive (funcții totdeauna neminime), două structuri cu trei elemente reactive și două rezistive (funcții neminime în general, minime în particular) și patru elemente reactive și două rezistive (funcții totdeauna minime).

Menționăm că în cazul structurilor cu două elemente reactive și trei rezistive (tabloul 3) și cel al structurilor cu trei elemente reactive și două rezistive (tabela 4) n-au fost prezentate decît cîte una dintre cele două structuri corespunzătoare. A doua structură se poate obține însă cu ușurință din prima cu ajutorul substituției (3) sau (4). La încercarea de sinteză cu ajutorul acestor structuri, încercarea va trebui extinsă deci și asupra structurilor ce se obțin prin substituția menționată.

Lucrarea prezentă, împreună cu cea precedentă [1], permite ca, în cadrul datelor cunoscute, sinteza unei funcții pozitiv reale date numeric să se poată face cu un număr de elemente minim și cu ajutorul unor relații care dau valorile elementelor componente direct în funcție de coeficienți. Este de la sine înțeles că pentru a obține realizarea cu număr minim de elemente este necesar (și, deocamdată cel puțin, altă cale nu există) ca pentru fiecare funcție particulară dată pentru sinteză să se controleze, în ordinea crescîndă a complexității structurilor prezentate în cele două lucrări, dacă sînt satisfăcute condițiile de realizabilitate corespunzătoare. Primele asemenea condiții satisfăcute vor da structura de sinteză cea mai simplă.

BIBLIOGRAFIE

1. Cr. Vasiliu, *Sinteza în serie-paralel a funcției de intrare bipătratică*, St. cerc. energ. electr. **19**, *2* (1969).
2. — , *Relații între coeficienți și elementele rețelei pentru sinteza funcției de intrare de ordinul doi*, comunicare la simpozionul „Analiza și sinteza rețelelor electrice", București, 1967.
3. R.M. Foster, E.L. Ladenheim, *A Class of Biquadratic Impedances*, IEEE Trans. on Circuit Theory, **10**, 262—265 (1963).
4. S. Seshu, *Minimal Realizations of the Biquadratic Minimum Functions*, IRE Trans. on Circuit Theory, **6**, 345—350 (1959).
5. M.E. van Walkenburg, *Special Case of a Bridge Equivalent of Brune Networks*, Prac. IRE, **44**, *11*, 1621 (1956).
6. R.M. Foster, S. Seshu, *Minimum Biquadratic Impedances*, IEEE Trans. on Circuit Theory, **10**, 527 (1963).
7. R.M. Foster, *Passive Network Synthesis*, Proceedings of the Symposium on Modern Network Synthesis, New York, 13, 14 și 15, aprilie, 1955, p. 5—10.

ASUPRA ECHIVALĂRII SCHEMELOR CU ELEMENTE SATURABILE

DE

A. CRĂCIUNESCU și S. BUCURENCIU

CZ 621.30.011.1

Se examinează problema echivalării unui ansamblu de N elemente saturabile cu caracteristici de tipul $\Phi = \frac{aU_m}{b+U_m}$, conectate în serie sau în paralel, printr-un singur element saturabil care are o caracteristică de același tip. Se stabilesc valorile erorilor sistematice făcute prin această echivalare în cazul în care $N = 2$.

1. INTRODUCERE

Caracteristica unui element saturabil este suficient de bine aproximată pe un domeniu larg de utilizare prin relația propusă de Frölich :

$$\Phi = \frac{aU_m}{b + U_m}. \tag{1}$$

în care Φ reprezintă fluxul magnetic fascicular, U_m tensiunea magnetică corespunzătoare, iar a și b constante caracteristice pentru un circuit magnetic dat. Aceste două constante se pot defini cu ajutorul regimurilor limită ale elementului saturabil :

$$a = \lim_{U_m \to \infty} \Phi = \Phi_s \tag{2}$$

și

$$b = a \lim_{\Phi \to 0} \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}\Phi} = \Lambda_0, \tag{2'}$$

în care Φ_s reprezintă valoarea de saturație a fluxului magnetic fascicular al unui element, iar Λ_0 valoarea permeanței inițiale a aceluiași element. După cum se indică în figura 1, în planul caracteristicii $\Phi = f(U_m)$ corespunde cîte un segment de dreaptă pentru fiecare dintre constantele a și b.

În această lucrare se vor stabili expresiile analitice ale coeficienților a și b pentru un element saturabil a cărui caracteristică aproximează pe aceea a N elemente conectate în serie sau în paralel și se vor analiza erorile cu care se poate face această aproximare în cazul în care $N = 2$.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 219–223, 1970

2. CONECTAREA ÎN SERIE

Comportarea unui ansamblu de N elemente saturabile de coeficienţi $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, ..., $(a_N; b_N)$ conectate în serie (fig. 2*a*) este descrisă în regim staţionar prin următoarele $2N + 1$ ecuaţii :

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_i & (i = 1, \ldots, N), \\ U_{m_i} = \dfrac{b_i \Phi_i}{a_i - \Phi_i} & (i = 1, \ldots, N), \\ U_m = \sum_{i=1}^{N} U_{m_i}. \end{cases}$$

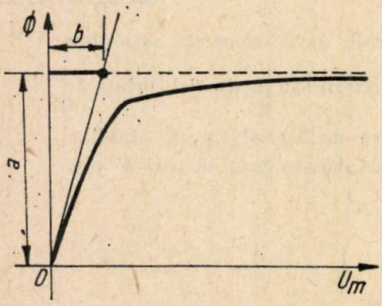


Fig. 1. — Definirea constantelor caracteristice ale unui element saturabil.

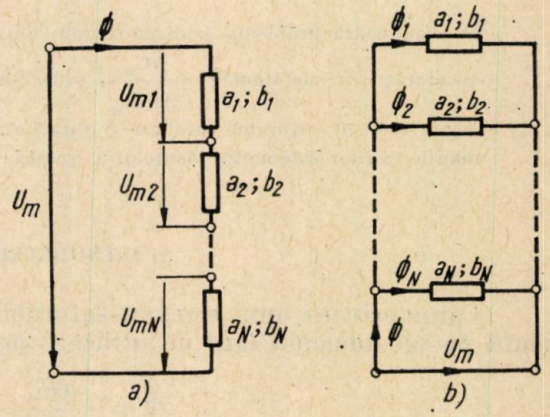


Fig. 2. — Conectarea în serie (*a*) şi în paralel (*b*) a elementelor saturabile.

Rezultă pentru caracteristica ansamblului expresia

$$U_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i \Phi}{a_i - \Phi}. \tag{3}$$

Această ultimă expresie nu poate fi adusă la forma (1), însă poate fi aproximată suficient de precis cu o relaţie de acest fel. Coeficienţii elementului saturabil corespunzător caracteristicii aproximate sînt determinaţi prin relaţiile

$$a = \min\ (a_1, a_2, \ldots, a_N), \tag{4}$$

deoarece saturaţia unui ansamblu de elemente înseriate se obţine atunci cînd unul dintre elemente s-a saturat, şi

$$b = a \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{a_i}, \tag{4'}$$

după cum rezultă din definiţia (2') a acestui parametru.

Se va analiza eroarea cu care se face aproximarea expresiei (3) printr-o relaţie de forma (1), ai cărei coeficienţi sînt daţi de relaţiile (4).

Pentru două elemente cu coeficienții $(a_1 ; b_1)$, respectiv $(a_2 ; b_2)$, dacă $a_1 < a_2$, eroarea relativă are expresia :

$$\varepsilon_{U_m}^{(s)} = \frac{U_{m_a} - U_{m_e}}{U_{m_e}} = \frac{(a_2 - a_1)\,\Phi}{a_2\left[a_1 + a_2\frac{b_1}{b_2} - \Phi\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)\right]}, \tag{5}$$

în care U_{m_e} reprezintă valoarea exactă a tensiunii magnetice, iar U_{m_a} valoarea aproximată a acesteia.

Dacă se introduc notațiile

$$x = a_2/a_1 ; \qquad x \geqslant 1,$$

$$y = b_1/b_2 ; \qquad y \geqslant 0,$$

$$z = \Phi/a_1 ; \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

atunci expresia (5) se poate pune sub forma

$$\varepsilon_{U_m}^{(s)} = \frac{(x-1)_z}{x\,(1 + xy - yz - z)}.$$

În figura 3 este prezentată o diagramă din care se poate stabili valoarea erorii relative sistematice făcute prin aproximarea expresiei (3) cu o relație de forma (1) pentru valori date ale parametrilor x și y și pentru valoarea maximă uzuală a lui z. Pentru $z < 0{,}9$, erorile făcute sînt mai mici, funcția $\varepsilon_{U_m}^{(s)}(x, y, z)$ fiind monoton crescătoare în raport cu z.

3. CONECTAREA ÎN PARALEL

Comportarea unui ansamblu de N elemente saturabile de coeficienți $(a_1 ; b_1)$, $(a_2 ; b_2)$, ..., $(a_N ; b_N)$ conectate în paralel (fig. 2′) este descrisă în regim staționar prin următoarele $2N+1$ ecuații :

$$\begin{cases} U_m = U_{m_i} & (i = 1, \ldots, N), \\ \Phi_i = \dfrac{a_i U_{m_i}}{b_i + U_{m_i}} & (i = 1, \ldots, N), \\ \Phi = \sum\limits_{i=1}^{N} \Phi_i. \end{cases}$$

Rezultă pentru caracteristica ansamblului expresia

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i U_m}{b_i + U_m}. \tag{6}$$

Se aproximează această expresie printr-o relaţie de forma (1), ai cărei coeficienţi determinaţi pe baza definiţiilor (2) sînt

$$a = \sum_{i=1}^{N} a_i, \tag{7}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i/b_i}. \tag{7'}$$

Pentru două elemente saturabile de coeficienţi $(a_1; b_1)$, respectiv $(a_2; b_2)$, eroarea relativă sistematică cu care se face această aproximare este

$$\varepsilon_{\Phi}^{(p)} = \frac{\Phi_a - \Phi_e}{\Phi_e} = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2 U_m}{[a_1 b_2 + a_2 b_1 + (a_1 + a_2) U_m] \cdot [(a_1 + a_2) b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) U_m]}.$$

Funcţia $\varepsilon_{\Phi}^{(p)}(U_m)$ are un maxim pentru valoarea $U_m = \sqrt{b_1 b_2}$:

$$\varepsilon_{\Phi,\max}^{(p)} = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2}{[a_1 b_2 + a_2 b_1 + (a_1 + a_2)\sqrt{b_1 b_2}]^2}.$$

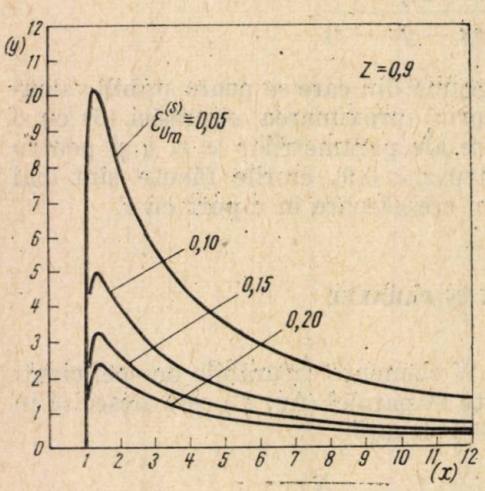


Fig. 3. — Erorile sistematice pentru $z = 0{,}9$ care se fac la înlocuirea a două elemente saturabile conectate în serie cu un element de acelaşi tip.

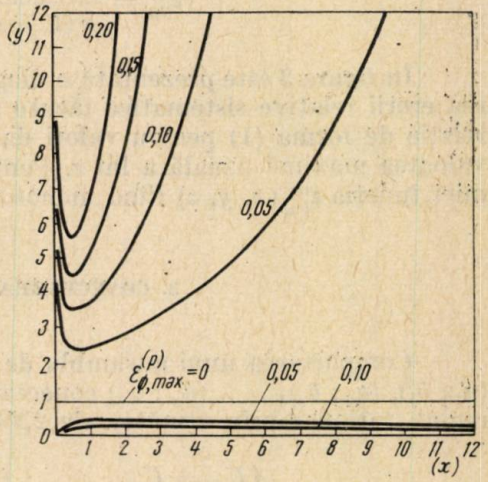


Fig. 4. — Erorile sistematice maxime care se fac la înlocuirea a două elemente saturabile conectate în paralel cu un element de acelaşi tip.

Dacă se introduc notaţiile

$$x = a_2/a_1,$$
$$y = b_1/b_2,$$

atunci expresia erorii relative maxime devine

$$\varepsilon_{\Phi,\max}^{(p)} = \frac{x(1 - \sqrt{y})^2}{(1 + x\sqrt{y})^2}.$$

În figura 4 este prezentată o diagramă din care se poate stabili valoarea erorii relative maxime făcute la aproximarea expresiei (6) cu o relație de forma (1) pentru valori date ale parametrilor x și y.

4. CONCLUZII

Pentru rețele cu neliniarități de forma $\Phi = \frac{aU_m}{b + U_m}$ problema determinării unui element echivalent cu N elemente conectate în serie sau în paralel se poate rezolva cu precizie satisfăcătoare folosind relațiile (4), respectiv (7). Erorile sistematice care se fac la aproximarea relațiilor (3) și (6) prin expresii de forma (1) se pot stabili din diagramele prezentate în figurile 3 și 4.

BIBLIOGRAFIE

1. Fischer I., Moser H., *Die Nachbildung von Magnetisierungskurven durch einfache algebrische oder transzendente Funktionen*, Archiv für Elektrotechnik, **42**, *5*, 286—299 (1956).
2. Wajs K., *Funkcje zastepcze charakterystyk magnesowania*, Przęglad Elektrotechniczny, **14**, *6*, 246—252 (1968).
3. Widger G.F.T., *Representation of magnetisation curves over extensive range by rational-fraction approximations*, Proc. I.E.E., **116**, *1*, 156—160 (1969).

I.S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, *Tratat de maşini electrice*, vol. I, *Maşini de curent continuu*, Bucureşti, Ed. Academiei, 1968, 412 p., 258 fig. + 35 de referinţe bibliografice

Tratatul de maşini electrice al academicianului prof. I.S. Gheorghiu şi prof. dr. ing. Al. Fransua cuprinde patru volume.

În primul volum, autorii tratează maşinile de curent continuu, urmînd ca volumul al doilea să trateze transformatoarele electrice, al treilea maşinile electrice asincrone şi ultimul maşinile electrice sincrone. Volumul recenzat, *Maşini de curent continuu*, conţine 24 de capitole şi o listă de 35 de indicaţii bibliografice din literatura de specialitate românească şi străină.

Într-o scurtă introducere se face un istoric al surselor de curent continuu.

Primul capitol prezintă principalele elemente constructive ale maşinii de curent continuu, insistîndu-se asupra circuitului magnetic. Numeroase figuri înlesnesc înţelegerea construcţiei maşinilor de curent continuu.

În capitolul 2, autorii se ocupă de cîmpul magnetic de excitaţie al maşinilor de curent continuu, studiindu-se cîmpul magnetic din întrefier, influenţa dinţilor rotorului, cîmpul din părţile frontale, influenţa canalelor de ventilaţie şi cîmpul de dispersie. Se dau relaţii privind calculul cîmpului magnetic de excitaţie, însoţite de figuri explicative.

Calculul circuitului magnetic se face în capitolul 3. Se indică metodele şi relaţiile de calcul, precum şi valorile uzuale ale inducţiei magnetice în diferite porţiuni ale circuitului magnetic.

Capitolul 4 cuprinde cîteva noţiuni asupra înfăşurărilor de curent continuu, teoria completă a acestor înfăşurări fiind dată la sfîrşitul volumului, ţinînd mai mult de capitolul final de proiectare. Se descriu două exemple dintre cele mai simple, de înfăşurare buclată simplă şi înfăşurare ondulată simplă, care sînt strict necesare în prima parte a volumului pentru înţelegerea principiului de funcţionare al maşinii de curent continuu. Acest lucru a fost necesar deoarece studiul fenomenelor fundamentale ale maşinii, cum ar fi reacţia indusului sau comutaţia, nu poate ignora legătura cu teoria înfăşurărilor şi fiindcă, pe de altă parte, teoria înfăşurărilor este strîns legată, la rîndul ei, de fenomenele amintite mai sus.

Capitolele 5 şi 6 analizează tensiunea electromotoare indusă în înfăşurarea rotorică şi cuplul electromagnetic al maşinii de curent continuu. Se stabileşte expresia tensiunii electromotoare induse în cîmpul de excitaţie, pornind de la legea inducţiei electromagnetice scrisă sub formă dezvoltată şi nedezvoltată, punîndu-se în evidenţă necontradicţia dintre rezultatele obţinute în cele două cazuri şi fiind elucidat şi rolul colectorului ca piesă constructivă fundamentală a maşinii de curent continuu. Expresia cuplului este dedusă atît pe baza teoremei forţelor generalizate, cît şi cu ajutorul tensorului tensiunilor maxwelliene.

Capitolul 7 prezintă într-un mod foarte accesibil reacţia indusului la maşina de curent continuu, fiind însoţit de numeroase figuri explicative.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 225—233, 1970

În continuare, capitolul 8, cuprinde probleme legate de comutația mașinilor de curent continuu, subliniindu-se multiplele aspecte teoretice și practice ale acestei probleme, necesitatea comutației fără scîntei pentru o funcționare de lungă durată și sigură a mașinii, încheindu-se cu examinarea caracteristicilor periilor și a comportării contactului alunecător, precum și a mijloacelor de îmbunătățire a comutației.

Capitolul 9 tratează regimurile de funcționare ale mașinii de curent continuu : generator, motor și frînă. Proprietatea de reversibilitate a mașinilor electrice de curent continuu este prezentată ca o consecință a fenomenelor de inducție electromagnetică și de apariție a forțelor electromagnetice asupra conductoarelor parcurse de curent aflate în cîmp magnetic. Se studiază în detaliu principiul de funcționare a mașinii de curent continuu în fiecare regim și se stabilesc ecuațiile generale de funcționare staționară și bilanțul de puteri. Sînt deduse apoi ecuațiile regimului dinamic, schemele-bloc și funcțiile de transfer necesare studiului mașinii de curent continuu prin procedeele moderne de calcul electronic.

În capitolele 10—14, autorii se ocupă de caracteristicile și de performanțele generatorului cu excitație separată (independentă), cu autoexcitație (derivație, serie) și mai multe înfășurări de excitație precum și de caracteristicile și performanțele motorului cu excitație separată (derivație) și serie. Pentru fiecare caz în parte se dau ecuațiile și caracteristicile funcționale în regim staționar și dinamic, indicîndu-se schemele-bloc ale modelului analogic pentru rezolvarea problemelor legate de funcționarea mașinii de curent continuu pe un calculator analogic.

Pornirea motoarelor de curent continuu este prezentată în capitolul 15. Se analizează metodele utilizate în practică pentru pornirea motoarelor de curent continuu, indicîndu-se și cîteva scheme pentru pornirea automată.

Capitolul 16 tratează despre utilizarea mașinii de curent continuu pentru frînarea instalațiilor, analizîndu-se diferite moduri de utilizare a mașinii pentru a frîna un sistem mecanic. Se dau ecuațiile și caracteristicile de funcționare ale mașinii.

Metodele de reglare a vitezei motoarelor de curent continuu sînt descrise în capitolul 17. Este expusă totodată și o metodă modernă de reglare a vitezei, constînd în alimentarea prin impulsuri de tensiune, care permite obținerea unei zone de liniaritate în caracteristicile sistemelor cu relee. Se dau indicații privind întrebuințarea elementelor de comutație cu semiconductoare pentru comanda directă a motoarelor.

Pierderile și randamentul mașinilor electrice de curent continuu fac obiectul capitolului 18. Se dau relații de calcul însoțite de tabele cu coeficienți care intră în calcule.

Capitolul 19 tratează încălzirea mașinilor electrice de curent continuu și determinarea puterii nominale a mașinilor electrice. Sînt deduse ecuațiile încălzirii și răcirii corpurilor omogene și este analizată transmisia căldurii în mașinile electrice. Sînt descrise fenomenele care limitează puterea mașinii și se definește puterea nominală și de suprasarcină a mașinii. În încheiere se dau indicații privind metodele de răcire și particularitățile acestora.

Capitolele 20 și 21 cuprind determinarea randamentului mașinilor electrice de curent continuu și efectuarea încercărilor de bună execuție a mașinilor electrice. Se acordă o importanță deosebită metodelor industriale de încercare și ridicare experimentală a curbelor caracteristice și de randament.

O teorie completă și inedită a înfășurărilor de curent continuu este prezentată în capitolul 22. Se dau detalii teoretice și formule pe baza cărora se poate face proiectarea. În încheiere se indică și domeniile de aplicare ale diferitelor înfășurări de curent continuu.

În capitolul 23 se descriu o serie de mașini electrice speciale care funcționează pe principiul mașinii de curent continuu. Acestea sînt abordate din punct de vedere al principiului de funcționare și al performanțelor lor.

Ultimul capitol analizează corelația dintre putere, solicitările electromagnetice specifice și dimensiunile principale la mașinile de curent continuu precum și solicitările mecanice de natură electromagnetică.

Lucrarea constituie o sinteză a literaturii străine și românești, consacrată mașinilor electrice de curent continuu, și totodată cuprinde o succintă prezentare a rezultatelor cercetărilor științifice ale autorilor.

Succesiunea capitolelor este logică, iar metoda de prezentare didactică.

Prezentul volum al tratatului se adresează unui cerc foarte larg de cititori (începînd cu conductorul tehnic și pînă la doctorandul care-și pregătește teza de doctor inginer), tratînd uneori la nivele diferite tot ceea ce privește teoria și construcția mașinilor electrice de curent continuu.

Aurel Dobraniș

DAN TEODORESCU, *Servomotorul-amplificator și aplicațiile lui în automatizări*, București, Edit. Academiei, 1968, 261 p.

În alegerea elementelor de automatizare, inginerul automatist se conduce după cîteva criterii bine încetățenite, și anume siguranța în funcționare, performanțele din punctul de vedere al reglării, prețul de cost.

În legătura directă a unui sistem de reglare automată de o structură clasică sînt cuprinse traductorul, elementul de eroare, amplificatorul, elementul de execuție și elementul automatizat, toate acestea fiind alese după criteriile de mai sus. Tendința proiectanților și a constructorilor din acest domeniu a fost aceea de a crea dispozitive în stare să cumuleze simultan cîteva funcții ale elementelor enumerate. Rar s-a reușit acest lucru.

În lucrarea prezentată de Dan Teodorescu, specialiștii din domeniul automatizărilor au plăcuta surpriză de a găsi descrise la un nivel matematic corespunzător elemente de automatizare care cumulează mai multe funcții în sistemul automat, și anume convertor c.c—c.a, amplificator, element de execuție. Aceste aparate cu funcții complexe au constituit obiectul unor invenții ale autorului brevetate în țară și străinătate în decursul cîtorva ani, și trebuie salutată intenția de a face cunoscute unui larg număr de cititori rezultatele atît de rodnice ale muncii sale.

Sînt prezentate două tipuri de servomotoare-amplificatoare, și anume : servomotorul-amplificator cu poli ecranați și servomotorul-amplificator ferorezonant, variante care înglobează într-o structură unitară, compactă, un servomotor asincron cu un amplificator magnetic. Apare necesitatea unui studiu al regimului de pornire, al regimului de mers, al caracteristicii mecanice și al performanțelor în regim tranzitoriu, utilizînd metode matematice adecvate. În acest scop, lucrarea cuprinde trei părți, fiecare împărțită pe capitole. Se face de fiecare dată compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale. Lucrarea urmărește să ne pună la dispoziție criteriile și relațiile de proiectare ale acestor elemente de automatizare. Trebuie menționat de la început că, dată fiind complexitatea fenomenelor magnetice și electrice care au loc în aceste servomotoare-amplificatoare, tratarea prin metodele matematice clasice devenea extrem de greoaie, determinîndu-l pe autor să găsească metode originale.

Prima parte e destinată servomotorului-amplificator cu poli ecranați, în care se face inițial un studiu comparativ între acestea și servomotoarele asincrone bifazate utilizate curent în acest domeniu, cu care ocazie se arată și soluții constructive pentru primele, se prezintă

metodele matematice propuse de autor, apoi se trece la analiza pe această bază a regimurilor de funcţionare.

Metoda originală a autorului de analiză a funcţionării servomotoarelor-amplificatoare, prezentată în capitolul 2, constă în aceea că face echivalarea între saturarea coloanelor polilor cu o creştere a întrefierului sub polii respectivi. Numită metoda întrefierului echivalent de comandă, aceasta e prezentată sub forma analitică şi grafoanalitică. Prin metoda analitică se consideră numai fundamentala fluxului polar alternativ, luînd caracteristica de magnetizare a materialului de o anumită formă şi neglijîndu-se histerezisul şi curenţii turbionari în miez în cazul în care comanda se face prin curent continuu, alternativ sau pulsatoriu. Folosindu-se de dezvoltări cu ajutorul funcţiilor Bessel (întrucît acestea sînt tabelate), autorul determină cu o bună aproximaţie componenta continuă, fundamentala şi armonicile, cu o contribuţie importantă a cîmpului magnetic, apoi, scriind formula permeanţei, rezultă întrefierul echivalent. Printr-o analiză a relaţiilor matematice obţinute se trag concluzii privind variaţia întrefierului echivalent în funcţie şi de nivelul semnalului.

Metoda grafoanalitică, în baza relaţiei de echivalenţă şi considerînd date curba de magnetizare a materialului şi întrefierul real al motorului, obţine grafic caracteristica întrefierului echivalent de comandă, de unde se poate obţine valoarea solenaţiei de comandă. Se iau în studiu cazurile cele mai caracteristice pentru servomotoarele-amplificatoare care permit tratarea problemei pentru orice formă a solenaţiei de comandă. În capitolele 3—4 se face analiza regimurilor de funcţionare a servomotorului-amplificator cu poli ecranaţi, determinîndu-se curenţii rotorici, cîmpul în întrefier, fluxurile şi solenaţiile polare necesare în ultimă instanţă calculării armonicilor cuplului, din care reiese caracteristica lui mecanică în supoziţia că barele rotorului real pot fi echivalate cu un cilindru plin de grosime uniformă, problema fiind rezolvată în coordonate carteziene, deoarece întrefierul este foarte mic în raport cu diametrul rotorului. Concordanţa bună dintre rezultatele teoretice şi determinările experimentale atestă că relaţiile stabilite teoretic pot fi utilizate cu succes atît pentru studiul, cît şi pentru proiectarea servomotorului-amplificator cu poli ecranaţi.

În capitolul 5 se acordă o deosebită importanţă acestui tip de servomotor-amplificator privit ca element de automatizare utilizînd o metodă grafică pentru determinarea regimului tranzitoriu cu o precizie suficientă, întrucît metoda clasică nu poate da satisfacţie. Aceasta permite determinarea caracteristicii indiciale, din care se scoate constanta de timp ce se poate pune în corespondenţă directă cu parametrii electrici în anumite ipoteze simplificatoare. Se trece apoi la servomotorul cu caracteristici cvasiliniare şi pronunţat neliniare (releu), determinîndu-le funcţia de transfer sau traiectoriile fazice. Se tratează pe scurt şi un sistem de reglare automată cu eşantionare, care cuprinde un servomotor-amplificator.

Partea a doua se ocupă de servomotorul-amplificator ferorezonant, urmărind rezolvarea aceloraşi probleme pentru acest caz ca şi în prima parte. Trebuie amintită o proprietate importantă a acestui tip de servo-amplificator, şi anume comportarea cvasiliniară la semnale mici şi pronunţat neliniară la semnale mari, care-i conferă prioritate în diverse situaţii speciale şi, în plus, posibilitatea modificării formei caracteristicii mecanice în funcţie de modul conectării la reţea, permiţînd obţinerea de caracteristici liniare cînd este necesar acest lucru. Se arată că e foarte avantajos în acest caz utilizarea unei frecvenţe de lucru de 400—500 Hz, întrucît performanţele se îmbunătăţesc substanţial, iar gabaritele scad. Utilizînd aceleaşi metode matematice ca în prima parte, autorul găseşte relaţii şi criterii de proiectare.

Partea a treia cuprinde în primul rînd cîteva exemple de sisteme de reglare automată cu servomotoare bifazate, arătîndu-se care sînt performanţele, siguranţa în funcţionare, costul, ca apoi să se treacă la exemple de sisteme de reglare în care se utilizează servomotoare-amplificatoare, urmărindu-se punerea în evidenţă a aceloraşi lucruri. Astfel se vede că din toate punctele de vedere servomotoarele-amplificatoare se impun. Avînd în vedere că experienţa în uzinarea lor este mică, pe măsura perfecţionării ele vor fi de neînlocuit. Tot în această

parte se face o analiză a comportării dinamice a unor sisteme automate cu servomotoare-amplificatoare. Metodele de analiză utilizate în acest capitol sînt cunoscute inginerilor automatişti, ea punînd în evidenţă cum trebuie ţinut cont de parametrii servomotorului-amplificator în evoluarea performanţelor unui sistem de reglare automată.

Lucrarea se adresează în aceeaşi măsură proiectanţilor din domeniul micromotoarelor electrice prin criteriile şi relaţiile de proiectare, cît şi inginerilor automatişti prin avantajele pe care le prezintă aceste elemente în simplificarea circuitelor de reglare automată.

Mihai Boiţă

CONSTANTIN V. BĂLĂ, *Proiectarea maşinilor electrice*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1967, 245 p.

Concepută ca un îndrumar în proiectarea maşinilor şi a transformatoarelor electrice, lucrarea are un pronunţat caracter didactic-explicativ şi se adresează în primul rînd studenţilor de la facultăţile de electrotehnică. Depăşind însă limitele unei lucrări didactice de îndrumare prin modul şi nivelul prezentării şi prin elementele de noutate aduse ca rezultate recente ale cercetării ştiinţifice în domeniu, lucrarea se adresează şi inginerilor proiectanţi cu experienţă sau altor iniţiaţi.

Un merit deosebit revine autorului în sintetizarea unui material extrem de bogat şi variat într-un volum restrîns. Această condensare, fără a influenţa negativ lucrarea, îi sporeşte, dimpotrivă, originalitatea şi subliniază intenţia de a prezenta unitar unele fenomene electromagnetice comune tuturor tipurilor de maşini electrice, asigurînd totodată o independenţă relativă expunerii metodei de proiectare a fiecărei maşini electrice în parte.

Întregul material apare astfel judicios împărţit în cele cinci capitole ale lucrării, însumînd un număr de 245 pagini.

În primul capitol se prezintă calculul circuitului magnetic, cîmpurile de scăpări, pierderile, forţele electromagnetice şi forţele electrodinamice de scurtcircuit, ventilaţia şi încălzirea, ca elemente generale de proiectare, problemele specifice fiecărui tip de maşină fiind prezentate în capitolele următoare : maşina de curent continuu (2), transformatorul (3), maşina asincronă de inducţie (4) şi maşina sincronă (5).

Capitolele au o structură asemănătoare şi cuprind descrierea construcţiei tipului de maşină examinat, calculul dimensiunilor principale ale miezului feromagnetic şi ale bobinajului, calculul solicitărilor electromagnetice, predeterminarea parametrilor circuitelor electrice şi a caracteristicilor de funcţionare, indicaţii privind calculul solicitărilor termice şi mecanice.

Se insistă asupra calculului electromagnetic, se dau exemple concrete de aplicare a legilor de bază din electrotehnică şi se prezintă relaţii complete, în multe cazuri demonstrate analitic, justificîndu-se coeficienţii numerici aleşi.

Calculul mecanic este prezentat sub o formă restrînsă, indicîndu-se numai expresiile forţelor electromagnetice şi electrodinamice de scurtcircuit. Evident că această restrîngere obligă pe începător la consultarea unei bibliografii adecvate pentru informare şi completarea cunoştinţelor necesare, ceea ce a intrat în intenţiile autorului.

Expresiile de calcul şi legile aplicate sînt scrise în sistemul de unităţi MKSA raţionalizat, urmărindu-se astfel evitarea erorilor care apar obişnuit la transformări în cazul aplicării altor sisteme de unităţi.

Aspectul economic al proiectării se bucură de o atenţie deosebită, insistîndu-se permanent asupra necesităţii determinării parametrilor funcţional-constructivi în vederea stabilirii unei soluţii optime tehnice şi economice.

Elementele noi de calcul introduse în lucrare, vizibile în special la prezentarea părţii generale de proiectare a maşinilor şi a transformatoarelor electrice din capitolul întîi, constituie o valorificare concretă a rezultatelor recente ale cercetării ştiinţifice, domeniu în care autorul a adus o recunoscută şi valoroasă contribuţie.

Partea grafică, ireproşabilă ca execuţie, urmăreşte şi completează textul explicativ, corespunzînd integral scopului didactic al lucrării.

Pentru mărirea siguranţei în aplicarea relaţiilor indicate, era recomandat ca fiecare capitol să fie însoţit de un exemplu de calcul, mijloc eficace în însuşirea unei metodici de proiectare.

Bibliografia anexată cuprinde, pe lîngă unele lucrări clasice şi lucrări mai recente din domeniul maşinilor electrice, autorul promovînd, aşa cum am mai subliniat, elementele de noutate care permit o mai bună aproximare în predeterminarea parametrilor maşinii proiectate.

Menită să completeze o lacună îndeobşte cunoscută a literaturii noastre tehnice de specialitate, lucrarea, concepută şi realizată într-o formă îndrăzneaţă, a trezit un viu interes încă de la apariţie.

Stilul clar şi curgător al expunerii, exprimarea precisă şi concisă, forma de prezentare generală a lucrării, la care o contribuţie însemnată revine editurii didactice, asigură o lectură plăcută.

P. Oprişan

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Rezumatele articolelor apărute în « Revue Roumaine des sciences techniqués », — Série electrotechnique et énergetique, tom. 15, nr. 1, 1970

CI.M. DJUVARLI, G.V. VECIHAIZER, P.V. LEONOV

c.z. 621.315.60 : 537.529

Particularităţi ale descărcărilor în cavităţi umplute cu gaz din interiorul unui mediu dielectric

S-au efectuat experimentări pe modele pentru a obţine informaţii asupra evoluţiei descărcărilor parţiale în cavităţile umplute de gaz în interiorul izolaţiilor. S-a observat influenţa produsului p.d. asupra aspectelor caracteristice ale impulsurilor curentului de descărcare. S-au comparat pentru diferite valori ale produsului p.d. efectele impulsurilor de descărcare asupra suprafeţei dielectricului.

REMUS RĂDULEŢ şi ALFONS IFRIM

c.z. 621.3.018.44 : 621.313.17

Forţa de tracţiune a motorului de inducţie liniar cu indusul în formă de lamă conductoare

Se calculează densitatea curentului electric din indusul în formă de lamă a unui motor liniar fără a se neglija componenţa acesteia în direcţia mişcării, iar în aceste condiţii se calculează forţa care se exercită asupra lamei indus. În calcule, efectuate prin integrarea ecuaţiilor lui Maxwell, se consideră, de asemenea, nenul cîmpul magnetic de reacţie a indusului în întregul întrefier al maşinii.

AUGUSTIN MORARU

621.3.013.2/3.001.5

Distribuţia cîmpului magnetic în jugul turbogeneratorului

Se prezintă un algoritm de determinare numerică a cîmpului magnetic staţionar plan în medii magnetizabile izotrope neliniare pentru cazul în care se dau valorile componentei normale a inducţiei pe frontierele domeniului. Algoritmul descris este convergent pentru orice formă a curbei de magnetizare şi la orice nivel al inducţiilor.

Se prezintă rezultatele studiului efectuat, cu ajutorul algoritmului descris, asupra distribuției inducției în secțiunile radiale ale jugului unui turbogenerator bipolar și asupra forme și valorilor curbei tensiunii magnetice a jugului la diferite inducții maxime și diferite forme de distribuție ale inducției la periferia jugului.

I.R. CIRIC

Levitația electromagnetică în sisteme cu simetrie axială

În lucrare se studiază levitația electromagnetică a conductoarelor în formă de elipsoizi de revoluție (sferoizi) situate în cîmpul magnetic cu simetrie axială al unor spire circulare parcurse de curenți alternativi de înaltă frecvență, utilizîndu-se modelul sferoidului perfect conductor în prezența spirelor conductoare filiforme. Se introduc și se calculează inductivitățile efective, cu ajutorul cărora se pot exprima simplu forțele de levitație electromagnetică, permițîndu-se verificarea experimentală comodă și cu precizie suficient de mare a rezultatelor obținute prin calcul numeric. Sînt indicate limitele pînă la care se poate folosi modelul sferoidului perfect conductor.

ANDREI NICOLAIDE

Studiul parametrilor și al caracteristicilor de funcționare în asincron a mașinilor sincrone cu poli aparenți masivi

Autorul propune o nouă metodă de calcul a parametrilor și a caracteristicilor de funcționare în asincron a mașinilor sincrone cu poli aparenți masivi, prevăzute sau nu cu inele de conexiune. În lucrare se ține seama de neliniaritatea curbei de magnetizare a oțelului și nu se utilizează coeficienți empirici.

Spre deosebire de lucrările cunoscute, se efectuează un studiu amănunțit al cîmpului electromagnetic în mașină și o raportare corectă la stator a parametrilor rotorului masiv, iar expresiile parametrilor sînt puse sub o formă convenabilă pentru programarea la mașini numerice de calcul.

M. BRAȘOVAN

Determinarea puterii motoarelor de curent continuu cu excitație în serie pentru acționări electrice cu sarcină variabilă

Se prezintă o metodă nouă pentru determinarea puterii motorului de curent continuu cu excitație în serie în cazul acționărilor electrice cu sarcină variabilă.

Metoda este aplicabilă pentru motorul de curent continuu compound și în general pentru fiecare motor cu o caracteristică mecanică suplă, diferind de o dreaptă.

Rezultatele avantajelor sînt prezentate în lucrarea 1—3.

Se evidențiază printr-un exemplu numeric avantajele și dezavantajele utilizării motoarelor cu caracteristică mecanică suplă, față de motoarele cu caracteristică mecanică naturală rigidă.

P. OPRIȘAN

621.313.323.013.8 :621.3.016.33

Cu privire la efectele excitației pulsatorii asupra pendulațiilor rotorului motorului sincron la funcționarea în regim de sarcină variabilă periodic

Acționarea compresoarelor cu piston, cu ajutorul motoarelor sincrone, este însoțită de fenomene perturbatorii care deranjează funcționarea altor consumatori și instalații de apropiere. Oscilațiile curentului din indus determină variații de tensiuni pe linie, iar pendulațiile rotorului conduc la variații mecanice care se pot transmite și amplifica.

În lucrare se prezintă posibilitatea atenuării pendulațiilor mecanice ale rotorului pentru utilizarea excitației variabile periodic, la parametrii determinați.

M. MARINESCU, C. SAAL

621.313.27

Forțe de dislocație în motoarele electrice lineare de tip parametric

În funcționarea motoarelor electrice parametrice apar forțe electromagnetice care tind să îndepărteze armătura din poziția sa de echilibru și să o blocheze sub una din perechile de poli. Calcularea acestor forțe, datorite componentei de curent continuu, arată că acestea sînt echivalente cu o forță elastică negativă. În consecință, existența acestor forțe deplasează rezonanța către frecvențe mai joase. Existența lor implică, pentru funcționarea motorului linear, necesitatea utilizării resoartelor, pentru compensarea lor și obținerea unei elasticități pozitive. Lucrarea conține calculul analitic al acestor forțe și elaborarea unei metodici de măsurare, începînd cu determinări statice. Se descrie de asemenea dispozitivul experimental utilizat. Rezultatele experimentale sînt ilustrate prin curbe și diagrame, care confirmă concordanța dintre teorie și practică.

P. DIMO, L. GROZA, S. IONESCU și G. MORAITE

Analiza unitară a sistemelor electroenergetice, cu calculatorul cifric, prin vizualizarea imaginilor nodale

Se prezintă concluziile unor lucrări efectuate sau în curs de realizare în cadrul Institutului de studii și proiectări energetice, în scopul introducerii vizualizării comportării rețelei prin utilizarea analizei nodale.

Programul pentru calculatoarele cifrice, ale cărui părți componente au fost elaborate, va permite analiza generalizată a problemelor esențiale privind funcționarea sistemului electroenergetic.

CS. NAGY și V. CARACUDOVICI

Asupra modelării matematice a unor fenomene de creștere în domeniul consumului de energie în vederea prognozelor energetice

Se propune un nou model matematic în scopuri de prognoză energetică pentru descrierea evoluției în formă de curbe „S", dar fără plafon limitat.

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI

Revista „Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile: energetică generală, electroenergetică şi electrotehnică, termoenergetică şi termotehnică — sub formă de articole, comunicări sau note. Revista mai cuprinde şi rubricile: discuţii, recenzii, informaţii şi altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări ştiinţifice şi tehnice.

1. Structura lucrării.

a) Introducerea va situa lucrarea pe fondul cunoştinţelor actuale, va desemna obiectivele şi indica metodele utilizate;

b) Tratarea (despărţită pe subcapitole numerotate după clasificarea zecimală) va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate şi va discuta rezultatele, erorile, posibilităţile şi comoditatea aplicării;

c) Concluziile vor sintetiza rezultatele obţinute, limita lor de valabilitate şi aplicaţiile posibile.

2. Forma lucrării.

a) Lucrările se predau în 3 exemplare dactilografiate la două rînduri (2 000 semne pe pagină), inclusiv exemplarul original fără corecturi, intervenţii.

b) Se vor anexa:

Bibliografia după standardele în vigoare; desenele pe calc în tuş, însoţite de cîte două copii şi o listă a titlurilor figurilor; un rezumat de cinci, şase rînduri; rezumatele în limba română şi la alegere în una din limbile engleză, franceză, germană sau rusă.

c) La începutul lucrării se trece clasificarea zecimală internaţională.

d) Volumul lucrării să nu depăşească circa 15 pagini.

Se primesc numai lucrări originale.

★

Manuscrisele se trimit Comitetului de redacţie: Bucureşti, Şos. Vitan nr. 236, sectorul 2.

D. GRECOV şi I. IORDACHE

662.661 : 662.95

LUNGIMEA FLĂCĂRII DIFUZIVE ÎN MEDII TURBIONARE

Se pune în evidenţă fenomenul de separare flacără-mediu ambiant rotitor în cazul unei flăcări amplasate în axul unei turbion de aer tip Rankine. Se dau date experimentale privind lungimea flăcării difuzive a gazului metan în acest caz.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 3—12, 1970

V. V. GHIA, N. LEMNEANU şi C. JIANU

c.z. 662.68

CERCETĂRI PRIVIND DIAMETRUL MAXIM AL PICĂTURILOR LA INJECTOARELE TURBIONARE CU RETUR

Se determină influenţa caracteristicilor geometrice ale injectorului cu cameră de turbionare cu retur frontal şi central asupra fineţei de pulverizare. În lucrare, fineţea de pulverizare s-a caracterizat prin diametrul maxim al picăturilor pulverizate.

În condiţii similare de amestec între combustibil şi aerul de ardere cu cît diametrul maxim va avea o valoare mai mare, cu atît va fi necesar un timp mai lung pentru arderea completă a picăturii. Totodată în lucrare se face o comparaţie între injectoarele cu retur frontal şi cele cu retur central.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 13 — 22, 1970

N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, ŞT. KÓSA şi N. POPESCU

c.z. 662.921

INFLUENŢA UNOR CARACTERISTICI FIZICE ALE COMBUSTIBILULUI ŞI MEDIULUI ASUPRA GRADULUI DE ARDERE A COMBUSTIBILILOR SOLIZI ÎN FOCARUL-CICLON ORIZONTAL

Pornind de la ecuaţiile timpului de separare şi ale timpului de ardere a particulelor de combustibili solizi în volumul focarului-ciclon, s-a calculat cu ajutorul unui model analogic pe calculatorul analogic gradul de ardere al combustibilului.

Se dau rezultatele obţinute pentru calculul gradului de ardere în condiţiile variaţiei unor caracteristici fizice ale combustibilului şi mediului în cazul arderii unui combustibil polidispers în volumul unui focar-ciclon orizontal avînd diametrul de 500 mm.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 23—32, 1970

C. HAIDUC şi V. VINIŢCHI

621.039.517.3

MODEL FIZIC AL PROCESULUI DE FIERBERE ÎN CONDIŢII DE REACTOR NUCLEAR ENERGETIC

În lucrare se prezintă un model fizic calitativ al procesului de fierbere pe elemente de combustibil nuclear cilindric în cazul circulaţiei naturale. Se dau rezultate experimentale obţinute pe o buclă termică experimentală privind influenţa unghiului de înclinaţie a elementului asupra diagramei $q = f(\Delta t)$ în cazul fierberii la circulaţia naturală. Se prezintă rezultate experimentale asupra fenomenului de histerezis la fierbere pe elemente cilindrice şi se dă explicaţia fenomenului prin variaţia complexă a subrăcirii lichidului în timpul variaţiei fluxului termic.

St. cerc. energ. electr. tom. 20, nr. 1, p. 33 — 42, 1970

V. PIMSNER şi P. TOMA

621.438 : 621.45 : 621.56

METODE DE MĂSURARE A GROSIMII FILMELOR LICHIDE

Se prezintă cîteva metode mecanice, electrice şi optice care au fost dezvoltate pentru estimarea grosimii unui film lichid în curgere. Autorii s-au concentrat asupra sondelor cît şi asupra mijloacelor electronice de prelucrare a informaţiilor convenabile măsurării unei grosimi medii a filmului pe o lungime cunoscută a filmului cît şi a unei grosimi locale. Dispozitivele descrise în legătură cu un tunel de încercări hidro-aerodinamice care a fost conceput pentru a permite determinarea condiţiilor optime de protejare cu ajutorul unui film lichid a unor suprafeţe expuse acţiunii unor gaze fierbinţi în curgere.

St. cerc. energ. electr. tom. 20, nr. 1, p. 43—52, 1970

A. TIMOTIN şi M. MARINESCU

621.318.2 : 621.042.001

FLUXUL DE DISPERSIUNE MAGNETICĂ AL UNUI CIRCUIT MAGNETIC CU MAGNET PERMANENT

Se studiază cîmpul de dispersie magnetică al unui circuit magnetic cu simetrie cilindrică, avînd un magnet permanent inelar din ferită. Se calculează fluxurile de dispersie parţiale corespunzătoare diferitelor zone de închidere a liniilor cîmpului de dispersie şi se dau formule practice de calcul şi curbe pentru determinarea coeficientului de dispersie necesar proiectării circuitelor magnetice pentru difuzoare.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 53—79, 1970

A.D CUPŞA

621.3.013.001.24 ; 538.311

CALCULUL CÎMPULUI MAGNETIC DIN ÎNTREFIERUL APARATELOR MAGNETOELECTRICE CU MAGNET INTERIOR

După prezentarea principalelor tipuri de aparate magnetoelectrice cu magnet interior şi a caracteristicilor lor, se trece la calculul cîmpului magnetic din întrefierul acestora. Dacă la aparatele fără piese polare nu intervin practic aproximaţii de calcul, ele sînt însă inerente la aparatele cu piese polare, unde cîmpul din magnetul permanent nu mai este uniform. Deoarece acestea din urmă sînt cele mai utilizate, s-a dezvoltat o metodă aproximativă de calcul care ţine seama de principalele fenomene care intervin, fiind verificată calitativ şi cantitativ de performanţele aparatelor utilizate curent.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 81—96, 1970

GR. A. CIVIDJIAN

537.311.6 : 538.53 : 621.318.31.4 : 621.313

REACTANŢA DE DISPERSIE A SPIREI ÎN SCURTCIRCUIT

Considerîndu-se întrefierul în dreptul crestăturii umplut cu conductorul spirei şi efectul pelicular neglijabil, se integrează execuţia lui Poisson pentru potenţialul magnetic vector în ipoteza unui cîmp plan-paralel. Pereţii crestăturii se consideră de permeabilitate finită şi uniform saturaţi. Cu ajutorul potenţialului vector se obţine o formulă aproximativă pentru inducţia de scăpări, pornind de la definiţia ei energetică. Se indică şi alte cîteva cazuri de aplicabilitate a formulei obţinute.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 97—107, 1970

CORNELIA IONESCU

621.3.001.621.3.0184

FORȚELE ELECTRODINAMICE EXERCITATE ASUPRA UNUI SISTEM TRIFAZAT DE CONDUCTOARE RECTILINII PARCURSE DE CURENT ÎN PREZENȚA ECRANELOR ELECTROMAGNETICE CILINDRICE CIRCULARE

În lucrare se studiază cîmpul electromagnetic și forțele care se exercită între conductoare și ecran în cazul așezării conductoarelor în același plan și în triunghi echilateral la diferite cazuri de scurtcircuit. Se compară rezultatele obținute, considerînd ecranul perfect conductor cu rezultatele în cazul unui singur fir, plasat într-un ecran de conductivitate finită.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 109—124, 1970

AL. TIMOTIN și I. CIRIC

538.311 : 621.3.013

UNICITATEA SOLUȚIILOR ȘI CALCULUI PUTERILOR ÎN CÎMPUL ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR CU SIMETRIE AXIALĂ

În regim tranzitoriu, cîmpul magnetic cvasistaționar cu simetrie axială și tensiunile la borne corespunzătoare unui sistem de conductoare nefiliforme coaxiale, cu proprietăți de material liniare, sînt univoc determinate de variația în timp a curenților din conductoare și de repartiția inițială a acestor curenți pe secțiunile axiale ale conductoarelor.

Lucrarea prezintă și cazul regimului permanent sinusoidal, precum și expresii pentru calculul puterilor instantanee, activă și reactivă, primite de către sistemul considerat, în care apar curenții și valorile medii ale potențialului magnetic vector pe secțiunile axiale ale conductoarelor.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 125—138, 1970

C. I. MOCANU

538.3 : 621.3.001 : 621.371

CONTRIBUȚII LA STUDIUL FENOMENELOR DE DIFUZIE SUPERFICIALĂ

Pentru examinarea fenomenelor în care mărimile difuzează numai parțial la suprafața domeniului, numite de difuzie superficială, cum sînt încălzirea sau răcirea rapidă a corpurilor, urcarea și degazarea superficială, pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic etc., ecuațiile difuziei volumetrice nu sînt potrivite.

În această lucrare, autorul elaborează o teorie unitară a proceselor difuziei parțiale la suprafața corpurilor și fundamentează conceptele de difuzie local superficială, total superficială, de difuzie locală netă și total netă. Se stabilesc soluțiile ecuației de difuzie superficială și netă în regim tranzitoriu în problema planparalelă și în două cazuri-limită ale problemei tridimensionale.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 139—157, 1970

C. APETREI, M. DOGARU și I. BEȘTEA

621.313.322.013.8

VARIAȚIA EXCITAȚIEI MAȘINII SINCRONE ÎN REGIMURI DINAMICE

Variația excitației reprezintă unul dintre factorii hotărîtori pentru comportarea mașinii sincrone în regimurile dinamice. În studiile de stabilitate pentru caracterizarea comportării mașinii sincrone se utilizează constantele de timp ale mașinii definite în mod clasic. În lucrare se prezintă studiul experimental al variației excitației mașinii sincrone în cazul schimbării bruște a sarcinii și intervenției forțării excitației; se urmărește stabilirea legăturii calitative dintre constantele de timp echivalente, caracteristice regimurilor dinamice, și constantele de timp, utilizate în mod curent la rezolvarea problemelor de stabilitate.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 159—168, 1970

MIHU BÂRGĂUANU

FORŢAREA EXCITAŢIEI LA MOTOARELE SINCRONE

Cu ajutorul unui model analogic se urmăreşte efectul forţării excitaţiei asupra comportării dinamice a motorului sincron supus la goluri de tensiune. Se determină durata-limită a acestor goluri de diferite nivele în care motorul se menţine în sincronism ca funcţie de plafonul de forţare şi se trag concluzii privitoare la eficienţa acestuia.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 169—180, 1970

V. RĂSVAN

621.53.001

SINTEZA ANALITICĂ A REGULATORULUI OPTIMAL PENTRU O CLASĂ DE SISTEME LINIARE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

În lucrare se extinde metoda aproximativă de sinteză analitică a lui Cian Jen-vei pentru cazul sistemelor multiple cu întîrziere, arătîndu-se că problema sintezei se reduce la rezolvarea unor ecuaţii matriceale algebrice rezultate din degenerarea ecuaţiei Riccati.

Se demonstrează unicitatea soluţiei obţinute pe calea integrării sistemului caracteristic al ecuaţiei Hamilton-Jacobi-Bellman, trăgîndu-se concluzii asupra stabilităţii asimptotice a sistemului cu reacţie şi a aproximării făcute.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 181—190, 1970

C. BELEA

ALGORITM PENTRU DETERMINAREA CONDUCERII OPTIME ÎN PROBLEMA TIMPULUI MINIM, FOLOSIND DEZVOLTĂRI ÎN SERIE FOURIER

În lucrarea [1] s-a prezentat un algoritm de sinteză optimală după criteriul timpului minim, care ilustrează sinteza regulată a lui Bolteanski [2] pentru sistemele liniare. La sistemele liniare invariante în timp, acest algoritm foloseşte tehnica valorilor proprii ale matricei ecuaţiilor de stare. În prezenta lucrare se propune o tehnică de calcul proprie teoriei oscilaţiilor, care nu face uz de valorile proprii. Totodată se stabileşte o legătură directă între sistemele optimale şi sistemele neliniare în regim autooscilant, ceea ce lărgeşte cîmpul de legături între sistemele optimale şi sistemele automate clasice [3]—[7].

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 191—201, 1970

CR. VASILIU

SINTEZA ÎN PUNTE A FUNCŢIEI DE INTRARE BIPATRATICĂ

Se dau structurile, condiţiile de realizabilitate şi valorile elementelor în funcţie de coeficienţi pentru sinteza în punte a funcţiei de intrare bipătratice.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 203—218, 1970

A. CRĂCIUNESCU și S. BUCURENCIU

C.Z. 621.30.011.1

ASUPRA ECHIVALĂRII SCHEMELOR CU ELEMENTE SATURABILE

Se examinează problema echivalării unui ansamblu de N elemente saturabile cu caracteristici de tipul $\Ø = \frac{a\,U_m}{b+U_m}$, conectate în serie sau în paralel, printr-un singur element saturabil care are o caracteristică de același tip. Se stabilesc valorile erorilor sistematice făcute prin această echivalare în cazul în care $N = 2$.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 219—223, 1970

Д. ГРЕКОВ, И. ИОРДАКЕ

662.611 : 662.95

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН В СТРУЯХ ПРИ ВИХРЕВОМ ДВИЖЕНИИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Описывается поведение аксиальной струи в завихренной окружающей среде, когда сопло струи находится в центре вихря вида Репкина.

Для этого случая даются теоретические и экспериментальные данные, связанные с полями концентрации, скоростей и статических давлений, подчеркивающие процесс сепарации струи по отношению к окружающей вихревой среде.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 3—12, 1970

V. V. GHIA, N. LEMNEANU, C. JIANU

662.68

RECHERCHES CONCERNANT LE DIAMÈTRE MAXIMAL DES GOUTTES DANS LES INJECTEURS TOURBILLONNAIRES À RETOUR

On détermine l'influence des caractéristiques géométriques de l'injecteur à chambre de tourbillonnement avec retour frontal et central, sur la finesse de la pulvérisation. La finesse de la pulvérisation est caractérisée par le diamètre maximal des gouttes pulvérisées. Dans des conditions similaires de mélange du combustible à l'air de combustion, la durée de la combustion s'accroît avec le diamètre maximal de la goutte.

On établit une comparaison entre les injecteurs à retour frontal et ceux à retour central.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 13—22, 1970

N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, ST. KOȘA, N. POPESCU

662.921

L'INFLUENCE DE CERTAINES CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DU COMBUSTIBLE ET DU MILIEU ENVIRONNANT SUR LE DEGRÉ DE COMBUSTION DES COMBUSTIBLES SOLIDES DANS LE FOYER CYCLONE HORIZONTAL

À l'aide des équations du temps de séparation et du temps de combustion des particules des combustibles solides dans le volume du foyer cyclone, on a calculé le degré de combustion du combustible, moyennant un modèle sur le calculateur analogique.

On présente les résultats obtenus pour le degré de combustion dans les conditions de la variation de certaines caractéristiques physiques du combustible et du milieu, dans le cas de la combustion d'un combustible polydispersé dans le volume d'un foyer cyclone horizontal de 500 mm de diamètre.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 23—32, 1970

C. HAIDUC, V. VINIȚCHI

621.039.517.3

LE MODÈLE PHYSIQUE DU PROCESSUS D'ÉBULLITION DANS LES CONDITIONS DU RÉACTEUR NUCLÉAIRE ÉNERGÉTIQUE

Dans cet ouvrage on présente un modèle physique qualitatif du processus d'ébullition sur des éléments de combustible nucléaire cylindriques, dans les conditions de la circulation naturelle. On donne les résultats expérimentaux obtenus pour une boucle thermique expérimentale, concernant l'influence de l'angle d'inclinaison de l'élément sur le diagramme $q = f(\Delta t)$, dans le cas de l'ébullition à circulation naturelle. On présente les résultats expérimentaux concernant le phénomène d'hystérésis à l'ébullition sur des éléments cylindriques, tout en donnant l'explication du phénomène pour la variation complexe du sous-refroidissement du liquide pendant la variation du flux thermique.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 33 — 42, 1970

V. PIMSNER, P. TOMA

621.438 : 621.45 : 621.56

METHODS FOR FILM-THICKNESS MEASUREMENT

Several mechanical, electrical and optical methods which have been developed for the estimation of the thickness of flowing liquid are described. Author focus their attention on the probes and electronic means for the treating of information pertaining to the measurement of average thickness over a well-known length of film as well as to local thickness measurement. All devices described concern a hydro-gasodynamic tunnel which has been designed for the estimation of optimal condition for liquid film protection against hot flowing gases.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 43 — 52, 1970

A. TIMOTIN, M. MARINESCU

621.318.2 : 621.042.001

LE FLUX DE DISPERSION D'UN CIRCUIT MAGNÉTIQUE À AIMANT PERMANENT

Les auteurs étudient le champ de dispersion magnétique d'un circuit magnétique à symétrie cylindrique, muni d'un aimant permanent annulaire en ferrite. On déduit également les formules et les courbes nécessaires au calcul du coefficient de dispersion des circuits magnétiques des haut-parleurs.

***St.** cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 53 — 79, 1970*

A. CUPȘA

621.3.013.001.24 : 538.311

BERECHNUNG DES MAGNETISCHEN FELDES IM LUFTSPALT DER DREHSPULINSTRUMENTE MIT KERNMAGNET

Nach Beschreibung der häufigsten Typen von Drehspulinstrumenten mit Kernmagnet und ihrer Eigenschaften wird zur Berechnung des magnetischen Feldes im Luftspalt übergegangen. Während bei Geräten ohne Polschuhe praktisch keine Näherungsberechnungen auftreten, sind sie jedoch bei Geräten mit Polschuhen unumgänglich, weil in einem solchen Falle das Feld des Dauermagneten ungleichförmig ist.

Nachdem letztere die am meistverwendeten sind, wurde eine Näherungsmethode eingeführt, die ihren Haupteigenschaften Rechnung trägt und die Leistungen der am häufigsten verwendeten Geräte qualitativ und quantitativ überprüft.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 81 — 96, 1970

Г. А. ЧИВИДЖЯН

537.311.6 : 538.53 : 621.318.31.4 : 621.313

ИНДУКТИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ КОРОТКОЗАМКНУТОГО ВИТКА

Считая зазор перед пазом заполненным токоведущим проводником из витка и пренебрегая поверхностным эффектом, решается уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала плоскопараллельного магнитного поля. Боковые стороны паза считаются равномерно насыщенными. При помощи найденного выражения векторного потенциала устанавливается приближенная формула для расчета индуктивности рассеяния, исходя из ее энергетического определения.

Указываются и некоторые другие возможные применения найденной формулы.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 97—107, 1970

CORNELIA IONESCU

621.3.001 : 621.3.018.4

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES EXERCÉES SUR UN SYSTÈME TRIPHASÉ DE CONDUCTEURS RECTILIGNES PARCOURUS PAR LE COURANT, EN PRÉSENCE DES ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES

Dans cet ouvrage on étudie le champ électromagnétique et les forces exercées entre les conducteurs et l'écran dans le cas de l'emplacement des conducteurs dans le même plan et en triangle équilatéral, lors des différents cas de court-circuit. On compare les résultats obtenus, en considérant l'écran comme un conducteur parfait, avec les résultats dans le cas d'un seul fil placé dans un écran à conductivité finie.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 109—124, 1970

A. TIMOTIN, I. R. CIRIC

538.311 : 621.3.013

THE SOLUTIONS UNIQUENESS AND THE CALCULATION OF THE POWERS IN THE ELECTROMAGNETIC QUASI-STATIONARY FIELD WITH AXIALLY SYMMETRY

In the transient regime, the quasi-stationary magnetic field with axial symmetry and the terminal voltages corresponding to the nonfiliform coaxial conductors system with linear material properties are univocaly determined by the variation in time of the currents and by the initial distribution of these currents on the axial conductor sections.

The paper presents also the case of the permanent sinusoidal regime, as well as expressions for the calculation of the real, reactive and instantaneous powers, that the system receives, in which appear the currents and the average values of the magnetic vector potential on the axial sections of the conductors.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 125—138, 1970

C. I. MOCANU

538.3 : 621.3.001 : 621.371

CONTRIBUTION À L'ETUDE DES PHÉNOMÈNES DE DIFFUSION SUPERFICIELLE

L'auteur élabore une théorie unitaire des régimes transitoires de diffusion pour les surfaces régulières, et établit les concepts de la diffusion localement superficielle et totalement superficielle, localement nette et totalement nette. Dans ces régimes, les variations spatio-temporelles des grandeurs peuvent être suivies le long des normales intérieures jusqu'aux centres de combure. On intègre les équations de diffusion pour le problème bidimensionnel et dans deux cas particuliers du problème tridimensionnel.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 139—157, 1970

C. APETREI, M. DOGARU. I, BEŞTEA

621.313.322.013.8

THE EXCITATION VARIATION OF SYNCHRONOUS MACHINE IN DYNAMIC OPERATION

The excitation variation represents one of the decisive factors for the behaviour of synchronous machines in dynamic operation.

The stability studies in concerning the behaviour of synchronous machine use the clasically defined time constants of the machine. This paper presents the experimental study of the excitation variation of synchronous machines in the case of sudden change of load and intervention of excitation forces.

It is also attempted to establish the qualitative relation between the equivalent time constants, which characterize dynamic operation and the time constants used currently for solving the stability problems.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 159—168, 1970

M. BÂRGĂUANU

SURVOLTAGE D'EXCITATION DANS LES MOTEURS SYNCHRONES

On propose des moyens dans le but d'améliorer la dynamique du moteur synchrone en cas de perte du synchronisme à cause des interruptions accidentelles de la tension.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 169—180, 1970

V. RĂSVAN

621.53.001

ANALYTICAL DESIGN OF THE OPTIMAL CONTROLLER FOR A CLASS OF LINEAR TIME-LAG CONTROL SYSTEMS

This paper presents an extension of the Chang Zhen-wey method of approximate analytical design for multivariable time-lag control system, and shows that the design problem reduces to the problem of the solving a set of algebraic matrix equations of degenerated Riccati type. The uniqueness of the solution is proved by integrating the characteristic system of the Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equation, and conclusions are drawn on the asymptotic stability of the feedback system and on the approximation made.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 181—190, 1970

К. БЕЛЯ

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ПО КРИТЕРИЮ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Определяется адъюнктный вектор, не зная выражения оптимального управления. Трудность задачи состоит в определении момента коммутации. Представляется также метод аналитического решения этой задачи на основании устройства пространства начальных состояний по разновидности, по необходимым числам коммутации для приведения систем в нулевое состояние.

Для частного случая инвариантных систем во времени дается алгоритм и структура системы управления.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr, 1, p. 191—201, 1970

CR. VASILIU

THE BRIDGE SYNTHESIS OF THE BIQUADRATIC DRIVING POINT FUNCTION

This Paper presents the structures, the realizability conditiond and the values of elements in terms of coefficients for the bridge synthesis of the biquadratic impedance functions.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 203 — 218, 1970

A. AL. CRĂCIUNESCU, S. AL. BUCURENCIU

C.Z. 621.30.011.1

ON THE EQUIVALENCE OF SATURABLE ELEMENTS SCHEMES

The problem of equivalence of an ensemble of N saturable elements with characteristics of type $\Phi = \frac{aU_m}{b+U_m}$, in series or in parallel connection, by a single element having the same characteristic type is examined. The systematic errors following this equivalence for $N = 2$ are established.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 1, p. 219 — 223, 1970

1970 JUN 2 5

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

V. M. POPOV, **Hiperstabilitatea sistemelor automate**, 1966, 304 p., 16 lei.

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări**, 1968, 300 p., 22 lei.

M. BRAŞOVAN şi E. SERACIN, **Metode noi de proiectare a acţionărilor electrice**, 1968, 238 p., 11 lei.

V. V. GHIA, **Recirculaţia gazelor la cuptoare**, 1968, 336 p., 29 lei.

P. DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 627 p., 44 lei.

GH. CARTIANU, **Modulaţia de frecvenţă**, 1966, 693 p., 44 lei.

D. F. LĂZĂROIU, **Maşini electrice cu inerţie redusă**, 1969, 472 p., 29 lei.

D. GRECOV, I. IORDACHE, N. ANTONESCU, **Arderea combustibililor gazoşi**, 1969, 268 p., 22 lei.

CONSTANTIN ŞORA, **Introducere în studiul generatorului Hall**, 1969, 310 p., 18,50 lei.

I. CARABOGDAN, N. PĂNOIU, **Bazele teoretice ale aprinderii şi arderii combustibililor solizi**, 1969, 288 p., 24 lei.

I.P.I. — c. 4111

43821

Lei 40.—

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

2

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 235—498, Bucureşti, 1970

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil*;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. AVRAMESCU;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Dr. ing. V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. C. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. ȘT. GHEORGHIU;
Prof. C. APETREI;
Ing. CS. NAGY;
Dr. ing. V. PIMSNER;
Dr. ing. C. A. VASILESCU;
Dr. ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție.*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 160 de lei pe an.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CENTRALA CĂRȚII, Oficiul de comerț exterior, București, Căsuța poștală 134—135 (Calea Victoriei 126) sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: BUCUREȘTI, Șos. Vitan nr. 236.

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 20, nr. 2 1970

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1965

SUMAR

Pag.

Economie energetică

A. COGĂLNICEANU, R. EGYED, Preliminarea formei curbelor de sarcină 237
V. NITU, Influenţa lungimii liniilor electrice asupra siguranţei schemelor electrice . . 251
C. HAIDUC, L. CONSTANTINESCU, D. MIHAI, Analiza eficacităţii ciclurilor de combustibil nuclear pentru reactori moderaţi cu apă grea în condiţiile din Republica Socialistă România 259

Termoenergetică şi termotehnică

N. PĂNOIU, ŞT. KÓŞA, Influenţa vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra funcţionării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic bifazic . . . 273
C. COROIU, Interdependenţa dintre parametrii structurali şi caracteristicile energetice ale combustibililor solizi 287
V. PIMSNER, C. A. VASILESCU, Curgerea prin conducte de secţiune variabilă cu schimb de căldură şi frecare 299
C. HAIDUC, E. LICSANDRU, Analiza termodinamică a ciclurilor cu abur saturat şi a ciclurilor termice directe pentru centrele nucleare-electrice 307
R. GEORGESCU, Consideraţii asupra mecanismului de apariţie a instabilităţilor sub formă oscilatorie la un sistem bifazic fierbător apă-abur 323
V. BARBU, Asupra nucleaţiei bulelor cavitaţionale 331
L. TEODORESCU, Influenţa unor elemente geometrice ale pulverizatorului asupra proceselor din motor 355
R. DELCESCU, Calculul funcţional al segmenţilor de piston cu considerarea pulsaţiei 367

Electroenergetică şi electrotehnică

C. I. MOCANU, Regimurile tranzitorii peliculare ale cîmpului electromagnetic în conductoare 385
C. IONESCU, Studiul forţelor electrodinamice în cazul unui sistem trifazat de conductoare parcurse de curent situate în interiorul unui ecran dreptunghiular subţire, fără pereţi despărţitori 415

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 235—498, Bucureşti, 1970

E. WAGNER, Calculul supratensiunilor de comutație la conectarea prin rezistență a liniilor de înaltă tensiune 433
Ed. NICOLAU, Metoda transformatei integrale în sinteza radiatoarelor filiare rectilinii 449
T. IONESCU, Condiții suficiente de hiperstabilitate pentru sisteme discrete cu parametrii variabili 459
C. VASILE, Rezolvarea problemei generale a stabilității absolute cu ajutorul teoriei hiperstabilității 467
AL. GHIȚĂ, Siguranța elementelor cu funcționare discontinuă 479

Recenzii 489

Material documentar 495

PRELIMINAREA FORMEI CURBELOR DE SARCINĂ

DE

A. COGĂLNICEANU şi R. EGYED

621.311

Pentru preliminarea formei curbelor de sarcină în perspectivă, în lucrare se prezintă o metodă sintetică, statistică-probabilistică, bazată pe interdependenţa indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină şi pe cunoaşterea în etapa considerată a anumitor indicatori sintetici generali (consumul total preliminat de energie, ritmul de creştere al sarcinii anuale maxime, durata de utilizare a sarcinii maxime etc.).

Metoda este expusă utilizîndu-se valorile caracteristice ale curbelor de sarcină înregistrate în România în perioada 1959—1968.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Unul dintre elementele principale pentru studierea în perspectivă a dezvoltării consumului de energie electrică îl constituie regimul curbelor de sarcină.

Pentru preliminarea formei curbelor de sarcină, în această lucrare s-a utilizat o metodă sintetică, statistică-probabilistică, bazată pe interdependenţa indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină, care permite ca, plecînd de la anumiţi indici sintetici, să se determine un număr suficient de puncte caracteristice pentru trasarea curbelor de sarcină din fiecare lună.

Variaţiile zilnice, săptămînale şi sezoniere ale consumului de energie electrică se datoresc atît unor variaţii accidentale, cît şi în special unor variaţii permanente de sarcină ca urmare a schimbărilor stabile în cerinţele consumatorilor.

Factorii de care depind variaţiile permanente de sarcină pot fi grupaţi în două categorii :

— factori constanţi în timp, care depind de condiţiile naturale, specifice ale regiunii : climă, latitudine, relief etc. ;

— factori variabili în timp, ca numărul, structura şi caracteristicile consumatorilor, situaţia economică şi obiceiurile de viaţă ale populaţiei, programul de lucru, numărul zilelor de repaus, măsurile luate pentru reglarea curbelor de sarcină.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 237—250, 1970

Dintre factorii variabili, ponderea principală o are structura consumului de energie electrică.

Modificarea în timp a formei curbelor de sarcină este rezultanta unor tendinţe antagoniste, unii factori (creşterea consumului casnic, reducerea programului de lucru, a numărului de schimburi ş.a.) contribuind la ascuţirea curbelor de sarcină, iar alţii la aplatisarea lor (creşterea ponderii industriilor cu funcţionare continuă, a aparatelor de uz casnic, măsurile luate pentru reducerea consumului în orele de vîrf etc.). Din această cauză, modificările în timp ale formei curbelor de sarcină sînt lente.

Metoda de preliminare a curbelor de sarcină expusă în continuare se bazează pe constatarea că variaţia consumului de energie electrică este influenţată de o serie de factori specifici fiecărei ţări, dintre care o parte nu se modifică în timp, iar alţii se modifică lent.

Pentru preliminarea regimului curbelor de sarcină în viitor s-au utilizat valori caracteristice ale curbelor de sarcină înregistrate în România în perioada 1959—1968.

2. INDICII CARACTERISTICI AI CURBELOR DE SARCINĂ

Regimul curbelor de sarcină, atît în cursul zilei, cît şi în cursul anului, poate fi pus în evidenţă printr-un sistem de indici caracteristici.

În definirea indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină s-au utilizat notaţiile de mai jos:

Notaţii

P_z — sarcina maximă zilnică;
P_l — sarcina maximă lunară;
P_{an} — sarcina maximă anuală;
P_{an}^{i-1}; P_{an}^{i} — sarcina maximă din anul $i-1$ respectiv i;
E_z — energie zilnică;
E_l — energie lunară;
E_{an} — energia anuală;
l — luna din cursul anului.

a) *Indicii caracteristici ai curbelor de sarcină zilnică* se pot grupa în indici caracteristici ai puterii (sarcinii) şi ai energiei.

Indicii caracteristici ai puterii sînt:

— raportul dintre sarcina medie (P_m) şi sarcina maximă a zilei, denumit factor de aplatisare:

$$\gamma = \frac{P_m}{P_z} \quad \text{unde} \quad P_m = \frac{E_z}{24};$$

— raportul β dintre sarcina minimă P_β şi sarcina maximă a zilei:

$$\beta = \frac{P_\beta}{P_z};$$

— raportul α dintre sarcina minimă de zi P_α și sarcina maximă a zilei :

$$\alpha = \frac{P_\alpha}{P_z}.$$

Factorul de aplatisare γ arată gradul de utilizare a sarcinii maxime, iar indicii α și β variațiile extreme ale sarcinii în cursul unei zile.

Indicii caracteristici ai energiei rezultă din modul de împărțire a curbelor de sarcină zilnice fie după putere (pe orizontală), fie după ora la care se înregistrează consumul (pe verticală) (fig. 1).

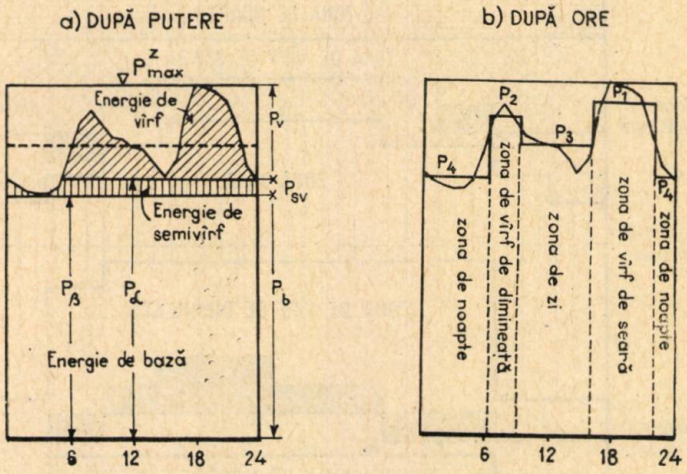


Fig. 1. — Modul de împărțire a curbelor de sarcină medii zilnice în cursul anului.

După criteriul *împărțirii energiei după putere* (pe orizontală) se disting :

— zona de vîrf a energiei (E_v), situată deasupra sarcinii minime de zi (P_α) ;

— zona de semivîrf a energiei (E_{sv}), cuprinsă între sarcina minimă de noapte și de zi (între P_β și P_α) ;

— zona de bază a energiei (E_b), situată sub sarcina minimă de noapte (sub P_β).

Fiecărei dintre aceste zone îi corespunde o putere caracteristică de vîrf P_v, de semivîrf P_{sv} și de bază P_b.

Energiile de vîrf, semivîrf și bază se exprimă în % din energia zilnică totală.

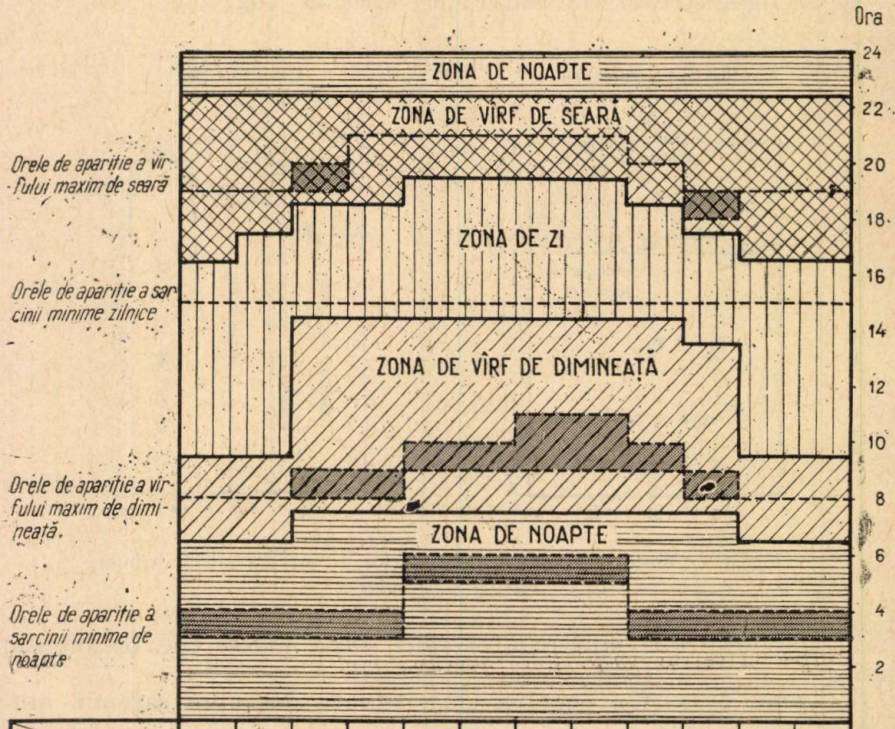
Pe baza *criteriului împărțirii curbelor de sarcină zilnice după ore* se disting patru zone : zona de vîrf de seară (E_{vs}), de vîrf de dimineață (E_{vd}), zona de zi (E_z) și zona de noapte (E_n).

Ca indice caracteristic al celor patru zone s-a considerat puterea medie corespunzătoare zonei respective, puteri care s-au notat cu P_1, P_2, P_3, P_4.

Gruparea în cele patru zone a urmărit ca în interiorul fiecăreia sarcina înregistrată să fie puţin variabilă, iar puterile medii ale diferitelor zone să fie cît mai diferenţiate între ele.

Datorită variaţiei sarcinii în cursul anului se schimbă orele de apariţie a vîrfului de seară şi de dimineaţă, modificîndu-se, ca atare, şi zonele caracteristice ale energiei în cursul anului, aşa cum se arată în figura 2.

b) *Indicii sintetici care caracterizează variaţia lunară a consumului* sînt : durata de utilizare lunară a sarcinii maxime lunare (t_l) şi durata



ZONA	LUNA	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Vîrf de dimineaţă	Interval	7-9	7-9	8-14	8-14	8-14	8-14	8-14	8-14	8-14	7-13	7-9	7-9
	Nr. ore	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	3	3
Zona de zi	Interval	10-16	10-17	15-18	15-18	15-19	15-19	15-19	15-19	15-18	14-17	10-16	10-16
	Nr. ore	7	8	4	4	5	5	5	5	4	4	7	7
Vîrf de seară	Interval	17-22	18-22	19-22	19-22	20-22	20-22	20-22	20-22	19-22	18-22	17-22	17-22
	Nr. ore	6	5	4	4	3	3	3	3	4	5	6	6
Zona de noapte	Interval	23-6	23-6	23-7	23-7	23-7	23-7	23-7	23-7	23-7	23-6	23-6	23-6
	Nr. ore	8	8	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8
Nr. zile medii	Lucru	20	20	22	22	20	22	22	20	22	22	21	22
	După repaus	5	4	5	4	5	4	4	5	4	5	4	4
	Repaus	6	4	4	4	6	4	5	6	4	4	5	5
	Total	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Fig. 2. — Repartizarea pe zone caracteristice a curbelor de sarcină medii zilnice în cursul anului.

de utilizare lunară a sarcinii maxime anuale (τ_l) :

$$t_l = \frac{E_l}{P_l} \text{ (ore/lună)};$$

$$\tau_l = \frac{E_l}{P'_{an}} \text{ (ore/lună).}$$

Dacă în locul sarcinii maxime lunare sau anuale se utilizează media sarcinilor maxime din luna respectivă, adică sarcina maximă a zilei lucrătoare medii, respectiv a zilei lucrătoare medii din luna decembrie, indicii corespunzători se notează t_{l0} şi τ_{l0}.

c) *Variaţiile anuale ale sarcinii* se caracterizează prin următorii indici :

— durata anuală de utilizare a sarcinii maxime T :

$$T = \frac{E_{an}}{P'_{an}} \text{ (ore/an).}$$

Se observă că $T = \sum_1^{12} \tau_l$;

— variaţia sarcinilor maxime lunare în cursul anului, care se exprimă în procente din sarcina maximă anuală :

$$k_l = \frac{P'_l}{P'_{an}};$$

— ritmul mediu de creştere a sarcinii maxime anuale (k_p) sau al producţiei anuale de energie electrică (k_E) :

$$k_p = \left(\frac{P'_{an}}{P'^{-1}} - 1 \right) \times 100 \quad (\text{în } \%);$$

$$k_E = \left(\frac{E'_{an}}{E'^{-1}_{an}} - 1 \right) \times 100 \quad (\text{în } \%).$$

O influenţă majoră asupra duratei anuale de utilizare a sarcinii maxime T o are ritmul de creştere k_p. Cu cît acest ritm este mai ridicat, cu atît pentru aceeaşi formă a curbelor de sarcină rezultă o durată T mai scăzută. Din această cauză apare indicat să se elimine influenţa ritmului de creştere, transformînd curba sarcinilor maxime lunare în curbă statică (fig. 3), corespunzătoare lui $k_p = 0$.

În cazul curbei de variaţie statice, sarcina maximă lunară şi energia lunară, corectate, se notează P'_l şi, respectiv, E'_l.

Admiţînd o variaţie liniară a sarcinii maxime lunare, se poate determina o putere lunară fictivă P_{lm} (fig. 3) din relaţia

$$P_{lm} = P'^{-1}_{an} + \frac{1}{12} (P'_{an} - P'^{-1}_{an}).$$

Puterea maximă lunară şi energia lunară, P'_l şi E'_l, în cazul variaţiei anuale statice a consumului, se pot determina cu relaţiile

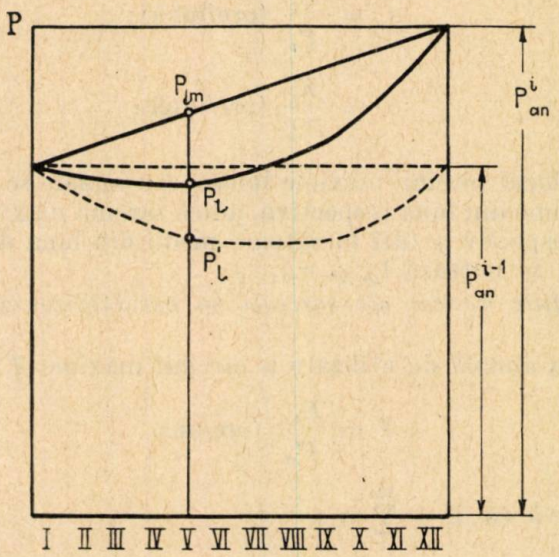


Fig. 3. — Variaţia sarcinii anuale.

$$P'_i = \frac{P_l}{P_{lm}} \cdot P^{i-1}_{an},$$

$$E'_i = \frac{E_l}{P_{lm}} \cdot P^{i-1}_{an}.$$

Cu aceste notaţii, indicii caracteristici anuali devin
— energia anuală corectată (variaţia anuală statică)

$$E'_{an} = \sum_1^{12} E'_i;$$

— durata de utilizare lunară corectată a sarcinii maxime anuale:

$$\tau'_i = \frac{E'_l}{P^{i-1}_{an}};$$

— variaţia sarcinii maxime lunare:

$$k'_i = \frac{P'_l}{P^{i-1}_{an}};$$

— durata anuală de utilizare corectată a sarcinii maxime anuale:

$$T' = \frac{E'_{an}}{P^{i-1}_{an}} = \sum_1^{12} \tau'_i.$$

Se remarcă faptul că, prin corectarea variației anuale a sarcinii, durata de utilizare lunară a sarcinii maxime lunare nu se modifică, deci curbele de sarcină zilnică nu se deformează:

$$\frac{E'_i}{P'_i} = \frac{E_i}{P_i} = t_i = \frac{\tau'_i}{k'_i} = \frac{\tau_i}{k_i}.$$

3. CORELAȚII DE DETERMINARE A INDICILOR CURBELOR DE SARCINĂ

Analiza curbelor de sarcină zilnice a pus în evidență necesitatea stabilirii de corelații între indicii curbelor de sarcină pentru fiecare lună.

Unele corelații între indicii α și β din literatură [3] urmăresc să cuprindă un domeniu larg, fiind din această cauză relații polinomice, ca relația Schnaus ($\alpha = 0{,}143\ \gamma^3 + 0{,}65\ \gamma^2 + 0{,}04$) sau Junge ($\alpha = \gamma^2$).

Comparînd aceste corelații cu indicii caracteristici ai curbelor de sarcină de iarnă și vară ale unor țări din Europa, rezultă că pentru corelația $\alpha = f(\gamma)$; relația analitică de tip liniar este mai indicată, dînd abaterile medii cele mai mici (fig. 4). Din această cauză, în stabilirea corelațiilor pentru curbele de sarcină din România s-a urmărit folosirea de relații liniare, cu atît mai mult cu cît și domeniul de variație cercetat și avînd interes practic este mult mai limitat.

La stabilirea corelațiilor de determinare a indicilor curbelor de sarcină s-a mai urmărit în mod special:

— stabilirea de corelații între indici relativi (în %);

— stabilirea de corelații care să se poată verifica fie prin închidere în cursul unui an, fie prin corelații ajutătoare;

— reducerea numărului de corelații de legătură pentru a nu introduce erori suplimentare.

Indicatorul intensității corelației liniare este coeficientul de corelație r, definit de relația

$$r = \frac{\Sigma\,(x_i - x_m)\cdot(y_i - y_m)}{\sqrt{\Sigma(x_i - x_m)^2 \cdot (y_i - y_m)^2}},$$

unde x_i, y_i reprezintă perechile de indici cunoscuți, iar y_m, x_m sînt mediile valorilor respective.

Coeficientul de corelație variază în limitele -1 și $+1$.

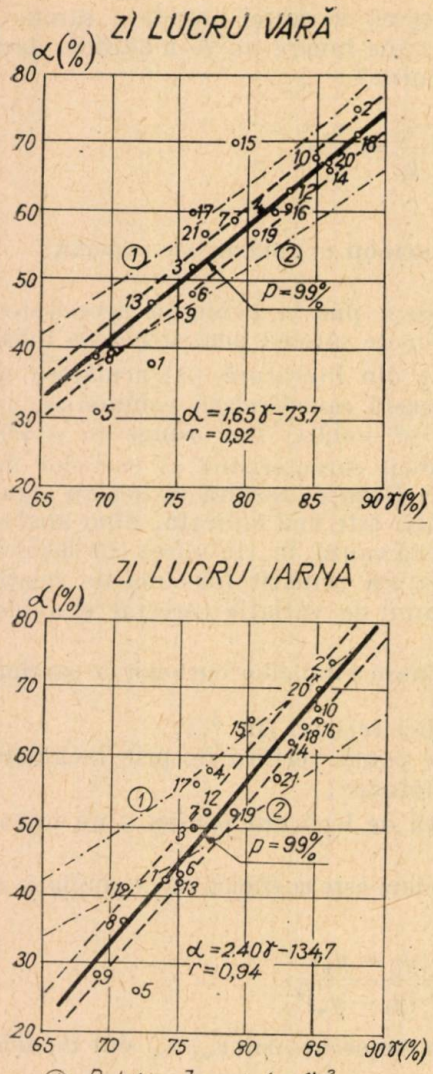
Cu cît coeficientul de corelație are valori mai apropiate de ± 1, cu atît corelația liniară dintre cele două variabile este mai strînsă. În cazul $r = \pm 1$ există o legătură funcțională între cele două variabile.

Dreapta de regresie are ecuația

$$y = bx + a,$$

în care coeficienții b și a se stabilesc cu ajutorul relațiilor

$$b = r\,\frac{\sqrt{\Sigma(y_i - y_m)^2}}{\sqrt{\Sigma(x_i - x_m)^2}}; \quad a = y_m - bx_m.$$

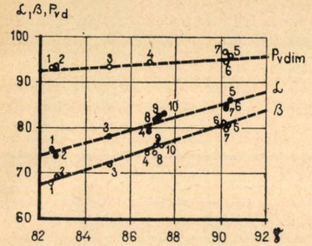


Nr. crt.	TĂRILE
1	R.F.G.
2	Austria
3	Belgia
4	Bulgaria
5	Danemarca
6	Spania
7	Franța
8	Marea Britanie
9	Grecia
10	Ungaria
11	Irlanda
12	Italia
13	Olanda
14	R.P. Polonă
15	R.P. Română
16	Suedia
17	Elvetia
18	U.R.S.S. reg. centrală
19	U.R.S.S. reg. Nord-Vest
20	Cehoslovacia
21	Iugoslavia

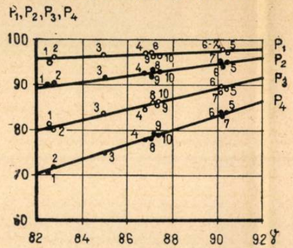
Fig. 4. — Exemple de corelații liniare.

ZIUA MEDIE DE LUCRU

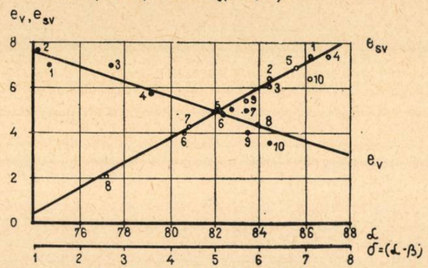
Corelațiile $\alpha, \beta, P_{vd} = f(\gamma)$



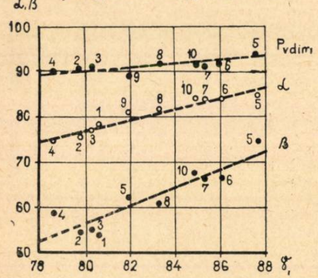
Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$



Corelațiile $e_v = f(\alpha)$ $e_{sv} = f(\delta)$

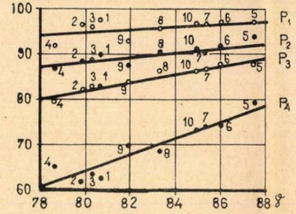


Corelațiile $\alpha, \beta, P_{vd} = f(\gamma)$

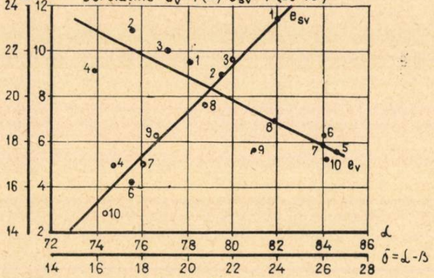


ZIUA MEDIE DUPĂ REPAUS

Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$

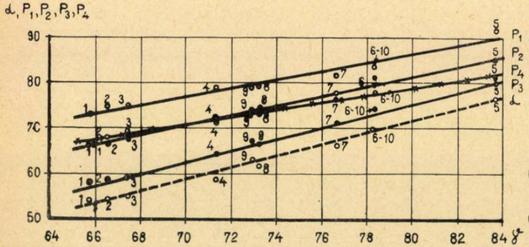


Corelațiile $e_v = f(\alpha)$ $e_{sv} = f(\alpha - \beta)$



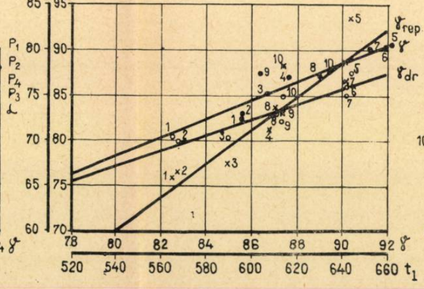
ZIUA MEDIE DE REPAUS

Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$ $\alpha = f(\gamma)$



CORELAȚII DE LEGĂTURĂ

Corelațiile $\gamma_{rep}, \gamma_{dr} = f\ \gamma,\ \gamma = f(t_e)$



Corelațiile $K'_1\ \tau'_1 = f(T')$

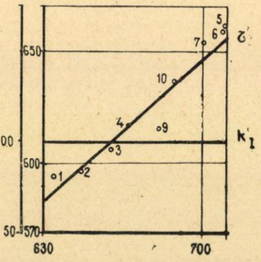
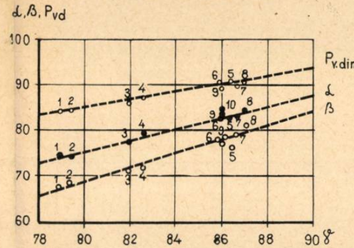


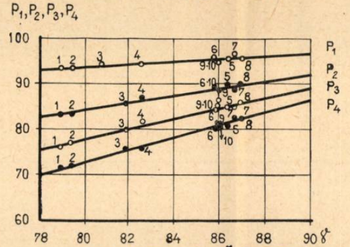
Fig. 5. — Corelații pentru determinarea indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină zilnice (decembrie).

ZIUA MEDIE DE LUCRU

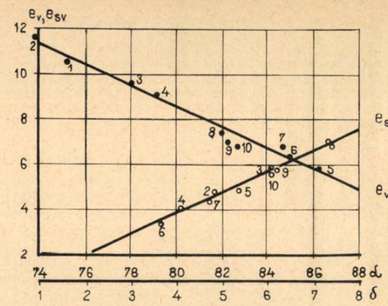
Corelațiile $\alpha, \beta, P_{vd} = f(\gamma)$



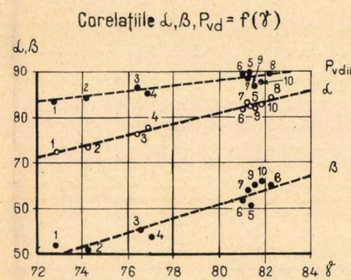
Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$



Corelațiile $e_v = f(\alpha)$ $e_{sv} = f(\delta)$

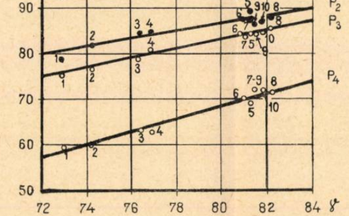


Corelațiile $\alpha, \beta, P_{vd} = f(\gamma)$

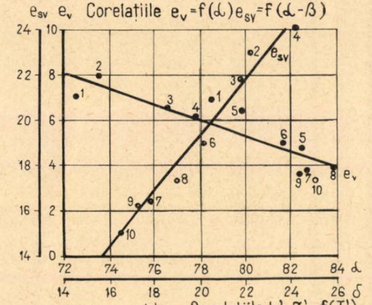


ZIUA MEDIE DUPĂ REPAUS

Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$

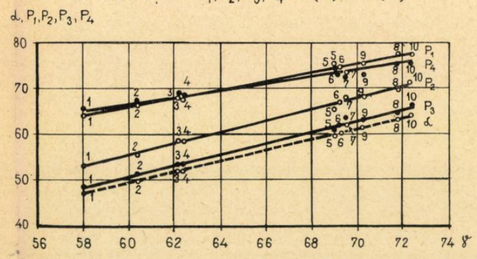


Corelațiile $e_v = f(\alpha)$ $e_{sv} = f(\alpha - \beta)$



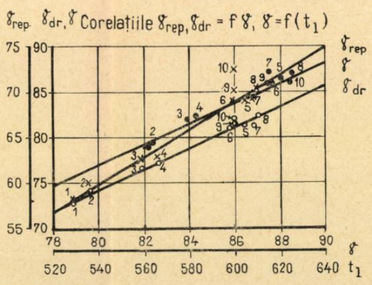
ZIUA MEDIE DE REPAUS

Corelațiile $P_1, P_2, P_3, P_4 = f(\gamma)$ $\alpha = f(\gamma)$



CORELAȚII DE LEGĂTURĂ

Corelațiile $\gamma_{rep}, \gamma_{dr} = f\ \gamma,\ \gamma = f(t_1)$



Corelațiile $k'_1, \tau'_1 = f(T')$

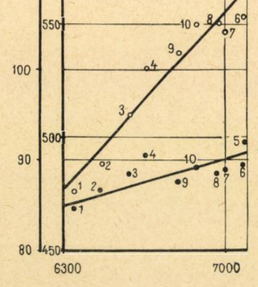


Fig. 6. — Corelații pentru determinarea indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină zilnice (iulie).

Corelațiile prezentate în continuare urmăresc să stabilească un număr suficient de indici pentru a permite trasarea curbelor de sarcină zilnică caracteristice din fiecare lună a anului. Pentru a elimina influența factorilor accidentali care pot surveni în cazul considerării numai a anumitor zile din fiecare lună, corelațiile s-au determinat pentru zile medii caracteristice din fiecare lună, și anume zile lucrătoare, zile de repaus și zile după repaus.

În afară de aceasta s-au mai stabilit și corelații de legătură între indicii care caracterizează regimul anual al sarcinii și indicii curbelor de sarcină zilnice.

4. CORELAȚII PENTRU DETERMINAREA INDICILOR CARACTERISTICI AI CURBELOR DE SARCINĂ ZILNICĂ

Principalele corelații stabilite se bazează pe cunoașterea factorului de aplatisare γ, permițînd determinarea următorilor indici caracteristici pe baza corelațiilor:

$$\beta = f(\gamma), \qquad P_1 = f(\gamma),$$
$$\alpha = f(\gamma), \qquad P_2 = f(\gamma),$$
$$e_v = f(\alpha), \qquad P_3 = f(\gamma),$$
$$e_{sv} = f(\delta), \qquad P_4 = f(\gamma),$$
$$\text{unde} \quad \delta = \alpha - \beta, \qquad P_v^d = f(\gamma).$$

În tabela 1 se prezintă corelațiile stabilite pentru cele trei zile caracteristice din fiecare lună, iar în figurile 5 și 6 se prezintă pentru exemplificare corelațiile rezultate pentru lunile decembrie și iulie.

În legătură cu aceste corelații se fac următoarele precizări:

— energia de vîrf (e_v) și semivîrf (e_{sv}) sînt date în % din energia zilnică totală a curbei de sarcină medii;

— indicii α, β, γ și puterile P_1, P_2, P_3, P_4, P_v^d sînt dați în % față de sarcina maximă a zilei caracteristice medii respective;

— pentru a simplifica datele de bază necesare s-au stabilit corelații de legătură între factorul de aplatisare γ_l al zilei de lucru și cel al zilei de repaus (γ_r), precum și cu factorul de aplatisare al zilei de după repaus (γ_{dr}):

$$\gamma_r = f(\gamma_l) \qquad \gamma_{dr} = f(\gamma_l).$$

Pe baza indicilor γ_{dr} și γ_r se determină apoi indicii caracteristici ai curbelor de sarcină zilnică respective (de după repaus și de repaus) pe baza relațiilor cuprinse în tabela 1:

— durata și orele între care se întind palierele P_1, P_2, P_3, P_4 au fost menținute aceleași în cursul unei luni pentru toate cele trei zile caracteristice: de lucru, repaus și după repaus;

— pentru ziua de repaus, datorită formei speciale a curbelor de sarcină, s-au făcut unele simplificări. Astfel s-a stabilit numai corelația $\alpha = f(\gamma_r)$, nefiind un vîrf de dimineață. În orele de noapte, sarcina scade

continuu, minimul înregistrîndu-se în ziua următoare, de după repaus, fiind astfel determinat de corelaţia stabilită pentru această zi. De asemenea, datorită formei curbelor de sarcină, nu a fost posibil pentru ziua de repaus să se determine zona de vîrf şi de semivîrf.

Pe baza acestor indici se pot trasa curbele de sarcină din zilele caracteristice, după cum rezultă din figura 7.

Coeficienţii de corelaţie r calculaţi pentru fiecare caz în parte sînt în general mai mari de 0,90—0,95, ceea ce arată existenţa unor legături strînse. Corelaţiile care se referă la indicii zonei de vîrf a curbelor de sarcină au rezultat în general mai puţin strînse decît celelalte corelaţii, deoarece această zonă este cel mai mult influenţată de o serie de factori accidentali, precum şi de condiţiile meteorologice şi climatice. De asemenea se remarcă faptul că aceste corelaţii sînt mai puţin strînse în lunile de primăvară şi de toamnă (aprilie şi septembrie-octombrie), în care condiţiile meteorologice sînt cele mai variabile.

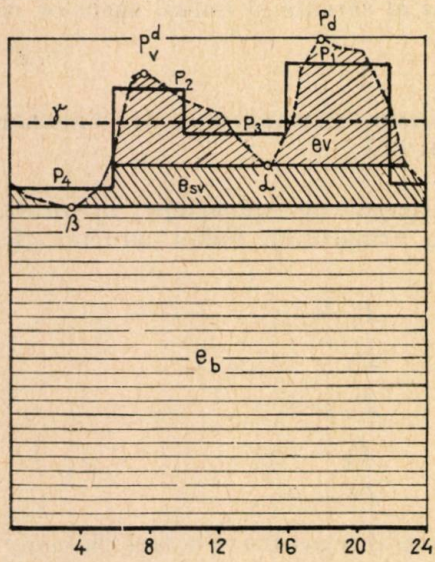


Fig. 7. — Elementele caracteristice pentru trasarea curbelor de sarcină.

Corelaţiile stabilite pun în evidenţă influenţa majoră pe care o are asupra factorului de aplatisare γ sarcina minimă de noapte a curbelor de sarcină.

Pentru verificarea corelaţiilor stabilite se pot urma următoarele căi :

a) pentru puterile medii P_1, P_2, P_3, P_4, care determină palierele zonelor de vîrf de seară şi de dimineaţă, de zi şi de noapte, există relaţia

$$\sum_{j=1}^{4} t_j (a_j \gamma + b_j) = 24 \gamma,$$

de unde

$$\sum_{j=1}^{4} a_j t_j = 24, \sum_{j=1}^{4} b_j t_j = 0,$$

în care t_j este durata în ore a palierului t_j;

b) ţinînd seama că energiile de vîrf şi de semivîrf (e_v şi e_{sv}) sînt date în % din energia zilnică, rezultă

$$\frac{100\,\beta}{\gamma} + e_v + e_{sv} = 100.$$

Este mai comod să se aplice această relaţie nu corelaţiilor, ci valorilor reieşite pentru β, e_v şi e_{sv} spre a se verifica închiderea rezultatelor.

Tabela 1

CORELAȚII CARACTERISTICE PENTRU PRELIMINAREA REGIMULUI CURBELOR DE SARCINĂ

	IANUARIE		FEBRUARIE		MARTIE		APRILIE		MAI		IUNIE		IULIE		AUGUST		SEPTEMBRIE		OCTOMBRIE		NOIEMBRIE		DECEMBRIE	
SPECIFICAȚIE	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA	r	CORELAȚIA
										CORELAȚII DE LEGĂTURĂ														
$\gamma_1' = f(T')$	0,948	0,065T'+160.8	0,906	0,062T'+144.270	0,907	0,0905T'-14,685	0,978	0,085T'-38,276	0,968	0,092T'-90.827	0,957	0,094T'-112,946	0,970	0,110T'-216.741	0,970	0,095T'-106.350	0,989	0,080T'+8,126	0,842	0,067T'+125,63	0,940	0,070T'+124,184	0,914	0,090T'+16,809
$k'1 = f(T')$		0,0011T'+92,25		0,00154T'+88,38		0,00154T'+87,38		0,031T'+74,75		0,038T'+67.94		0,046T'+59,75		0,062T'+46,50		0,031T'+69,75		0,031T'+82,88		0,015T'+85,38		0,015T'+88,88		
$\gamma = f(t_1)$	0,980	$0.120t_1+13.560$	0,814	$0.115t_1+21.152$	0,942	$0.120t_1+11.293$	0,980	$0,122t_1+12,831$	0,994	$0.134t_1+5,010$	0,990	$0,129t_1+8,685$	0,991	$0,125t_1+9.427$	0,994	$0,128t_1+8,159$	0,991	$0,134t_1+5,989$	0,978	$0,121t_1+11.518$	0,983	$0,119t_1+14.739$	0,929	$0,105t_1+21,187$
										ZIUA MEDIE DE LUCRU														
$P_v^d = f(\tau)$	0,90	0,225τ+74,6	0,92	0,447τ+53,9	0,96	0,72τ+27.14	0,97	0,838τ+16.89	0,99	0,841τ+17,26	0,99	0,799τ+21,29	0,98	0,813τ+20.18	0,99	0,880τ+14,39	0,99	0,865τ+14,45	0,93	1,077τ-2.91	0,90	0,498τ+48.23	0,84	0,36τ+63.30
$\alpha = f(\tau)$	0,99	1,43τ-43,02	0,98	1,25τ-27,98	0,99	1,11τ-14,70	0,97	1,00τ-5,79	0,99	1,08τ-10,85	0,99	1,10τ-12,12	0,99	1,21τ-21,42	0,99	1,12τ-14,20	0,99	1,16τ-18,04	0,99	1,18τ-21,52	0,97	1,43τ-42,93	0,98	1,41τ-42,24
$\beta = f(\tau)$	0,99	1,82τ-82,58	0,98	1,76τ-75,99	0,99	1,51τ-52,38	0,94	1,32τ-35,36	0,99	1,45τ-46,22	0,99	1,51τ-52,35	0,97	1,52τ-53,23	0,97	1,25τ-29,53	0,99	1,38τ-39,70	0,99	1,41τ-43,96	0,98	1,72τ-73,43	0,99	1,61τ-64,40
$P_1 = f(\tau)$	0,93	0,16τ+81,0	0,88	0,03τ+98,79	0,89	0,30τ+71,13	0,95	0,24τ+74,88	0,93	0,23τ+76,46	0,90	0,3τ+62,88	0,95	0,13τ+84,53	0,91	0,41τ+61,94	0,90	0,21τ+77,50	0,94	0,29τ+71,54	0,91	0,20τ+79,00	0,92	0,24τ+75,96
$P_2 = f(\tau)$	0,90	0,40τ+58,04	0,93	0,56τ+42,88	0,98	0,85τ+14,18	0,97	0,92τ+9,13	0,99	0,84τ+16,36	0,99	0,82τ+17,64	0,99	0,82τ+18,83	0,99	0,81τ+18,59	0,99	0,91τ+8,97	0,98	1,01τ+0,82	0,90	0,55τ+42,50	0,98	0,62τ+38,31
$P_3 = f(\tau)$	0,99	1,12τ-8,96	0,99	0,95τ+3,89	0,99	1,07τ-9,09	0,98	1,05τ-6,89	0,99	1,06τ-6,65	0,99	1,05τ-5,87	0,99	1,12τ-12,05	0,99	1,11τ-10,39	0,99	1,08τ-9,57	0,99	1,10τ-11,98	0,94	1,20τ-19,5	0,99	1,13τ-12,45
$P_4 = f(\tau)$	0,99	1,76τ-74,11	0,99	1,70τ-67,98	0,99	1,39τ-38,60	0,98	1,38τ-37,32	0,99	1,35τ-34,52	0,99	1,34τ-35,28	0,99	1,36τ-36,13	0,99	1,28τ-29,33	0,99	1,38τ+37,17	0,99	1,39τ-39,44	0,98	1,59τ-58,1	0,99	1,60τ-60,44
$e_v = f(\alpha)$	0,98	-0,51α+49,56	0,98	-0,42α+41,91	0,98	-0,32α+32.14	0,89	-0,25α+26,10	0,95	-0,27α+27,31	0,96	-0,28α+27,58	0,97	-0,32α+31,33	0,95	0,28α+28,50	0,96	-0,30α+30,30	0,97	-0,33α+34,01	0,98	-0,53α+50,39	0,99	-0,46α+45,32
$e_{sv} = f(\delta=\alpha-\beta)$	0,99	1,01δ-0,32	0,99	0,93δ+0,17	0,94	0,89δ+0,25	0,99	0,94δ+0,37	0,99	1,05δ-0,31	0,99	1,10δ-0,50	0,99	1,11δ-0,66	0,98	1,03δ-0,24	0,99	0,99δ-0,04	0,99	1,04δ-0,05	0,98	0,88δ+0,28	0,99	0,91δ+0,16
										ZIUA MEDIE DE REPAUS														
$\gamma_r = f(\gamma_{zi\ de\ lucru})$	0,92	1,69τ-78,42	0,92	1,77τ-81,83	0,96	1,63τ-69,36	0,91	1,46τ-54,74	0,95	1,24τ-39,35	0,92	1,47τ-55,98	0,98	1,54τ-63,63	0,93	1,32τ-45,09	0,96	1,40τ-50,11	0,97	1,40τ-49,73	0,90	1,83τ-87,70	0,94	1,83τ-86,43
$\alpha = f(\gamma_r)$	0,99	1,16τ-20,17	0,99	1,20τ-25,50	0,99	1,12τ-19,11	0,99	1,10τ-16,33	0,99	1,07τ-12,46	0,99	1,04τ-12,35	0,99	1,17τ-20,86	0,99	1,20τ-22,37	0,99	1,02τ-11,97	0,99	1,35τ-34,35	0,99	1,21τ-25,01	0,99	1,30τ-32,22
$P_1 = f(\gamma_r)$	0,98	0,86τ+16,83	0,98	0,81τ+19,88	0,99	0,79τ+22,87	0,94	0,74τ+24,82	0,97	0,74τ+26,97	0,99	0,88τ+14,16	0,98	0,83τ+16,93	0,92	0,91τ+14,66	0,98	0,90τ+14,31	0,99	0,83τ+19,29	0,99	0,89τ+13,68	0,98	0,88τ+15,51
$P_2 = f(\gamma_r)$	0,99	0,98τ+0,48	0,99	1,04τ-3,16	0,99	1,22τ-19,59	0,99	1,23τ-19,67	0,99	1,08τ-8,93	0,99	1,13τ-11,98	0,99	1,21τ-17,29	0,99	1,16τ-13,78	0,99	1,17τ-15,59	0,99	1,20τ-18,15	0,97	1,07τ-6,41	0,99	1,02τ-1,01
$P_3 = f(\gamma_r)$	0,94	1,11τ-13,35	0,99	1,29τ-27,27	0,99	1,19τ-21,53	0,98	1,12τ-16,80	0,99	1,19τ-17,74	0,99	1,13τ-16,86	0,99	1,19τ-20,69	0,99	1,15τ-17,15	0,99	1,09τ-15,03	0,99	1,20τ-23,16	0,99	1,28τ-26,63	0,99	1,32τ-29,16
$P_4 = f(\gamma_r)$	0,92	1,01τ-1,12	0,96	0,81τ+16,03	0,98	0,84τ+14,64	0,97	0,88τ+11,73	0,98	0,92τ+7,82	0,99	0,86τ+13,96	0,99	0,78τ+19,30	0,97	0,82τ+15,35	0,99	0,87τ+12,45	0,98	0,83τ+15,40	0,96	0,81τ+15,44	0,98	0,81τ+14,27
										ZIUA MEDIE DUPĂ REPAUS														
$\gamma_{dr} = f(\gamma_{zi\ de\ lucru})$	0,94	0,99τ-3,66	0,95	0,99τ-4,13	0,99	1,03τ-6,81	0,95	1,00τ-4,92	0,98	0,85τ+7,27	0,98	0,97τ-2,11	0,99	1,10τ-13,79	0,98	0,85τ+8,37	0,97	0,93τ+1,71	0,98	0,91τ+3,08	0,95	0,96τ-1,35	0,93	0,83τ+10,54
$\alpha = f(\gamma_{dr})$	0,96	1,21τ-19,43	0,95	1,30τ-27,48	0,96	1,16τ-13,71	0,96	0,99τ-0,11	0,94	1,20τ-15,13	0,97	0,92τ+6,63	0,99	1,21τ-15,48	0,99	1,07τ-5,29	0,99	1,18τ-14,58	0,99	1,11τ-10,90	0,86	1,08τ-8,10	0,96	1,18τ-17,09
$\beta = f(\gamma_{dr})$	0,93	1,93τ-97,92	0,91	1,77τ-83,70	0,92	1,54τ-64,17	0,93	1,43τ-53,50	0,98	1,72τ-74,56	0,91	1,71τ-75,53	0,95	1,55τ-63,39	0,94	1,44τ-53,23	0,97	1,43τ-53,56	0,97	1,59τ-67,72	0,93	2,25τ-123,25	0,91	2,02τ-105,24
$P_1 = f(\gamma_{dr})$	0,90	0,22τ+76,82	0,79	0,22τ+76,47	0,71	0,20τ+79,48	0,91	0,31τ+69,06	0,83	0,09τ+87,05	0,88	0,13τ+83,96	0,97	0,13τ+84,02	0,93	0,19τ+79,97	0,87	0,23τ+76,70	0,87	0,22τ+76,97	0,78	0,07τ+89,32	0,94	0,34τ+67,62
$P_2 = f(\gamma_{dr})$	0,86	0,36τ+59,88	0,85	0,55τ+39,68	0,94	0,85τ+17,66	0,92	0,77τ+24,14	0,98	0,81τ+20,92	0,96	0,67τ+32,27	0,94	0,83τ+19,68	0,96	0,77τ+24,31	0,96	0,88τ+15,16	0,98	0,89τ+12,51	0,95	0,61τ+37,28	0,91	0,50τ+47,97
$P_3 = f(\gamma_{dr})$	0,97	1,02τ+1,07	0,95	1,03τ-0,50	0,94	1,08τ-5,22	0,96	1,10τ-6,84	0,96	0,88τ+12,24	0,97	1,06τ-2,28	0,99	1,06τ-2,20	0,97	1,05τ-0,62	0,99	1,07τ-3,29	0,99	1,11τ-8,40	0,87	0,82τ+16,42	0,95	0,86τ+13,02
$P_4 = f(\gamma_{dr})$	0,96	1,81τ-81,01	0,95	1,62τ-63,73	0,96	1,44τ-46,74	0,96	1,44τ-46,43	0,98	1,52τ-52,09	0,97	1,51τ-51,82	0,98	1,38τ-42,09	0,97	1,42τ-45,22	0,99	1,41τ-44,42	0,98	1,52τ-54,85	0,97	2,00τ-95,34	0,94	1,80τ-80,10
$e_v = f(\alpha)$	0,96	-0,52α+49,13	0,93	-0,54α+50,19	0,98	-0,37α+35,63	0,83	-0,27α+27,82	0,93	-0,34α+32,76	0,82	-0,26α+25,98	0,95	-0,36α+33,96	0,88	-0,30α+29,27	0,94	-0,31α+30,98	0,93	-0,35α+34,76	0,97	-0,56α+52,05	0,89	-0,49α+47,03
$e_{sv} = f(\delta)$	0,99	1,04δ-1,36	0,98	1,06δ-1,07	0,97	δ-0,074	0,95	1,04δ-1,12	0,90	1,12δ-2,78	0,98	0,99δ+0,16	0,96	1,23δ-5,26	0,98	1,10δ-3,01	0,93	1,27δ-6,01	0,97	1,16δ-2,99	0,99	1,00δ-0,54	0,99	1,01δ-0,85

5. CORELAȚII DE LEGĂTURĂ

Din cele arătate a rezultat că pentru determinarea indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină zilnică este necesar să se cunoască numai factorul de aplatisare γ al zilei medii de lucru din fiecare lună.

În cazul în care acest indice nu este cunoscut, s-au stabilit o serie de corelații succesive de legătură între o serie de indici care caracterizează regimul anual și lunar al sarcinii pentru a putea astfel determina γ al zilei medii de lucru din fiecare lună.

În continuare se vor prezenta două cazuri după gradul de cunoaștere al datelor de bază.

Cazul I. Datele de bază de care se dispune sînt:

a) consumul anual de energie;

b) consumul lunar de energie (E_l);

c) sarcinile maxime ale zilei medii de lucru din fiecare lună.

Pe baza valorilor de la capitolul 2, punctele *b* și *c*, se poate determina durata lunară de utilizare a sarcinii maxime lunare:

$$t_l = \frac{E_l}{P_l}.$$

Pentru fiecare lună s-a determinat o corelație de legătură între t_l și factorul de aplatisare γ_l al zilei medii de lucru, corelație care a rezultat strînsă.

Cazul II. Datele de bază de care se dispune sînt:

a) consumul anual de energie;

b) durata anuală de utilizare T a sarcinii maxime anuale (ore/an);

c) ritmul de creștere al sarcinii maxime anuale k_p (%);

d) sarcinile maxime din fiecare lună.

În legătură cu datele de bază se fac următoarele considerațiuni. Durata anuală de utilizare a sarcinii maxime anuale T se consideră că reprezintă un indicator sintetic asupra evoluției de viitor a consumului, mai ușor de apreciat în caz că nu se cunosc suficiente elemente pentru stabilirea pe cale analitică a variației lui, ceea ce este cazul unei perspective îndepărtate.

O influență majoră asupra duratei anuale de utilizare T o prezintă ritmul de creștere k_p al sarcinii maxime anuale. Din această cauză apare mai indicat să se utilizeze durata de utilizare T', calculată pentru o creștere anuală nulă a sarcinii. Pentru cei zece ani, cu date de care s-a dispus, s-a calculat corelația liniară dintre raportul $\frac{T}{T'}$ și k_p în două cazuri:

— indicii T', T și k_p determinați pe baza sarcinii maxime anuale înregistrate;

— aceeași indici calculați pe baza sarcinii maxime medii din luna decembrie, notați T'_0, T_0, k_{p_0}.

Cele două drepte de regresie date de relațiile $\frac{T'}{T} = f(k_p)$ și $\frac{T'_0}{T_0} = (k_{p_0})$ se suprapun; ținînd seama că valorile corespunzătoare zilelor medii reflectă mai bine regimul curbelor de sarcină, s-a lucrat cu aceste valori.

Tabela 2

Duratele zonelor caracteristice ale energiei (ore)

	Zile de lucru				Zile după repaus				Zile de repaus				Total vîrf de dimineață	Total vîrf de seară	Total zona de zi	Total zona de noapte	Total
	Vîrf de dimineață	Zona de zi	Vîrf de seară	Zona de noapte	Vîrf de dimineață	Zona de zi	Vîrf de seară	Zona de noapte	Vîrf de dimineață	Zona de zi	Vîrf de seară	Zona de noapte					
trim. I.	274	388	308	518	62	87	70	117	58	90	72	116	394	450	565	751	2 160
trim. II.	448	298	214	576	91	61	43	117	98	66	46	126	637	303	425	819	2 814
trim. III.	448	298	214	576	91	61	43	117	105	71	49	135	644	306	430	828	2 208
trimt. IV	283	389	368	520	59	76	73	104	58	86	80	112	400	521	551	736	2 208
Total iarnă (trim. I.+IV)	557	777	676	1 038	121	163	143	221	116	176	152	228	794	971	1 116	1 487	4 368
Total vară (trim. II.+III)	896	596	428	1 152	182	122	86	234	203	137	95	261	1 281	609	855	1 647	4 392
Total an	1 453	1 373	1 104	2 190	303	285	229	455	319	313	247	489	2 075	1 580	1 971	3 134	8 760

Repartiția sarcinii maxime lunare în cursul anului se exprimă prin raportul k_i dintre sarcina maximă lunară și cea anuală. În cazul în care raportul se referă la valori lunare și anuale statice (după eliminarea creșterii anuale), indicii se notează k'_i iar în cazul valorilor maxime medii corespunzătoare, cu k'_{i0}. Pe baza celor zece ani de înregistrări existente se apreciază că se pot admite valorile k'_i din tabela 1 stabilite prin corelație cu T', remarcînd că o dată cu creșterea duratei anuale de utilizare T' apare o aplatisare a variației anuale a sarcinii prin reducerea golului de vară. De asemenea trebuie subliniat că, în medie, sarcina maximă medie lunară este de 2—5% mai mică decît cea maximă lunară, putîndu-se considera în calcule o reducere de 3%.

Pe baza acestor valori s-a stabilit o corelație între valoarea T', luată ca dată de bază, și τ', pe baza căreia se poate determina energia lunară statică (fără a ține seama de creșterea anuală a consumului) :

$$\tau'_i = \frac{E'_i}{P_{an}^{i-1}}, \text{ deci rezultă } E'_i = P_{an}^{i-1} \cdot \tau'_i .$$

Cunoscînd k'_i sau k'_{i0}, se poate calcula durata de utilizare a sarcinii lunare maxime sau maxime medii cu relația

$$t_j = \frac{\tau'_i}{k'_i} \text{ sau } t_i.$$

Cunoscînd pe t_i se revine la corelația $\gamma_i = f(t_i)$, prezentată la cazul 1.

Se menționează că, deoarece șirul de date stabilite nu se suprapune cu rigurozitate peste valorile teoretice obținute din corelații, se poate calcula intervalul mediu de încredere cu diferite asigurări față de dreapta teoretică.

6. CONCLUZII

Din analiza factorilor care influențează asupra regimului curbelor de sarcină s-a pus în evidență faptul că acestea sînt influențate în mare măsură de o serie de factori constanți, legați de amplasarea geografică și de condițiile naturale ale țării. Factorii variabili de la țară la țară au de multe ori influențe contrare, modificînd lent, într-un timp îndelungat, forma curbelor de sarcină.

Valabilitatea premiselor de la care s-a plecat este demonstrată de faptul că coeficienții de corelație ai relațiilor stabilite sînt strînși, cu toate că s-a analizat o perioadă de zece ani cu regimuri și condiții de funcționare foarte diferite. Aceasta prezintă și avantajul de a putea dispune de un diapazon larg de date, corespunzător unor durate de utilizare a sarcinii maxime cuprins între 5 670 și 6 360 de ore/an sau, raportînd la sarcina maximă statică, cuprins între 6 050 și 6 770 de ore/an.

Din această cauză se apreciază că aplicarea acestei metode de care s-ar dispune completată cu fiecare an de observații în plus, poate fi aplicată pentru perspectiva mai îndepărtată de 10—15 ani. Se menționează

însă că introducerea masivă a unor consumatori cu regim specific de funcţionare, ca irigaţiile spre exemplu, necesită o analiză specială ; în preliminarea formei curbelor de sarcină se vor elimina aceşti consumatori, regimul lor adăugîndu-se prin însumare.

Cu aceste limite şi necesitînd o continuă verificare pe măsura disponibilităţii de noi date, apreciem că metoda propusă poate fi aplicată pentru perspectiva mai îndepărtată, punînd în evidenţă modificările formei curbelor de sarcină în diferite situaţii.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Schwefelberg, A. Cogălniceanu, E. Costin, *Méthodes de prévisions de l'augmentation de la consommation d'énergie éléctrique en perspective*, World Power Conference, Session partielle de Tokio 1966, Rapport IA-164.
2. * * * *La couverture des pointes de charge dans les réseaux éléctriques*, Nations Unies ST/ECE/EP/19, Geneva, 1963.
3. H. Junge, M. Wolf, *Belastungskurven und Dauerlinien in der elektrischen Energiewirtschaft*, Springer-Verlag, 1959.

INFLUENȚA LUNGIMII LINIILOR ELECTRICE ASUPRA SIGURANȚEI SCHEMELOR ELECTRICE

DE

V. NITU

620.9 :621.316.26

În scopul măririi preciziei calculelor de siguranță a schemelor electrice se propune luarea în considerare a influenței lungimii liniilor asupra indicatorilor de siguranță a întrerupătoarelor. Calculele efectuate au arătat că această influență poate atinge valori mergînd pînă la 25% în comparație cu valorile obținute prin neglijarea acestei influențe asupra intensității de indisponibilitate a întrerupătorului.

Configurația schemelor electrice de conexiuni a stațiilor este determinată de locul și de importanța pe care acestea le ocupă în sistemul energetic, precum și de gradul de exigență în alimentarea cu energie electrică a consumatorilor.

În practica proiectării stațiilor electrice se întîlnește o mare diversitate de scheme, ca urmare a condițiilor foarte variate ce trebuie satisfăcute. Elementul cel mai solicitat al unei stații electrice este întrerupătorul, care prin construcția sa este și cel mai complex aparat. Gradul de solicitare al întrerupătorului depinde de numărul de declanșări a liniilor protejate ca urmare a apariției scurtcircuitelor monofazate sau polifazate.

Pentru întrerupătoarele de fabricație românească sînt date indicațiile cu privire la numărul de deconectări admise între două revizii, arătate în tabela 1.

Reviziile neplanificate determinate de numărul de deconectări în regim normal sau ca urmare a apariției scurtcircuitelor în zona protejată vor imobiliza întrerupătoarele, ceea ce va influența negativ gradul de siguranță a schemei electrice respective.

Reviziile neplanificate se suprapun, de regulă, peste reviziile planificate, a căror durată și frecvență este arătată în tabela 2, din care rezultă că reviziile de tip *A* au loc la cinci întreruperi pe defect, în cadrul căreia se examinează componentele cele mai solicitate, iar o dată la cinci ani întrerupătoarele sînt supuse unei revizii mai complexe cu o durată de timp mai mare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 251—257, 1970

Tabela 1

Nr. crt.	Tipul întrerupătorului	Curentul nominal, I_{nom} (A)	Curentul nominal de rupere, I_{rn} (A)		Număr de deconectări admise între două revizii		
			fără R.A.R.	cu R.A.R.	$I = I_{nom}$	$I_n < I <$ 0,5 I_{rn}	$0{,}5I_{rn} <$ $< I < I_{rn}$
1	Întrerupător cu ulei puțin IUP-110—1300 MVA	600	6 800	6 800	300	5	2
2	Întrerupător cu ulei puțin IUP-110—1900 MVA	600	10 000	10 000	300	6	3
3	Întrerupătoare cu ulei puțin IO-110	1 600	31 500	31 500	500	14	5
4	Întrerupătoare cu ulei puțin IO-220	1 600	31 500	31 500	500	14	5

Tabela 2

Durata și frecvența reviziilor la întrerupătoare

Tipul aparatului	Mediul de stingere a arcului	Revizie tip *A*		Revizie tip *B*	
		durata, ore	frecvența, ani	durata, ore	frecvența, ani
Delle HPGE 14—16 BS 245 kv, cod oleopneumatică OP 2 ETNA	ulei puțin	10	1	22	5
Gardy T 91 H—T 93 H, 225 kV, comandă oleopneumatică	ulei puțin	12	1	34	5
Merlin Gerin 245 kV, tip PPD 96M, comandă aer comprimat	aer comprimat	6	1	31/61	3/6
Merlin Gerin PR 9512.245 kV	aer comprimat	5	1	28/57	3/6
CEM tip DCSF 225 kV	aer comprimat	3	1	40/73	3/6

În calculele de siguranță a schemelor stațiilor electrice practicate pînă în prezent nu se ia în considerare efectul lungimii liniilor conectate la întrerupătoare. Folosirea în calcul a unor indicatori constanți (λ și μ) pentru întrerupătoare indiferent de lungimea liniilor la care sînt conectate conduce la rezultate cifrice care nu reflectă realitatea stărilor prin care trece întrerupătorul respectiv, ceea ce atrage după sine obținerea unor rezultate deformate a calculului de siguranță a schemelor electrice.

Astfel, un întrerupător care protejează o linie electrică de lungime mai mare va fi solicitat mai intens, ceea ce va conduce la scoaterea în revizie mai frecventă și la scăderea gradului de siguranță pe perioada reviziei.

Se știe (B—1) că, dacă se analizează comportarea unui element caracterizat prin intensitatea de avariere λ și intensitatea de reparare μ, numărul mediu al refuzurilor într-un interval de timp $\underline{t}$ este

$$N(t) = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda\mu t}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda^2 e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Pentru intervale de timp lungi (practic de ordinul lunilor) se poate neglija termenul exponențial. De asemenea, utilizînd date curent obținute pentru λ și μ, se constată că pentru intervale mai mari termenul $\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}$ are valori foarte mici pentru duratele folosite în calculele de siguranță a schemelor electrice, putînd fi chiar neglijat. Aceasta ne conduce la o expresie simplificată, și anume

$$N(t) \simeq \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} t.$$

În cazul unei linii de transport, considerînd

$$\lambda = l\lambda_l,$$

$$\mu = c\underline{t},$$

avem

$$N(t)l = l\lambda_l \frac{\mu_l}{l\lambda_l + \mu_l} \cdot T,$$

și intervalul în care se va produce un număr mediu de declanșări N va fi

$$T = N\left(\frac{1}{\mu_l} + \frac{l}{l\lambda_l}\right) = N\left(k_1 + \frac{k_2}{l}\right),$$

unde

$$K_1 = \frac{1}{\mu_l} \quad K_2 = \frac{1}{\lambda_l}.$$

În acest interval T, întrerupătorul ar fi avut un număr mediu de declanșări

$$N(T)_i = \lambda_i \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad N\left(K_1 + \frac{K_2}{l}\right).$$

Ca urmare a necesității de a revizui întrerupătorul după cele $\underline{N}$ declanșări pe defect, numărul total de indisponibilități ale întrerupătorului va crește la $N'(T)_i$.

Pentru a se ține seama în analiza schemei de acest fapt, se poate considera că intensitatea de avariere a întrerupătorului crește de la λ_i la λ_i', definit de relația

$$N'(T)_i = \lambda_i' \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} N\left(k_1 + \frac{k_2}{l}\right),$$

$$\lambda_i' = \frac{\mu_i N'(T)_i}{\mu_i N\left(k_1 + \frac{k_2}{l}\right) - N'(T)_i},$$

$$\lambda_i' = \frac{\mu_i(\lambda_i\mu_i NK_1 + \lambda + \mu_i)\, l + \mu_i^2 k_2 N\lambda_i}{(\mu_i^2 NK_1 - \lambda - \mu_i)\, l + NK_2\mu_i^2}$$

sau

$$\lambda_i' = \frac{\mu_i\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_l}\mu_i N + \lambda_i + \mu_i\right] l + \mu_i^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_l} N}{\left(\frac{\mu_i^2}{\mu_l} - \lambda_i - \mu_i\right) l + N\frac{\mu_i^2}{\lambda_l}}$$

Se poate observa că variația intensității de indisponibilitate a întrerupătorului, considerînd și influența pe care o are faptul că protejează o linie de lungime l, va fi de forma

$$\lambda_i' = \frac{\alpha_1 l + b_1}{\alpha_2 l + b_2},$$

adică o hiperbolă.

Este interesant de observat că pentru

$$l = 0, \quad \lambda_i' = \frac{b_1}{b_2} = \lambda_i.$$

Este de observat importanța pe care o are raportul $\frac{\lambda_i}{\lambda_l}$ asupra valorii lui λ_i': cu cît acest raport este mai mic (întrerupătorul este mai sigur în exploatare decît linia), creșterea lui λ_i' cu lungimea este procentual mai mare.

În figura 1 este reprezentată variația intensității de indisponibilitate a întrerupătorului care protejează o linie cu lungimea liniei protejate pentru două cazuri : *a*) numărul de declanșări după care se face obligatoriu reparația cu $N = 5$ declanșări pe defect ; *b*) idem, dar cu $N = 10$ declanșări.

În λ_i' se cuprind toate categoriile de declanșări (care conduc la întreruperi de durate, care necesită reparații și care corespund unor avarii trecătoare).

Se constată astfel că (pentru cinci acționări pe defect) :

— pentru liniile de 110 kV creșterea la $l = 100$ km este de la $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ s^{-1} la $5{,}4 \cdot 10^{-8}$ s^{-1};

— pentru liniile de 220 kV creșterea la $l = 200$ km este de la $0{,}27 \cdot 10^{-8}$ s^{-1} la $4{,}87 \cdot 10^{-8}$ s^{-1};

— pentru liniile de 400 kV creșterea la $l = 400$ km este de la $0{,}27 \cdot 10^{-8}$ s^{-1} la $1{,}45 \cdot 10^{-8}$ s^{-1}.

Evidențiind influența lungimii liniei asupra siguranței întrerupătorului, am neglijat influența celorlalte elemente conectate în serie cu linia și a căror avariere atrage după sine declanșarea întrerupătorului. În calculele în care apare ca necesară o mai mare precizie se vor lua însă în considerare și aceste elemente.

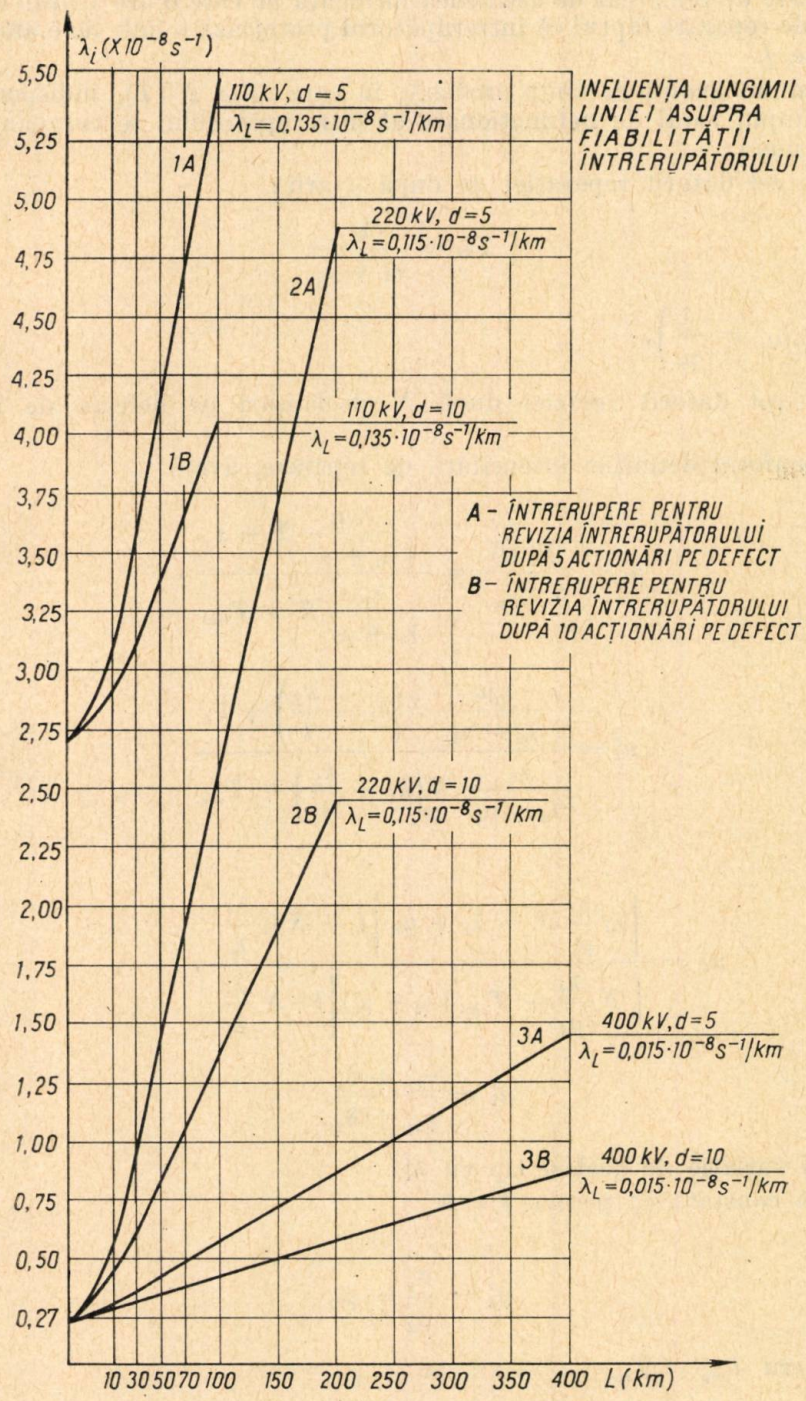


Fig. 1. — Influența lungimii liniei asupra fiabilității întrerupătorului.

Este de remarcat de asemenea influența pe care o are asupra intensității de reparare faptul că întrerupătorul protejează o linie de o anumită lungime l.

În intervalul de timp analizat, în care apar $N'(T)_i$ indisponibilități, timpul total de nefuncționare al întrerupătorului se compune din doi termeni:

— cel datorit reparației de după avarii:

$$T_{di} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

$$\left(T_{med\ reparație} = \frac{1}{\mu_i}\right);$$

— cel datorit reviziei după N declanșări pe defecte de linie: $T_{revizie}$

Conform definiției intensității de reparare, avem

$$\mu_i = \frac{N_i'(t)}{T_{indisp.}} = \frac{\dfrac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + \mu_i} T + 1}{\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} T + T_{rev.}},$$

$$u_i' = \frac{\dfrac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + \mu_i} N\left(k_1 + \dfrac{k_2}{l}\right) + 1}{\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} N\left(k_1 + \dfrac{k_2}{l}\right) + T_{rev.}}$$

sau

$$\mu_i' = \frac{\left[\lambda_i \dfrac{\mu_i}{\mu_l} N + \lambda_i + \mu_i\right] l + N \mu_i \dfrac{\lambda_i}{\lambda_l}}{\left[N \dfrac{\lambda_i}{\mu_i} + T_{rev.}(\lambda_i + \mu_i)\right] l + N \dfrac{\lambda_i}{\lambda_l}},$$

$$\mu_i' = \frac{\gamma_{1l} + \delta_1}{\gamma_{2l} + \delta_2},$$

adică o variație de același tip cu λ_i'.

Se constată că pentru $l = 0$
avem

$$\mu_i' = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \mu_i,$$

iar pentru $T_{rep} = T_{med\ rep}$

$$\mu_i' = \mu_i.$$

În calcule se consideră $\mu_i' = \mu_i$, diferența rezultată din datele curente de exploatare fiind neînsemnată.

Pentru a arăta influența pe care o au considerentele de mai sus asupra siguranței conexiunilor, vom exemplifica pe schema cu racord adînc (fig. 2), din care rezultă următoarele :

— fără considerarea influenței lungimii liniei, durata totală de indisponibilitate pe an este

$l = 30$ km , $T_d = 77$ de ore,

$l = 60$ km , $T_d = 79$ de ore,

$l = 100$ km , $T_d = 81$ de ore,

— cu considerarea influenței lungimii liniei protejate :

$l = 30$ km, $T_d = 82$ de ore,

$l = 60$ km, $T_d = 89$ de ore,

$l = 100$ km, $T_d = 97$ de ore.

Rezultate asemănătoare s-au obținut și în analiza siguranței în funcționare a altor conexiuni.

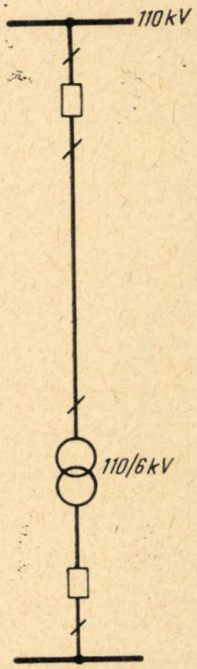


Fig. 2. — Schemă de racord adînc.

CONCLUZII

— lungimea liniei protejate poate avea o influență sensibilă asupra intensității de indisponibilitate a întrerupătoarelor care le protejează ;

— influența lungimii liniei asupra intensității de indisponibilitate a întrerupătoarelor crește cu cît întrerupătoarele sînt mai sigure în exploatare și cu cît lungimea liniei este mai mare, realizîndu-se o variație hiperbolică ;

— la analiza siguranței schemelor de conexiuni după datele statistice din Republica Socialistă România, rezultă că este indicat să se considere influența lungimii liniilor.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Nitu, H. Albert, M. Brădescu, *Utilizarea calculului statistic și probabilistic în energetică*, București, Edit. tehnică, 1968.

ANALIZA EFICACITĂȚII CICLURILOR DE COMBUSTIBIL NUCLEAR PENTRU REACTORI MODERAȚI CU APĂ GREA ÎN CONDIȚIILE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

DE

C. HAIDUC, L. CONSTANTINESCU și D. MIHAI

338.4 : 621.039.516

În lucrare se prezintă modelul matematic pentru analiza eficacității ciclurilor de combustibil la reactorii nucleari energetici. Se dă programul de calcul pe calculatorul electronic cifric CIFA-102 și rezultatele utilizării modelului pentru ciclurile de combustibil ale reactorilor nucleari moderați cu apă grea în condițiile din Republica Socialistă România. Analiza efectuată a dat posibilitatea de a se analiza influența reciprocă a unui număr mare de parametri ai ciclului de combustibil nuclear și a numărului de încărcături parțiale cu combustibil asupra eficacității ciclurilor de combustibil ale diferitelor tipuri de reactori nucleari energetici.

Problema analizei eficacității ciclurilor de combustibil nuclear prezintă o importanță deosebită atît în ceea ce privește alegerea tipului optim de reactor nuclear pentru o țară dată, cît și pentru analizarea diferitelor variante de programe nucleare. Această problemă prezintă importanță de asemenea și pentru analiza perfecțiunii și optimizarea parametrilor diferitelor tipuri de cicluri de combustibil nuclear.

În lucrarea de față, drept criteriu de analiză se utilizează componenta combustibilului din cheltuielile specifice de calcul la producerea de energie electrică în forma ei actualizată :

$$Z_c^* = C_c^* + p_e(F_{r_1}^* + F_{r_2}^*) + \frac{p_e}{\tau} i_c^*, \qquad (1)$$

unde

C_c^* corespunde combustibilului din prețul de cost al energiei electrice la centrala nuclearo-electrică (C.N.E.), în lei/kWh,

p_e este coeficientul de eficacitatea investițiilor în energetică ($p_e = 0{,}1 - 0{,}125$), în 1/an,

$F_{r_1}^*$, $F_{r_2}^*$ sînt fondurile de rulment actualizate în combustibilul nuclear și la prelucrarea acestuia în întreprinderile ciclului de combustibil, în lei an/kWh,

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 259—272, 1970

τ este numărul de ore de funcționare anuală a C.N.E. la puterea nominală, în h/an,

i_c^* — investițiile specifice actualizate în întreprinderile ciclului de combustibil nuclear, în lei/kW.

În ecuația (1), mărimea C_c^* se exprimă :

$$C_c^* = \frac{\sum_1^5 C_i + \sum_7^9 C_i - C_{10}}{24\, b\, \eta_n^{CNE}}, \tag{2}$$

iar pentru F_{r_1} și F_{r_2} sub formă actualizată se pot obține ecuațiile

$$F_{r_1}^* = \frac{1}{24b\,\eta_n^{CNE}} \left[C_1 t_2 e^{p_e \sum_2^5 t_i} + \left(\sum_1^2 C_i \right) t_3 e^{p_e \sum_3^5 t_i} + \left(\sum_1^3 C_i \right) t_4 e^{p_e \sum_4^5 t_i} + \right.$$

$$+ \left(\sum_1^4 C_i \right) t_5 e^{p_e t_5} + \left(C_{10} - \sum_7^9 C_i \right) t_6 e^{-p_e t_6} + \left(C_{10} - \sum_7^9 C_i \right) t_7 e^{-p_e \sum_6^7 t_i} +$$

$$\left. + \left(C_{10} - \sum_8^9 C_i \right) t_8 e^{-p_e \sum_6^8 t_i} + (C_{10} - C_9)\, t_9 e^{-p_e \sum_6^9 t_i} + C_{10} t_{10} e^{-p_e \sum_6^{10} t_i} \right], \tag{3}$$

$$F_{r_2}^* = \frac{1}{2 \cdot 24 b \eta_n^{CNE}} \left[C_1 t_1 e^{p_e \sum_1^5 t_i} + C_2 t_2 e^{p_e \sum_2^5 t_i} + C_3 t_3 e^{p_e \sum_3^5 t_i} + \right.$$

$$+ C_4 t_4 e^{p_e \sum_4^5 t_i} + C_5 t_5 e^{p_e t_5} + \left(\sum_1^5 C_i + \sum_7^9 C_i - C_{10} \right) t_6 e^{-p_e t_6} + C_7 t_7 e^{-p_e \sum_6^7 t_i} +$$

$$\left. + C_8 t_8 e^{-p_e \sum_6^8 t_i} + C_9 t_9 e^{-p_e \sum_6^9 t_i} + C_{10} t_{10} e^{-p_e \sum_6^{10} t_i} \right] \tag{4}$$

În ecuațiile (2) și (3), (4) s-au folosit următoarele notații :

C_1 — cheltuielile specifice la extracția minereului de U, în lei/kg U_{imb};

C_2 — cheltuielile specifice la obținerea U_3O_8 din minereu de uraniu, în lei/kg U_{imb};

C_3 — cheltuielile specifice la obținerea $U_{natural}$ din U_3O_8, în lei/kg U_{imb};

C_4 — cheltuielile specifice la realizarea îmbogățirii uraniului, în lei/kg U_{imb};

C_5 — cheltuielile specifice la fabricarea elementelor de combustibil (e.d.c.) din U_{imb}, în lei/kg U_{imb};

C_7 — cheltuielile specifice de răcirea e.d.c. după iradiere în reactor, în lei/kg U_{imb};

C_8 — cheltuielile specifice cu transportul e.d.c. iradiate la uzina de reprelucrare chimică, în lei/kg U_{imb};

C_9 — cheltuielile specifice la reprelucrarea chimică a e.d.c. iradiate în reactor, în lei/kg U_{imb};

C_{10} — costul U și al Pu obținut din e.d.c. iradiate în reactor, în lei/kg U_{imb};

t_1 — perioada de extracția minereului de U, în ani;
t_2 — perioada de obținerea U_3O_8 din minereu de U, în ani;
t_3 — perioada de obținerea U_{nat} din U_3O_8, în ani;
t_4 — perioada de obținerea U_{imb} din U_{nat}, în ani;
t_5 — perioada de fabricație a e.d.c. din U_{imb}, în ani;
t_6 — perioada de iradierea combustibilului în reactor, în ani;
t_7 — perioada de „răcire" a combustibilului după descărcarea din reactor, în ani;
t_8 — perioada de transport a combustibilului iradiat de la C.N.E. la uzina de reprelucrare chimică, în ani;
t_9 — perioada de reprelucrare chimică a combustibilului iradiat, în ani;
t_{10} — perioada de depozitare a Pu și U extras prin reprelucrarea chimică a e.d.c. iradiate, în ani;
b — gradul de ardere mediu al combustibilului în reactor, în MW zile/t U;
η_n^{CNE} — randamentul net al C.N.E.

Investițiile specifice în ciclul de combustibil actualizate sînt date de expresia:

$$i_c^* = i_m e^{p_e(t_m+\Delta t_m)} + i_p e^{p_e(t_p+\Delta t_p)} + i_{im} e^{p_e(t_{im}+\Delta t_{im})} + i_f e^{p_e(t_f+\Delta t_f)} + \\ + i_{tr} e^{p_e(t_{tr}+\Delta t_{tr})} + i_{rep} e^{p_e(t_{rep}+\Delta t_{rep})}, \quad (5)$$

unde i_m, i_p, i_{im}, i_f, i_{tr}, i_{rep} și t_m, t_p, t_{im}, t_f, t_{tr}, t_{rep} reprezintă respectiv investițiile specifice și perioadele de construcție pentru minele de uraniu, uzina pentru obținerea U_3O_8 și a uraniului natural, uzina de îmbogățire, uzina de fabricație a e.d.c., mijloacele speciale de transport a combustibilului iradiat și uzina de reprelucrare chimică a combustibilului iradiat, exprimate în lei/kW și ani, iar Δt_m, Δt_p, Δt_{im}, Δt_f, Δt_{tr}, Δt_{rep} diferențele dintre timpul punerii în funcțiune a C.N.E. și timpul de punere în funcțiune a următoarelor întreprinderi ale ciclului de combustibil nuclear: minele de uraniu, uzina pentru obținerea U_3O_8 și a uraniului natural, uzina de îmbogățire, uzina de fabricație a e.d.c., mijloacele speciale de transport a combustibilului iradiat, uzina de reprelucrare chimică a combustibilului iradiat, în ani.

Deducerea ecuațiilor (3), (4) și (5) a fost făcută considerînd pentru actualizare dobînda continuă exprimată prin termenii de forma $e^{p_e \sum_i t_i}$. În cazul luării în considerație a dobîndei compuse, termenii de forma $e^{p_e \sum_i t_i}$ se înlocuiesc peste tot în ecuațiile (3), (4) și (5) cu termeni de forma $(1 + p_e)^{\sum_i t_i}$.

Modelul format din ecuațiile (1)—(5) permite analizarea eficacității ciclurilor de combustibil nuclear a reactorilor nucleari energetici cu neutroni termici. Combustibilul utilizat în reactor poate fi atît uraniul natural, cît și uraniul îmbogățit. Pot fi analizate de asemenea ciclurile de combustibil ale reactorilor rapizi-reproducători.

În cazul în care în cadrul ciclului de combustibil reactorii se consideră cu mai multe încărcături parțiale de combustibil, în toate ecuațiile respective pentru mărimile b și t_6 se introduc valorile corespunzătoare numărului respectiv de încărcături parțiale. Ridicarea numărului de încărcături parțiale conduce în primul rînd la mărirea gradului de ardere al

combustibilului în reactor. Prin schimbarea gradului de ardere are loc de asemenea o variaţie a campaniei reactorului şi deci a perioadei de iradiere a combustibilului în reactor t_6. Numărul de încărcături parţiale K care se adoptă pentru fiecare reactor este funcţie de tipul reactorului şi al ciclului de combustibil, precum şi de indicii tehnici-economici ai acestora.

Modelul prezentat permite astfel să se analizeze influenţa lui K asupra lui Z_c şi deci să se optimizeze mărimile K şi b pentru fiecare tip de reactor. Pentru aceasta trebuie cunoscute în prealabil curbele de variaţie a gradului de ardere în funcţie de timp pentru $K = \text{const}$. Modelul prezentat permite efectuarea analizei influenţei lui Z_c şi deci fundamentarea alegerii tipului de ciclu de combustibil şi al combustibilului pentru un reactor dat. Este posibilă de asemenea optimizarea duratei de iradiere a combustibilului în reactor. Modelul elaborat a fost programat pe calculatorul electronic cifric CIFA-102 al Institutului de energetică al Academiei R.S. România.

În figura 1 se prezintă schema logică a programelor de calcul pe calculatorul cifric al funcţiei pentru Z_c. Programul are două intrări. În cadrul programului 1, în funcţia pentru Z_c, termenii care caracterizează actualizarea sînt de forma $e^{\sum_i t_{ij}}$, iar în programul 2 aceşti termeni se înlocuiesc în toate expresiile prin $(1 + p_c)^{\sum_i t_{ij}}$, în care variabila caracterizează numărul reactorului. În cadrul programului s-au considerat variabile mărimile k, t_{6j}, C_{9j}, C_{10j}, b_{kj}. În programul 1, în celula H s-a depus valoarea p_c, iar în programul 2 s-a depus $\ln(1 + p_c)$. Blocul 6 calculează funcţiile A, B, C şi $i_{cj}^{\cdot\cdot}$ în ecuaţiile în care nu intervin parametri variabili. Funcţiile A, B şi C sînt de forma

$$A = C_{1j}\, t_{2j}\, e^{H\sum_{i=2}^{5} t_{ij}} + (C_{1j} + C_{2j})\, t_{3j}\, e^{H\sum_{i=3}^{5} t_{ij}} + \left(\sum_{i=1}^{3} C_{ij}\right) t_{4j}\, e^{H\sum_{i=4}^{5} t_{ij}} + \\ + \left(\sum_{i=1}^{4} C_{ij}\right) t_{5j}\, e^{Ht_{5j}}, \tag{6}$$

$$B = \sum_{i=1}^{8} C_{ij}, \quad \text{unde } i \neq 6, \tag{7}$$

$$C = C_{1j}\, t_{ij}\, e^{H\sum_{i=1}^{5} t_{ij}} + C_{2j}\, t_{2j}\, e^{H\sum_{i=2}^{5} t_{ij}} + C_{4j}\, t_{4j}\, e^{H\sum_{i=4}^{5} t_{ij}} + C_{5j}\, t_{5j}\, e^{Ht_{5j}}. \tag{8}$$

Blocul 13 compară valoarea lui t_{6j} cu valoarea finală. Operaţiile se continuă în cazul cînd t_{6j} este mai mic sau egal cu valoarea finală, iar în caz contrar se dă transferul la blocul 8.

Blocurile 14 şi 15 calculează funcţiile

$$A_1 = t_{6j}\, e^{-Ht_{6j}},$$

$$A_2 = t_{7j}\, e^{-H\sum_{i=6}^{i=7} t_{ij}},$$

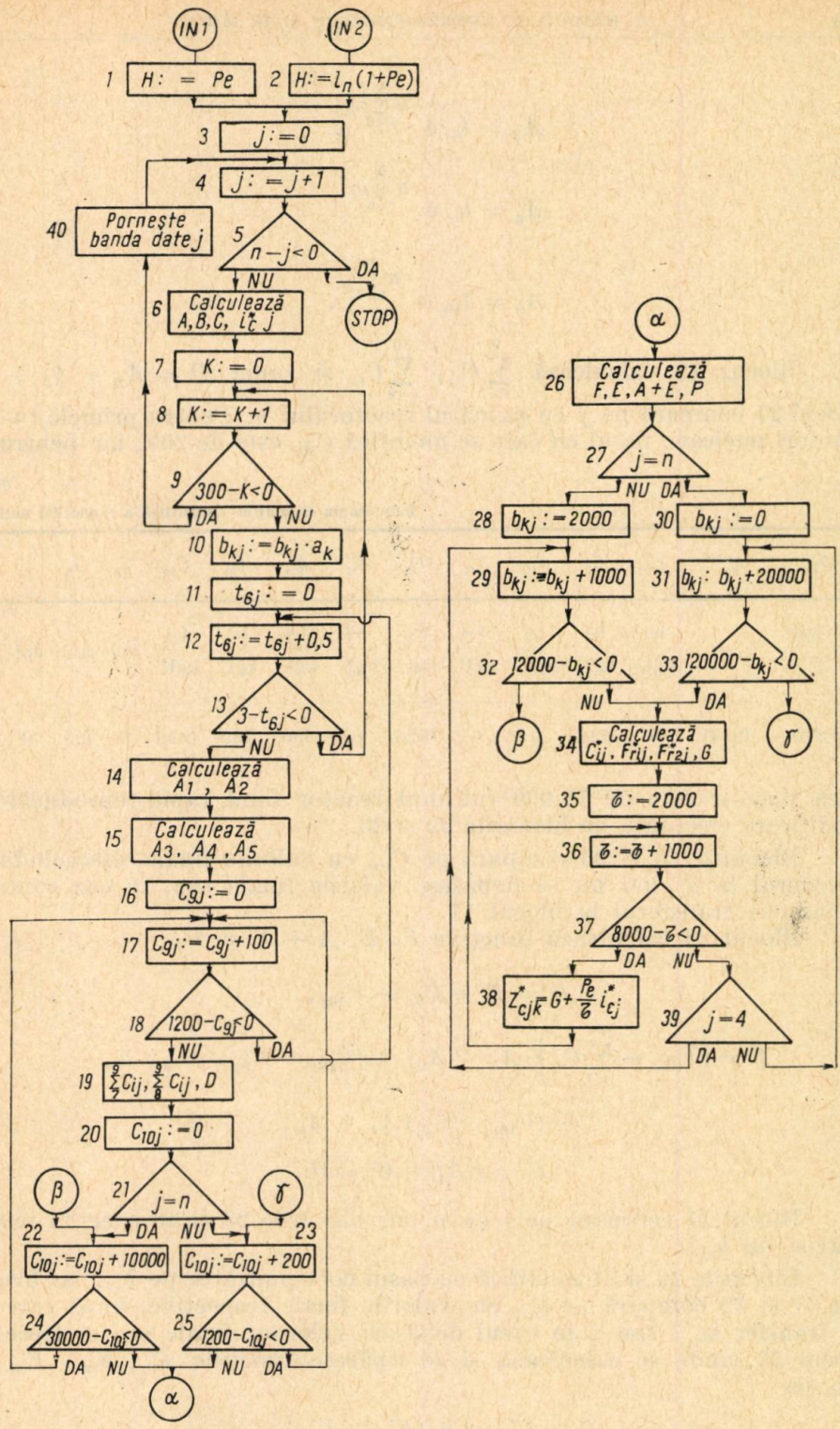


Fig. 1. — Schema logică de calcul a funcției Z_c pe calculatorul electronic cifric CIFA-102.

$$A_3 = t_{8j}\, e^{-H\sum_{i=6}^{8} t_{ij}},$$

$$A_4 = t_{9j}\, e^{-H\sum_{i=6}^{9} t_{ij}}, \tag{9}$$

$$A_5 = t_{10j}\, e^{-H\sum_{i=6}^{10} t_{ij}}.$$

Blocul 19 calculează $\sum_{i=7}^{9} C_{ij}$, $\sum_{i=8}^{10} C_{ij}$ şi suma $D = A_2 + A_3 + A_4$. Blocul 21 compară pe j cu numărul reactorului n. Pentru primele $(n-1)$ reactori nucleari, pasul cu care se modifică C_{10j} este de 200, iar pentru al

Tabela

Date asupra ciclului de combustibil a reactorilor nucleari

b	η_n^{CNE}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_7	C_8	C_9	C_{10}	t_1	t_2	t_3	t_4
MW/zile / t	—	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	lei/kgU	ani	ani	ani	ani
9 300	0,291	0	624	0	0	1626	0	350	739	1020	0	0,5	0	0

n-lea reactor este de 10 000 (ultimul reactor fiind rapid-reproducător), modificare efectuată de blocurile 22 şi 23.

Blocurile 24 şi 25 compară pe C_{10j} cu valorile finale, efectuîndu-se transferul la α cînd nu se depăşesc valorile finale sau, în caz contrar, făcîndu-se transferul la blocul 17.

Blocul 26 calculează funcţiile F, E, $A + E$ şi P:

$$F = B + C_{9j} - C_{10j}, \tag{10}$$

$$E = \left(C_{10j} - \sum_{i=7}^{9} C_{ij}\right)(A_1 + A_2) + (C_{10j} - C_{8j} - C_{9j})\, A_3 +$$

$$+ (C_{10j} - C_{9j})\, A_4 + A_5, \tag{11}$$

$$P = FA_1 + C + D. \tag{12}$$

Blocul 27 compară pe j cu n, iar blocurile 28 şi 30 execută iniţializările lui b_{kj}.

Blocurile 29 şi 31 modifică cu pasul corespunzător pe b_{kj}, iar blocurile 31 şi 32 compară pe b_{kj} cu valorile finale respective, după care se dă transfer la β sau γ în cazul depăşirii valorilor finale sau se trece la blocul 33, unde se calculează şi se tipăresc funcţiile C^*_{cj}, F^*_{r1j}, F^*_{r2j} şi funcţia

$$G = C^*_{cj} + p_e\,(F^*_{r1j} + F^*_{r2j}). \tag{13}$$

În blocurile următoare se calculează pentru şase valori ale lui τ valorile funcţiei

$$Z^*_{cj} = G + \frac{p_e}{\tau} i^*_{cj}, \tag{14}$$

care se tipăresc. În cazul calculării tuturor variantelor posibile pentru un reactor dat, se trece printr-o instrucţiune a programului la pornirea benzii de date (blocul 40) pentru reactorul următor.

Modelul matematic prezentat a fost utilizat la analiza eficacităţii ciclurilor de combustibil pentru diferite tipuri de reactori moderaţi cu apă grea şi pentru un reactor cu neutroni rapizi.

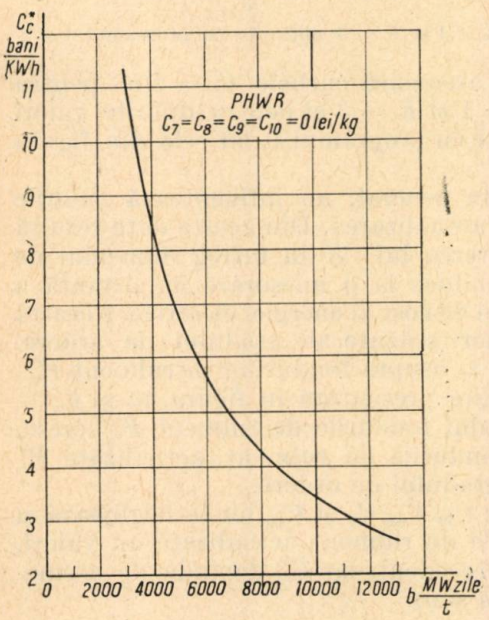
Mai jos se prezintă rezultatele analizei pentru reactori moderaţi cu apă grea de tipul PHWR. Datele luate în calcul pentru condiţiile R.S.România sînt date în tabela 1.

1

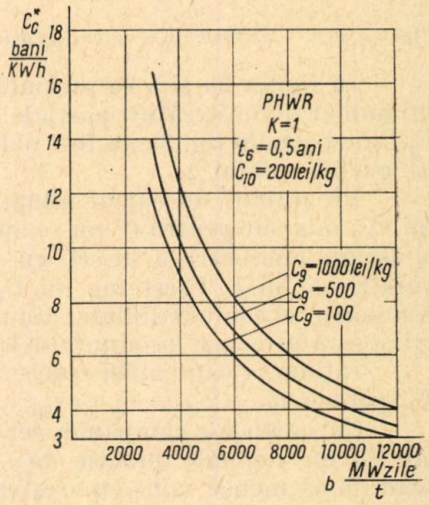
energetici de putere unitară 600 MW$_e$, P.H.W.R.

t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	i_m	i_p	i_m	i_f	i_{tr}	i_{rep}	t_m	t_p	t_{im}	t_f	t_{tr}	t_{rep}	Δt
ani	ani	ani	ani	ani	ani	lei/kW	lei/kW	lei/kW	lei/kW	lei/kW	lei/kW	ani	ani	ani	ani	ani	ani	ani
0,8	1,7	0	0,45	0,65	0	72,7	24,2	0	105	0	323	2	3	0	3	0	4	1

Pe baza acestor date, în figura 2*a* se prezintă curba $C^*_c = f(b)$ pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$ lei/kg şi determinată cu programul 1. Se observă o scădere bruscă a mărimii C^*_c cu creşterea gradului de ardere



a

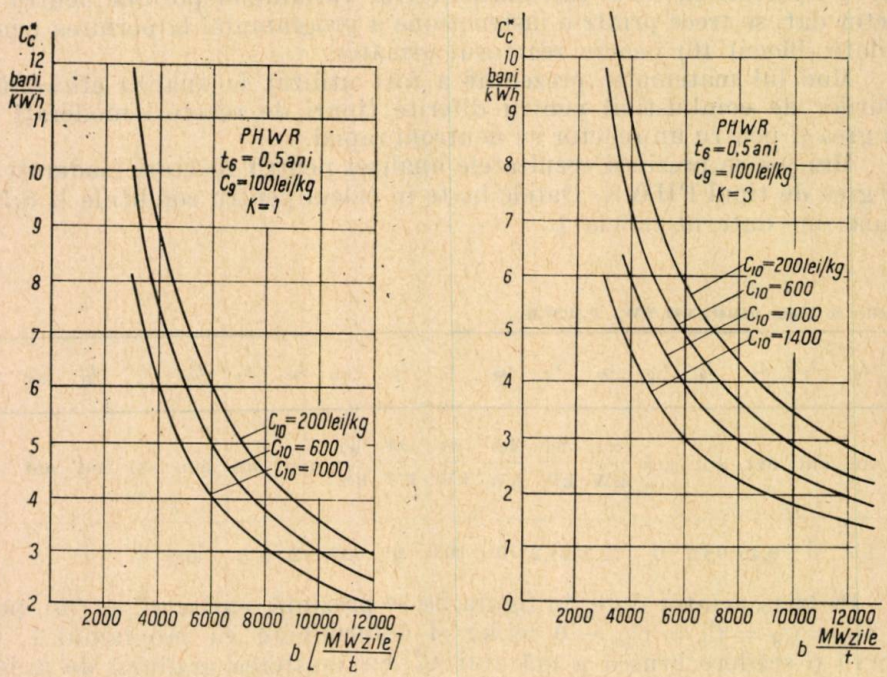


b

Fig. 2 *a* şi *b* — Curbele $C^*_c = f(b)$ pentru reactorul P.H.W.R., obţinute cu programul 1.

al combustibilului în reactor. Pentru valori ale lui b peste 10 000 MW zile/tU, micşorarea lui C_c^* este mai puţin accentuată.

Din figura 2*b* rezultă de asemenea că creşterea lui C_9 conduce la ridicarea valorilor lui C_c^*. Această creştere este mai puţin accentuată pentru valori ridicate ale gradului de ardere.



a *b*

Fig. 3 *a* şi *b*. — Curbele $C_c^* = f(b, C_{10})$ pentru $K = 1$ şi $K = 3$, obţinute cu programul 1 şi 2.

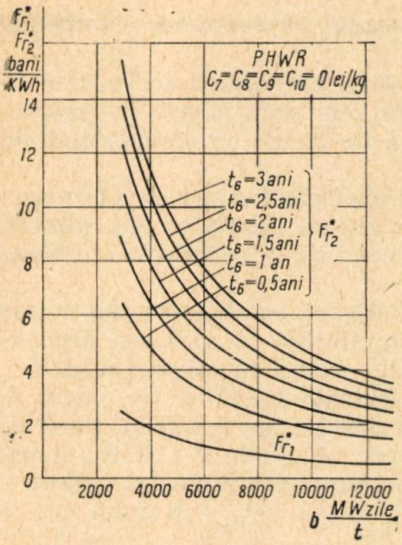
În figura 3*a* şi *b* se prezintă de asemenea curbele $C_c^* = f(b)$ pentru un număr de încărcături parţiale $K = 1$ şi $K = 3$ şi pentru diferite valori C_{10}. Curbele din fig. 3*a* au fost obţinute cu programul 1, iar cele din figura 3*b* cu programul 2.

Programul de calcul adoptat, în general, nu influenţează valorile lui C_c^*, întrucît pentru C_c^* nu se aplică actualizarea. Din aceste date rezultă o uşoară micşorare a lui C_c^* cu creşterea lui K în întreg domeniul de variaţie a lui b. Creşterea lui C_{10} conduce la o micşorare importantă a componentei combustibilului din preţul de cost al energiei electrice. Această micşorare este mai pronunţată la valori scăzute ale gradului de ardere.

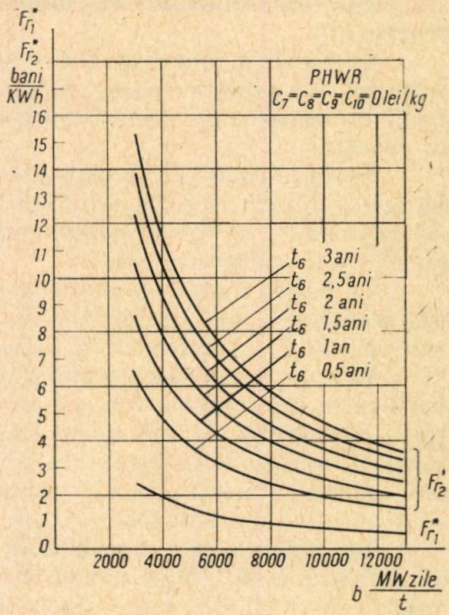
Influenţa campaniei reactorului t_6 asupra fondurilor de rulment $F_{r_1}^*$, $F_{r_2}^*$ pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$ este prezentată în figura 4*a* şi *b*.

Cu creşterea campaniei reactorului fondurile de rulment $F_{r_2}^*$ cresc, iar F_{r1}^* nu depinde practic de t_6. Fondurile de rulment actualizate $F_{r_2}^*$ scad de asemenea mult cu creşterea gradului de ardere.

În cazul cînd valorile mărimilor C_7, C_8, C_9 şi C_{10} nu se neglijează şi au valorile date în tabela 1, fondurile de rulment actualizate au valori, evident, mai ridicate decît în cazul precedent, iar F_{r1}^* depinde de asemenea de campania reactorului (fig. 5 *a* şi *b*).

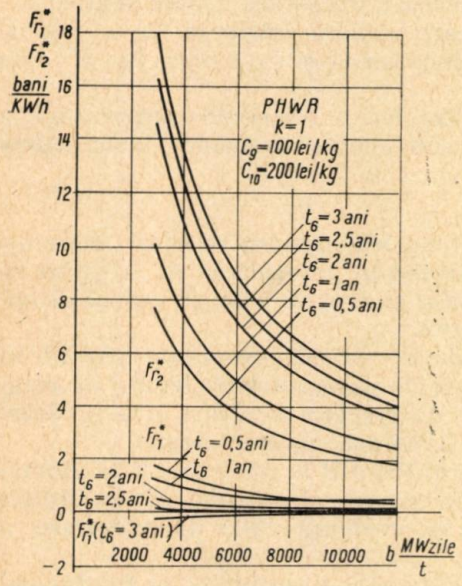


a

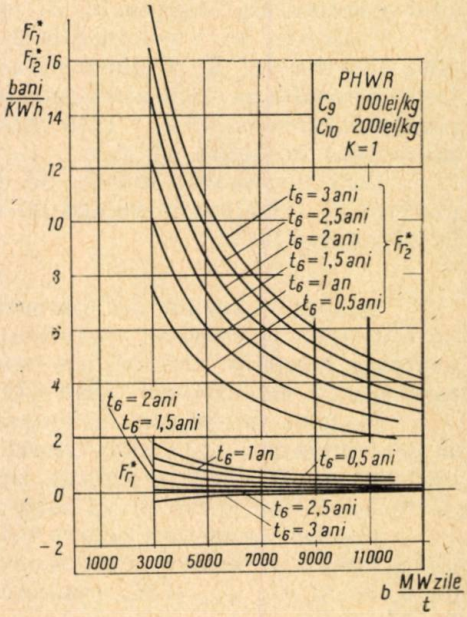


b

Fig. 4 *a* şi *b*. — Variaţia fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ şi $F^*_{r_2}$ pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$, obţinute cu programul 1 şi 2.



a



b

Fig. 5 *a* şi *b*. — Variaţia fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ şi $F^*_{r_2}$ pentru $3 > t_6 > 0{,}5$ ani, $K = 1$, $C_9 = 100$ de lei/kg, $C_{10} = 200$ de lei/kg, calculate cu programele 1 şi 2.

Spre deosebire de $F^*_{r_2}$, mărimea $F^*_{r_1}$ scade cu creșterea campaniei reactorului.

În general, din figura 5 *a* și *b* rezultă că micșorarea fondurilor de rulment actualizate poate fi obținută prin scurtarea campaniei reactorului cu mărirea în același timp a gradului de ardere al combustibilului în reactor.

În figura 6 *a* și *b* se prezintă influența cheltuielilor specifice la reprelucrarea chimică a e.d.c. iradiate în reactor asupra fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ și $F^*_{r_2}$. Creșterea mărimii C_9 conduce în general la creșterea lui $F^*_{r_2}$ și la micșorarea lui $F^*_{r_1}$.

În figura 7 *a* și *b* se prezintă influența costului combustibilului extras din elementele de combustibil C_{10} asupra fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ și $F^*_{r_2}$. Mărimea $F^*_{r_1}$ crește, iar $F^*_{r_2}$ scade cu creșterea lui C_{10}.

Componenta combustibilului din cheltuielile specifice de calcul Z_c variază în mod analog funcție de gradul de ardere (fig. 8 *a* și *b*). Cu creșterea numărului de ore de utilizare a puterii nominale a C.N.E., mărimea Z^*_c scade. Micșorarea lui Z^*_c este mai pronunțată pentru valori τ mai scăzute. Variația lui Z^*_c pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$ și $0{,}5 < t_6 < 3$ ani este dată în figura 9 *a* și *b*.

Se observă că programul de calcul, adică luarea în considerație la actualizare a dobîndei continue sau compuse, practic nu influențează valorile lui Z^*_c. Pentru micșorarea lui Z^*_c este în general necesar să fie micșorată campania reactorului și să fie mărită valoarea gradului de ardere al combustibilului. Influența numărului de încărcături parțiale cu combustibil a reactorului asupra lui Z_c este prezentată în figurile 10 *a*, *b* și *c*.

Creșterea lui τ conduce la o micșorare substanțială a lui Z^*_c. Ridicînd valoarea lui K, obținem de asemenea o micșorare ușoară pentru Z^*_c. De aici rezultă posibilitățile mari pe care le oferă creșterea lui τ, b și K pentru micșorarea lui Z^*_c. Influența mărimilor C_9 și C_{10} asupra lui Z^*_c este prezentată în figura 11 *a*, *b*.

Prin micșorarea valorii lui C_9 are loc o micșorare importantă a mărimii Z^*_c. Ridicarea valorii lui C_{10} conduce de asemenea întotdeauna la micșorarea lui Z^*_c.

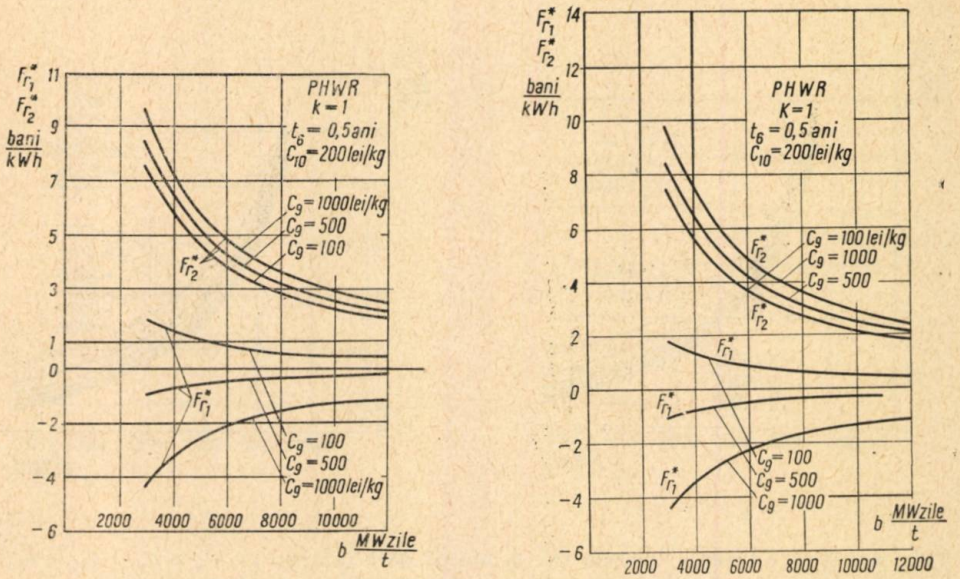
★

Analiza ciclurilor de combustibil nuclear pentru reactori moderați cu apă grea și modelul matematic prezentat au permis să se pună în evidență marile posibilități ale modelului și programelor de calcul elaborate pentru calculatorul cifric CIFA-102.

Modelul matematic și programele de calcul prezentate permit să se determine influența unui număr mare de parametri ai ciclului de combustibil nuclear pentru diferite tipuri de reactori nucleari și a modului de încărcare cu combustibil asupra eficacității acestor cicluri.

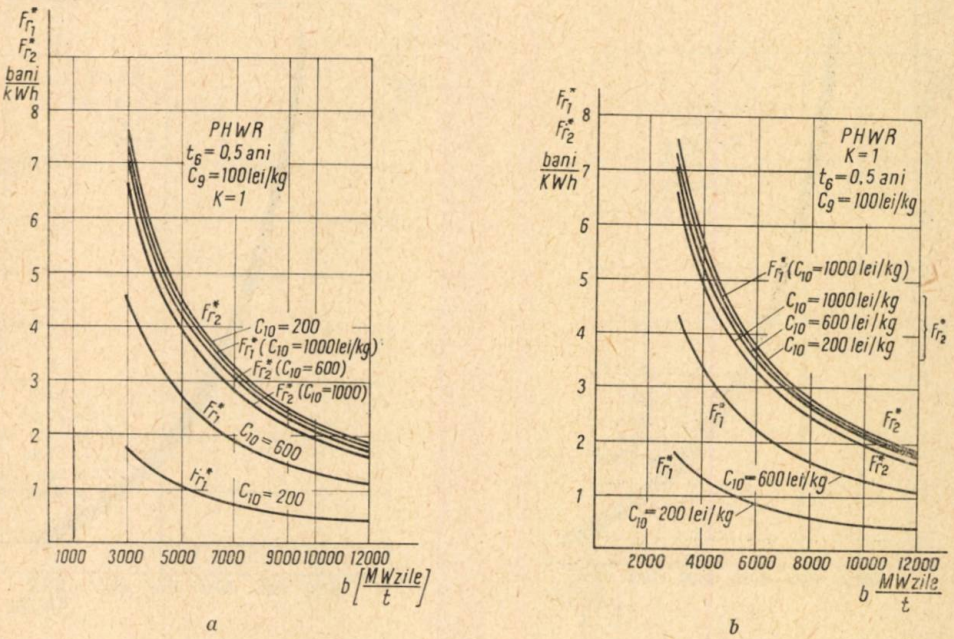
Analiza prezentată pentru reactorul PHWR în condițiile R.S. România a permis să se determine modul de variație al mărimii Z^*_c în funcție de b, τ, t_6, C_9, C_{10} și K, punîndu-se în evidență căile de micșorare a lui Z^*_c.

Modelul matematic și programele de calcul permit să se fundamenteze alegerea gradului de ardere, a campaniei, a numărului de încărcături parțiale și a altor parametri ai ciclului de combustibil pentru diferite tipuri de reactori nucleari energetici.



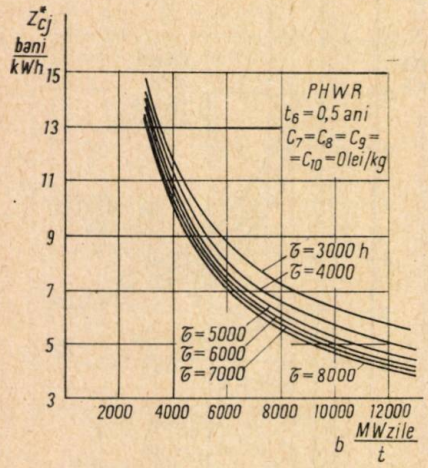
a *b*

Fig. 6 *a* și *b*. — Variația fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ și $F^*_{r_2}$ în funcție de gradul de ardere pentru $100 < C_9 < 1\,000$ de lei/kg, $K = 1$, $t_6 = 0{,}5$ ani, $C_{10} = 200$ de lei/kg, determinate cu programele 1 și 2.

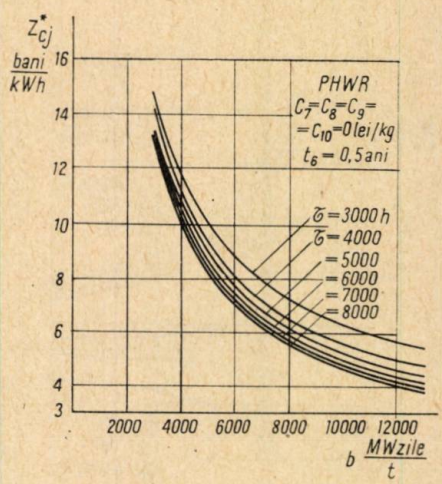


a *b*

Fig. 7 *a* și *b*. — Variația fondurilor de rulment actualizate $F^*_{r_1}$ și $F^*_{r_2}$ în funcție de gradul de ardere pentru $200 < C_{10} < 1\,000$ de lei/kg, $K = 1$, $t_6 = 0{,}5$ ani, $C_9 = 100$ de lei/kg, determinate cu programele 1 și 2.

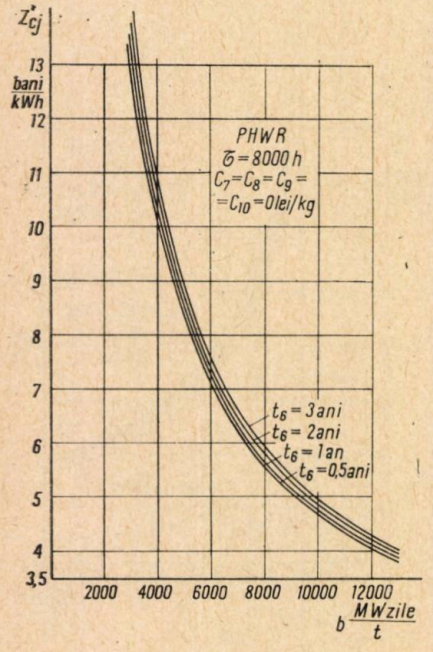


a

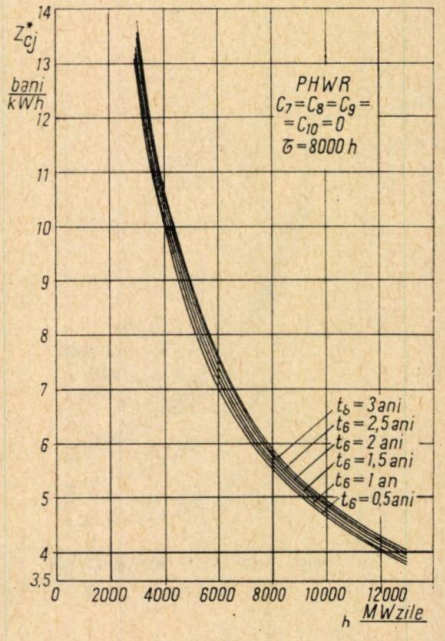


b

Fig. 8 *a* și *b*. — Variația mărimii Z_c^* în funcție de b pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$, $3\,000 < \tau < 8\,000$ și $t_6 = 0,5$ ani, determinate cu programele 1 și 2.

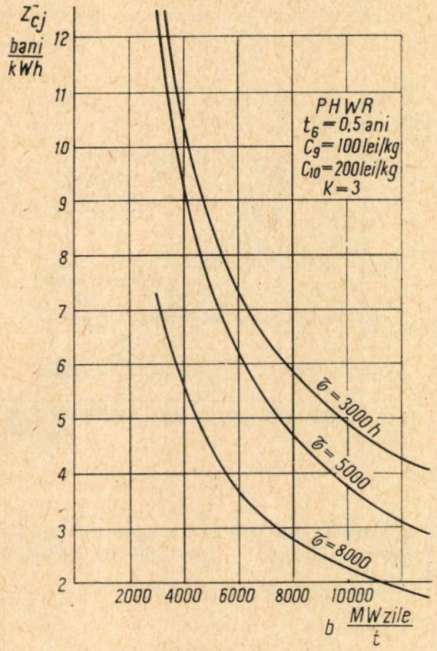


a

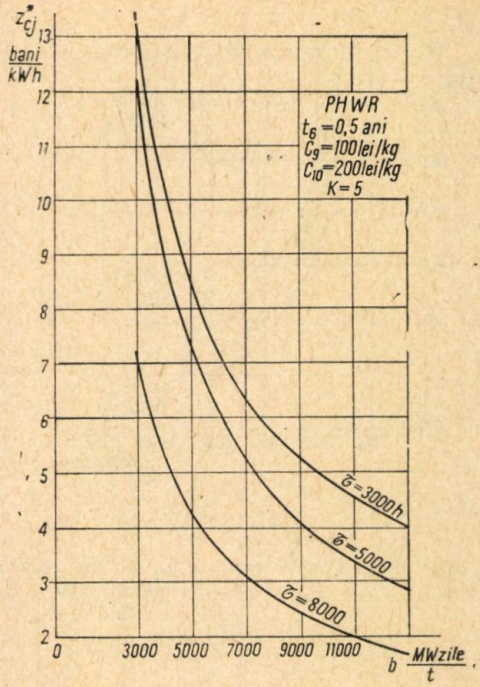


b

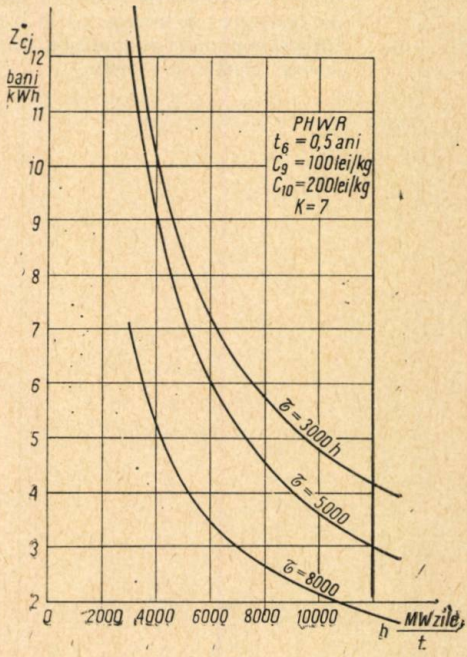
Fig. 9 *a* și *b*. — Variația mărimii Z_c^* în funcție de b pentru $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$, $\tau = 8\,000$ h și $0,5 < t_6 < 3$ ani, determinate cu programele 1 și 2.



a

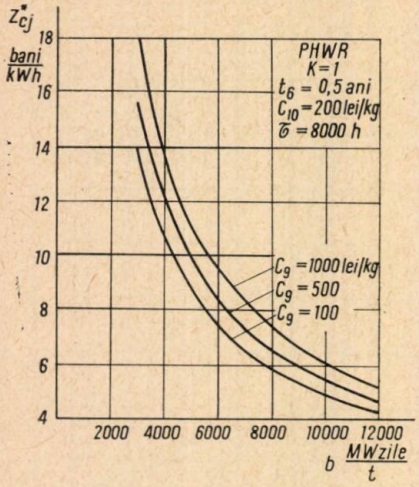


b

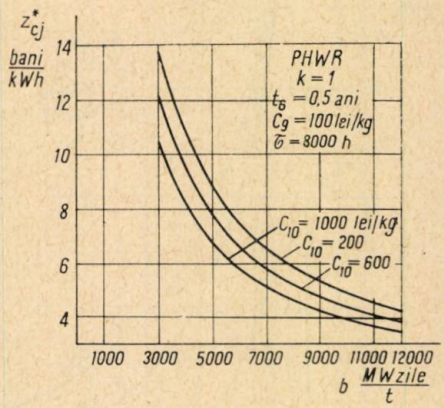


c

Fig. 10 *a*, *b* și *c* — Variația lui Z^*_c în funcție de *b* și τ pentru $C_9 = 100$ de lei/kg, $C_{10} = 200$ de lei/kg, $t_6 = 0{,}5$ ani : $a - K = 3$; $b - K = 5$; $c - K = 7$.



a



b

Fig. 11 *a* şi *b*. — Variaţia lui Z_c^* în funcţie de *b* pentru $\tau = 8\,000$ h; $t_6 = 0{,}5$ ani; $K = 1$: *a* — $C_{10} = 200$ de lei/kg; $100 < C_9 < 1\,000$ de lei/kg; *b* — $C_9 = 100$ de lei/kg; $200 < C_{10} < 1\,000$ lei/kg.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Haiduc, A. Szmuk, *Modelul matematic de analiză a eficacităţii utilizării combustibilului în diferite tipuri de reactori nucleari energetici şi cicluri de combustibil*, memoriu la Institutul de energetică al Academiei R. S. România, 1967.
2. — *Model matematic de analiză a eficacităţii ciclurilor de combustibil nuclear*, St. cerc. energ. electr. *4* (1968).

INFLUENŢA VITEZEI MEDIULUI DE ANTRENARE A SUSPENSIEI SOLIDE ASUPRA FUNCŢIONĂRII FOCARULUI-CICLON ORIZONTAL ÎN REGIM IZOTERMIC BIFAZIC

DE

N. PĂNOIU şi ST. KÓŞA

662.921

Se analizează comparativ funcţionarea focarului-ciclon orizontal în regim monofazic şi bifazic. Se prezintă influenţa vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriilor radiale la diverse concentraţii ale suspensiei solide. Se compară rezultatele teoretice cu cele experimentale şi se prezintă dependenţe exeperimentale privind influenţa vitezei de insuflare a mediului de antrenare asupra unor parametri funcţionali ai ciclonului (debit insuflat, presiune la periferie, grad de separare).

Focarele moderne implică ridicarea continuă a încărcării termice volumetrice. Această tendinţă conduce, conform relaţiei (1), la acelaşi combustibil Q_i^i şi, la acelaşi spaţiu de ardere V_f, la creşterea cantităţii de combustibil B_r:

$$q_v = \frac{B_r Q_i^i}{V_f}. \tag{1}$$

Caracteristicile aerodinamice speciale ale focarelor-ciclon permit menţinerea în suspensie stabilă a unei cantităţi mărite de combustibil [1].

În continuarea cercetărilor efectuate în domeniul distribuţiei suspensiei solide în focarul-ciclon, în prezenta lucrare se prezintă influenţa vitezei mediului de antrenare asupra funcţionării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic bifazic.

Funcţionarea ciclonului în regim bifazic nu atrage modificări esenţiale asupra structurii regimului aerodinamic faţă de funcţionarea în regim monofazic [2]. Zonele caracteristice la funcţionarea în regim monofazic se păstrează şi la funcţionarea în regim bifazic, cu observaţia că se schimbă valorile numerice ale mărimilor respective.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 273–286, 1970

Creșterea concentrației fazei solide conduce la o mărire corespunzătoare a energiei necesare transportului pneumatic și la o reducere a turbionului fluxului portant. Pe de altă parte, energia cinetică a particulelor solide care se consumă în ciocnirea reciprocă a particulelor și în ciocnirea acestora cu pereții focarului reduce în continuare energia fluxului portant [3].

Caracteristic funcționării în regim bifazic este nivelul mai scăzut al vitezelor tangențiale la același debit de fluid și la aceeași geometrie a focarului. Corespunzător scăderii turbionului real din focar se reduce coeficientul de rezistență aerodinamică, se mărește coeficientul de debit, se micșorează presiunea statică la periferia ciclonului central și se modifică într-o oarecare măsură structura cîmpului vitezelor axiale [4].

Pentru a evidenția comparativ funcționarea focarului-ciclon în regim bifazic și în regim monofazic, în figura 1 se prezintă variația coeficientului de conservare a vitezei tangențiale cu variația concentrației fazei solide. Funcționarea în regim monofazic este dată pentru cazul $k = 0$.

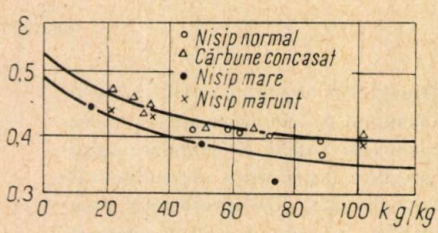


Fig. 1. — Variația coeficientului de conservare a vitezei tangențiale la variația concentrației fazei solide:

$$1)\ \frac{d_e}{D} = 0{,}4\,; \qquad 2)\ \frac{d_e}{D} = 0{,}5.$$

Scăderea vitezei tangențiale și a presiunii statice periferice a ciclonului la funcționarea ciclonului în regim monofazic și în regim bifazic este prezentată în figura 2.

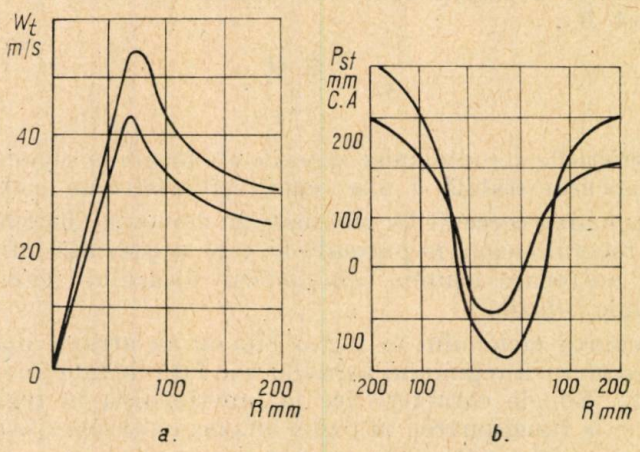


Fig. 2. — Influența fazei solide asupra vitezei tangențiale (a) și a presiunii (b) din volumul focarului-ciclon la funcționarea izotermică: 1) $k = 0$; 2) $k = 0{,}108$ kg/kg.

Funcționarea în regim bifazic a focarului-ciclon este caracterizată prin concentrația k a suspensiei solide în fluxul portant. Conform rezultatelor teoretice și experimentale existente în literatura de specialitate, o serie de mărimi funcționale ale focarului-ciclon în regim bifazic pot fi calculate considerîndu-se mărimile corespunzătoare din regimul monofazic și concentrația fazei solide care caracterizează regimul bifazic. Astfel rezistența aerodinamică a focarului la funcționarea în regim bifazic se poate calcula din aceea a funcționării în regim monofazic cu ajutorul relației

$$\Delta p = \zeta_0 \frac{\rho w_t^2}{2} (1 - a\zeta_0 \sqrt{k}). \tag{2}$$

Similar, viteza tangențială a fluxului portant la funcționarea în regim bifazic are expresia

$$w_t^* = ak^n w_t. \tag{3}$$

Dacă se face ipoteza că în volumul focarului-ciclon care funcționează în regim izotermic bifazic se mișcă o suspensie solidă monodispersă cu diametrul echivalent d_e, greutatea specifică γ_2 și o formă oarecare, ecuația traiectoriei radiale a acestei particule considerată că se mișcă fără ciocniri cu alte particule are forma

$$m \frac{dw_r}{d\tau} = \frac{m(ak^n)^2 w_t^2}{r} - CF \frac{w_r^2}{2g} \gamma. \tag{4}$$

Pentru simplificarea rezolvării se introduce relația Stokes pentru coeficientul de rezistență :

$$C = \frac{24}{R_e^*}, \tag{5}$$

în care

$$R_e^* = \frac{w \varphi d_e}{S},$$

unde

φ este factorul de formă, dat de relația

$$\varphi = \frac{4{,}84\ V_p}{S}. \tag{6}$$

Cu aceste precizări, ecuația (4) devine

$$\frac{m(ak^n)^2 w_t^2}{r} - \frac{24\ \nu}{\varphi d_e w_r} F \frac{w_r^2}{2g} \gamma = m \frac{dw_r}{d\tau}. \tag{7}$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$(ak^n)^2 \frac{w_t^2}{r} + \frac{18\nu}{\varphi d_e^2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_p} w_r = \frac{dw_r}{d\tau}. \tag{8}$$

Dacă se face înlocuirea

$$w_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{9}$$

ecuaţia (8) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{18\nu}{\gamma d_e^2}\frac{\gamma}{\gamma_p}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} - \frac{(ak^n)^2 w_t^2}{r} = 0. \tag{10}$$

Relaţia (10) are două domenii de existenţă :

— domeniul în care mişcarea fluidului are caracter cvasisolid şi în care se poate scrie relaţia

$$w_t = \omega r. \tag{11}$$

Dacă se introduce dependenţa (11) în relaţia (10), se obţine ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_e^2}\frac{\gamma}{\gamma_p}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} - (ak^n)^2 \omega^2 r = 0\,; \tag{12}$$

— domeniul în care mişcarea fluidului are caracter cvasipotenţial şi în care se poate scrie relaţia

$$w_t r = \text{const.} \tag{13}$$

Introducînd relaţia (13) în ecuaţia (10), după o serie de calcule se obţine

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{18\nu}{\varphi d_e^2}\frac{\gamma}{\gamma_p}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} - \frac{ak^n w_t^2 r_t^2}{r^3} = 0. \tag{14}$$

Integrarea ecuaţiilor (12) şi (14) pentru cele două domenii de existenţă ale funcţiei (10) conduce la determinarea traiectoriei unei particule solide care se mişcă într-un flux cu suspensii de praf de concentraţie k a suspensiei solide monodisperse în ipoteza că particula studiată nu suferă ciocniri cu alte particule solide din flux cu care să schimbe energie [5].

Influenţa vitezei mediului de antrenare W_t a fluidului portant intervine în ecuaţia traiectoriei suspensiei solide prin intermediul vitezei unghiulare ω, relaţia (12), respectiv direct în ecuaţia (14). Calculul influenţei vitezei mediului de antrenare asupra timpului de separare a suspensiei solide s-a făcut prin modelarea ecuaţiilor (12) şi (14) pe calculatorul analogic MECAN-II al Institutului de energetică al Academiei R.S. România *) [6] pentru următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} &k \approx 0, && \gamma = 1{,}293 \text{ kg/m}^3, \\ &d_e = 5 \text{ mm}, && D = 0{,}5 \text{ m}, \\ &\varphi = 1, && \\ &\gamma_p = 1\,400 \text{ kg/m}^3, && C = \frac{24}{R_e^*}, \end{aligned} \tag{15}$$

*) Calculele efectuate de T. Băjănescu

în conformitate cu metodica dată în [6].

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (12) și (14), înregistrate pe calculatorul analogic, sînt prezentate în figura 3.

Rezultatele arată o variație a traiectoriilor radiale și a timpilor de separare a suspensiei solide, în dependență evidentă de viteza de insu-

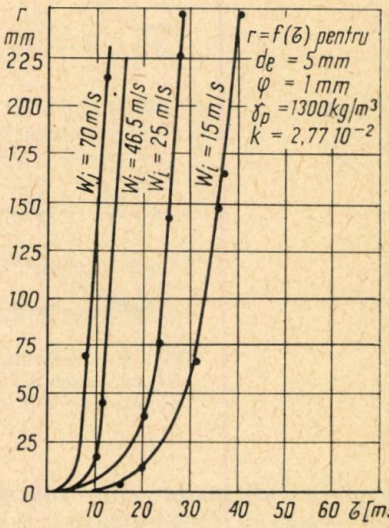


Fig. 3. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra traiectoriei și timpului de separare a suspensiei solide în volumul focarului-ciclon (valori calculate pentru $k \approx 0$).

flare a fluidului portant în volumul focarului-ciclon. Din analiza rezultatelor reiese că, la o creștere a vitezei de insuflare a fluidului portant de la 15 la 70 m/s, timpul de separare a suspensiei solide scade de la 39 la 12 ms [7]. Rezultatele calculelor efectuate sînt în corespondență ca alură și ca valori cu rezultatele teoretice obținute de Basina și Tonkonoghi [8].

În vederea verificării rezultatelor obținute prin calcul s-au efectuat o serie de cercetări experimentale pe un model izotermic de focar-ciclon orizontal [6], cu următoarele caracteristici geometrice și funcționale:

$$\frac{L}{D} = 0{,}8, \quad \frac{F_i}{F_e} = 0{,}46, \quad \frac{D_e}{D} = 0{,}4, \text{ aer primar} = 0\%,$$

$$R_i = 215 \text{ mm}. \tag{16}$$

Drept suspensie solidă s-au folosit particule de formă sferică ($\varphi = 1$), cu greutatea specifică $\gamma_p = 1\,400$ kg/m³.

Particulele au fost lansate în partea centrală a focarului-ciclon cu ajutorul unei sonde electromagnetice sincronizate cu un aparat de filmare ultrarapidă, Pentazet-35. Înregistrarea traiectoriilor particulelor s-a făcut la viteza de filmare de 750 de cadre/s pe pelicula cinematografică "ORVO" DIN-27° [9].

Prelucrarea peliculei cinematografice a permis stabilirea grafică a traiectoriei particulelor suspensiei solide. Pe baza rezultatelor prelucrării, în figura 4 se prezintă influența vitezei de insuflare a fluidului de antrenare a suspensiei solide asupra traiectoriei și timpului de separare a particulelor sferice cu diametrul $d_e = 5$ mm și greutatea specifică $\gamma_p = 1\,400$ kg/m³.

Se observă că, în aceste condiții, la creșterea vitezei de insuflare a fluidului portant a suspensiei solide de la 15,2 la 30,4 m/s timpul de separare a suspensiei solide se reduce de la 133 la 60 ms.

În vederea verificării concluziilor teoretice și a obținerii unor rezultate experimentale privind influența vitezei mediului de antrenare a sus-

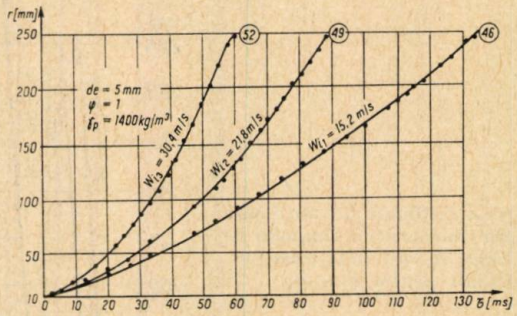


Fig. 4. — Influența vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriilor și timpului de separare a suspensiei solide pentru $k \approx 0$, $d_e = 5$ mm, $\gamma_p = 1\,400$ kg/m³ și $\varphi = 1$.

pensiei solide asupra unor mărimi funcționale ale focarului-ciclon în condițiile creșterii concentrației fazei solide, s-au efectuat cercetări experimentale, folosindu-se același model de focar-ciclon orizontal cu alimentare axială cu combustibil.

Lansarea probei de suspensie solidă s-a făcut cu o sondă electromagnetică sincronizată cu aparatul de filmat Pentazet-35, înregistrîndu-se pe peliculă traiectoriile particulelor lansate în fluxul portant.

Astfel, în figura 5 se prezintă rezultatele experimentale privind influența concentrației fazei solide asupra traiectoriilor radiale și a timpilor de separare pentru suspensia solidă cu diametrul echivalent $d_e = 5$ mm și greutatea specifică $\gamma_p = 911$ kg/m³ și factorul de formă $\varphi = 0{,}866$, la o viteză a mediului de antrenare $W_i = 25{,}5$ m/s [10]. Această influență s-a analizat și teoretic, rezultatele obținute pe calculatorul MECAN-2 fiind prezentate în figura 6.

Influența vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriei radiale și a timpilor de separare la diverse concentrații ale suspensiei solide pentru suspensia solidă având diametrul echivalent $d_e = 5$ mm, greutatea specifică $\gamma_p = 911$ kg/m³ și factorul de formă $\varphi = 0{,}866$ este dată în figura 7.

Din rezultatele teoretice și experimentale prezentate în figurile 5, 6 și 7 se trage concluzia că cu creșterea vitezei mediului antrenare se păstrează alura generală a traiectoriilor particulelor și se reduce timpul de separare, iar cu creșterea concentrației combustibilului se păstrează alura generală a traiectoriilor radiale și se mărește timpul de separare.

S-a analizat de asemenea influența greutății specifice a suspensiei solide asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare a suspensiei solide, rezultatele fiind prezentate în figura 8 pentru suspensia solidă cu $d_e = 2{,}75$ mm la o viteză a mediului de antrenare $W_i = 25{,}5$ m/s [11].

Fig. 5. — Influența concentrației fazei solide asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare a suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 5$ mm, $\gamma_p = 911 \frac{kg}{m^3}$ și $\varphi = 0{,}866$ (valori experimentate).

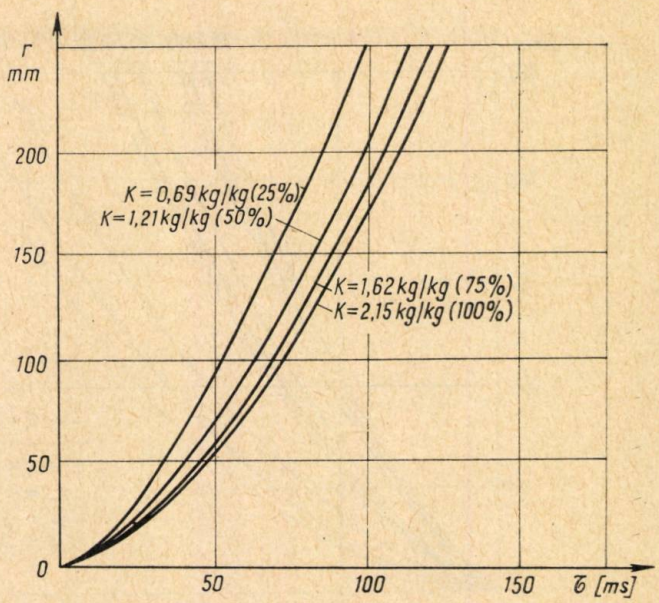
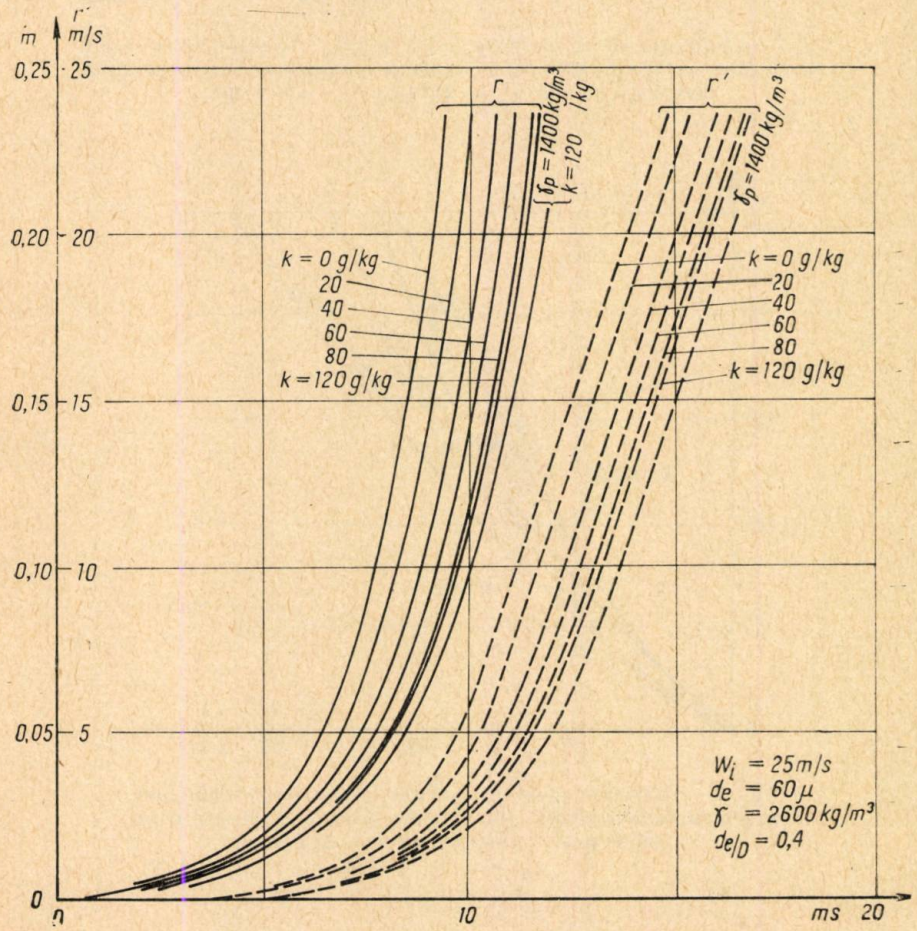


Fig. 6. — Influența concentrației k și a greutății specifice γ_p a fazei solide asupra traiectoriilor r, a vitezelor r' radiale și a timpilor de separare a suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 60\ \mu$, $\gamma_p = 2\,600$ kg/m³ (date calculate).



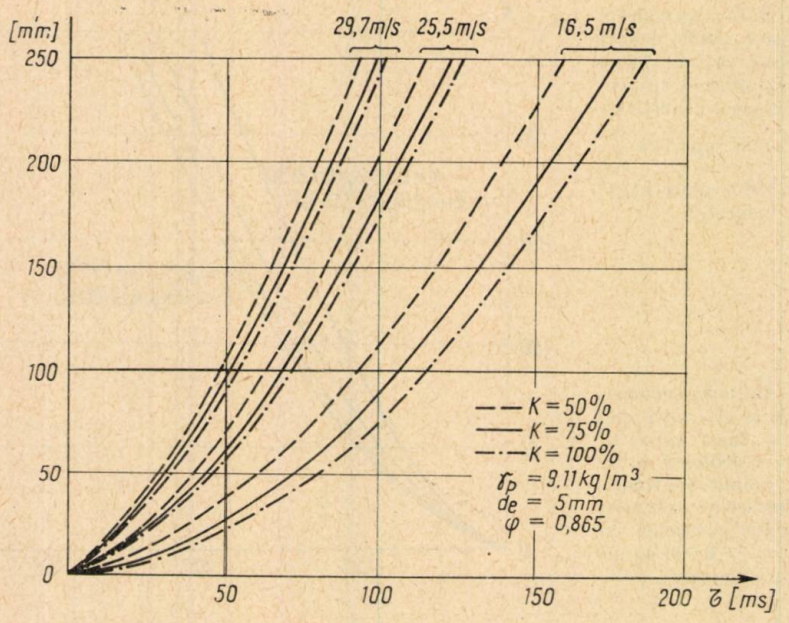


Fig. 7. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra traiectoriilor radiale și a timpilor de separare a suspensiei pentru particule având $d_e = 5$ mm, $\gamma_p = 911$ kg/m³ și $\varphi = 0{,}866$.

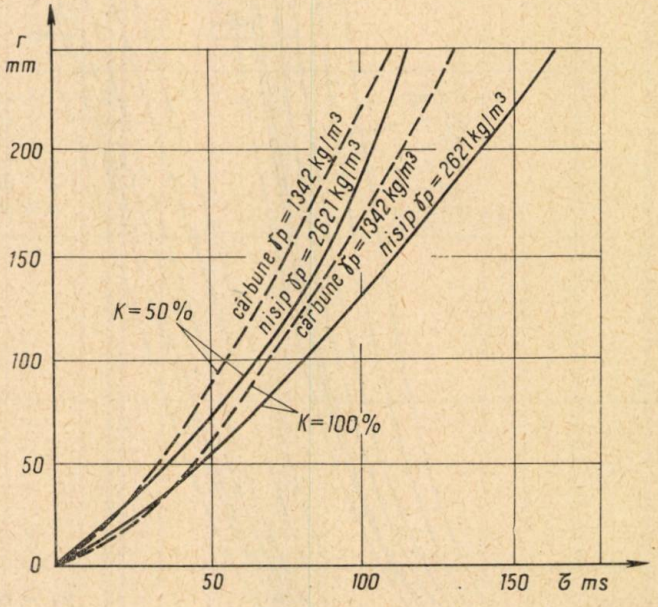


Fig. 8. — Influența greutății specifice a suspensiei solide asupra traiectoriilor radiale și a timpilor de separare a suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 2{,}75$ mm.

În figura 9 se prezintă influența vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare a suspensiei solide pentru suspensia solidă cu $d_e = 2{,}75$ mm, și $\gamma_p = 2\,621$ kg/m^3.

Analizînd rezultatele din figura 8 și comparativ cele din figurile 7 și 9, se poate trage concluzia că cu creșterea greutății specifice a suspensiei solide se păstrează alura generală a traiectoriilor radiale și crește timpul de separare a suspensiei solide, această influență păstrîndu-se la toate vitezele cercetate ale mediului de antrenare.

Pentru a avea posibilitatea extinderii rezultatelor privind influența vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare a suspensiei solide, în figura 10 se prezintă influența diametrului echivalent asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare a suspensiei solide pentru o concentrație a fazei solide de 2,15 kg/kg și $\gamma_p = 1\,342$kg/m^3.

Este de menționat o scădere a timpilor de separare cu creșterea diametrului echivalent a suspensiei solide. În continuarea cercetărilor experimentale s-a analizat influența vitezei mediului de antrenare asupra debitului de fluid portant insuflat în ciclon, a presiunii statice la periferia ciclonului și a gradului de separare a suspensiei solide în volumul ciclonului.

În figura 11 se prezintă influența vitezei mediului de antrenare asupra creșterii relative a debitului insuflat în ciclon la diverse concentrații ale suspensiei solide cu diametrul echivalent $d_e = 2{,}75$ mm, respectiv greutatea specifică $\gamma_p = 2\,621$ kg/m^3.

Este de observat creșterea debitului raportat cu creșterea concentrației combustibilului și cu creșterea vitezei de insuflare. Diagrama arată că perturbațiile produse de prezența suspensiei solide sînt cu atît mai resimțite, cu cît vitezele din ciclon au valori mai ridicate. Pentru a fi posibil să se calculeze această influență și pentru alte condiții funcționale, în figura 12 se prezintă influența concentrației k, a diametrului echivalent d_e și a greutății specifice γ_p a suspensiei solide pentru viteza mediului de antrenare $W_i = 25{,}5$ m/s asupra creșterii debitului insuflat în ciclon.

În figura 13 se prezintă influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra variației relative a presiunii statice la periferia ciclonului la diverse concentrații ale suspensiei solide cu diametrul echivalent $d_e = 2{,}75$ mm și greutatea specifică $\gamma_p = 2\,621$ kg/m^3.

Rezultatele prezentate confirmă rezultatele din figura 11, în sensul că reducerea presiunii la periferia ciclonului crește cu creșterea vitezei mediului de antrenare și cu concentrația combustibilului, efectul acesteia fiind cu atît mai puternic cu cît vitezele în ciclon sînt mai mari.

Pentru a fi posibil să se calculeze această influență și pentru alte condiții funcționale, în figura 14 se prezintă influența concentrației k, a diametrului echivalent d_e și a greutății specifice γ_p a suspensiei solide pentru viteza mediului de antrenare $W_i = 25{,}5$ m/s asupra scăderii presiunii statice la periferia ciclonului.

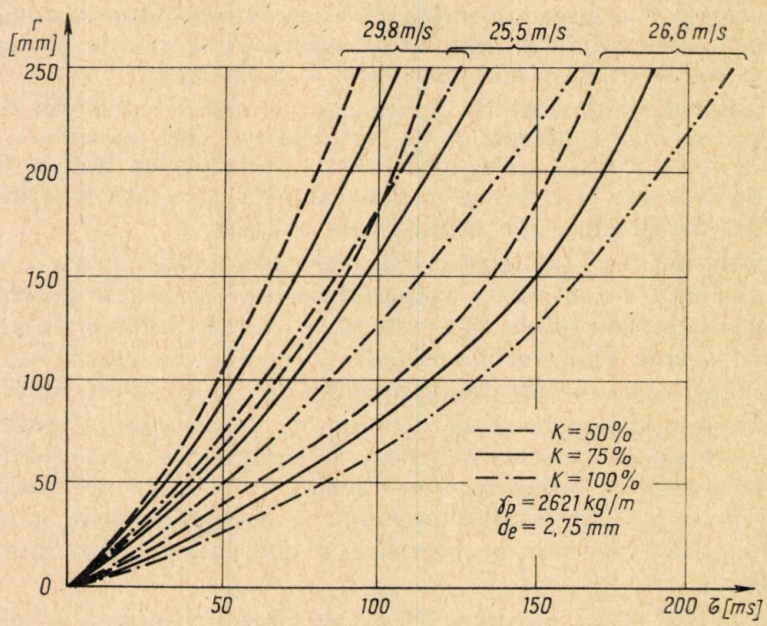


Fig. 9. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra traiectoriilor radiale și a timpilor de separare a suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 2{,}75$ mm, $\gamma_p = 2\,621$ kg/m³.

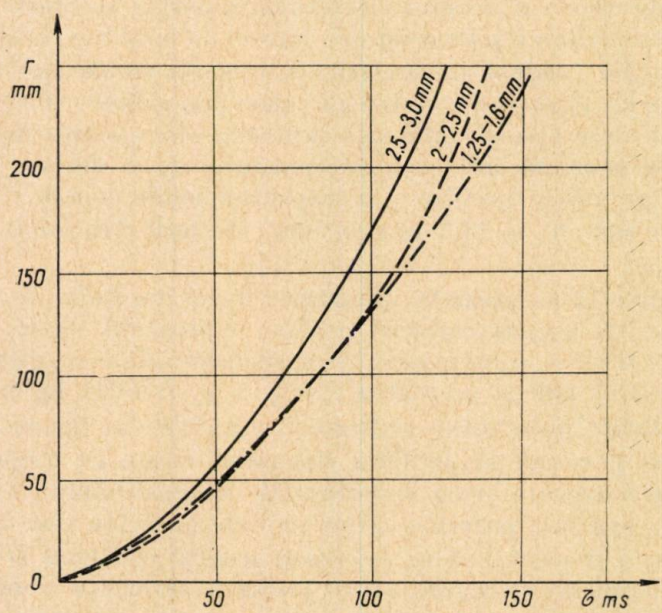


Fig. 10. — Influența diametrului echivalent al particulelor suspensiei solide asupra traiectoriilor radiale și timpilor de separare pentru particule cu $\gamma_p = 1\,342$ kg/m³.

S-a analizat de asemenea influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra gradului de separare a suspensiei solide în volumul focarului. În figura 15 se prezintă rezultatele obținute pentru diverse concentrații K ale suspensiei solide cu diametrul echivalent $d_e = 2{,}75$ mm și greutatea specifică $\gamma_p = 2\,621$ kg/m³.

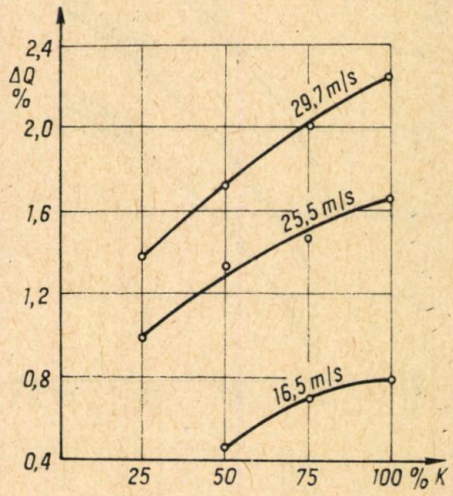


Fig. 11. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra creșterii relative a debitului de insuflat în focarul-ciclon la diverse concentrații ale suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 2{,}75$ mm, și $\gamma_p = 2\,621$ kg/m³.

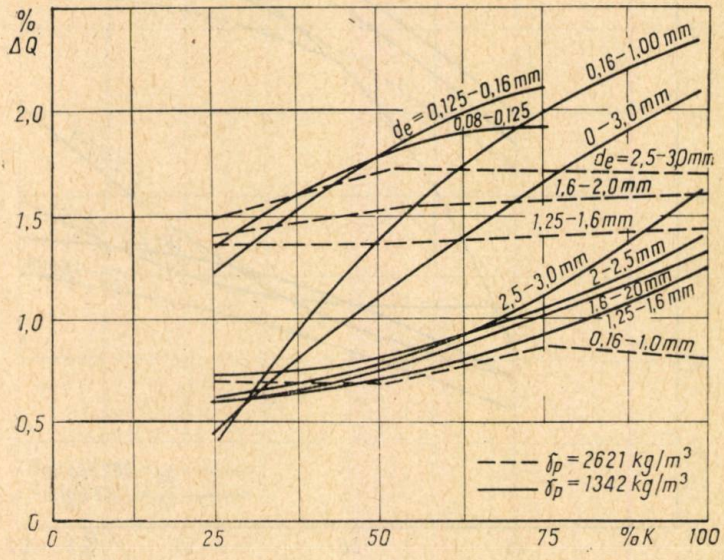


Fig. 12. — Influența concentrației k, a diametrului echivalent d_e și a greutății specifice γ_p a suspensiei solide asupra creșterii relative a debitului insuflat în focarul-ciclon.

Rezultatele din diagramă arată o creștere a gradului de separare de pînă la 90% la viteza de 16,5 m/s și concentrația de 75%, după care se pare că se înregistrează o ușoară scădere, așa cum se arată și în lucrarea [11]. Creșterea vitezei de antrenare a mediului de la 16,5 la 29,7 m/s

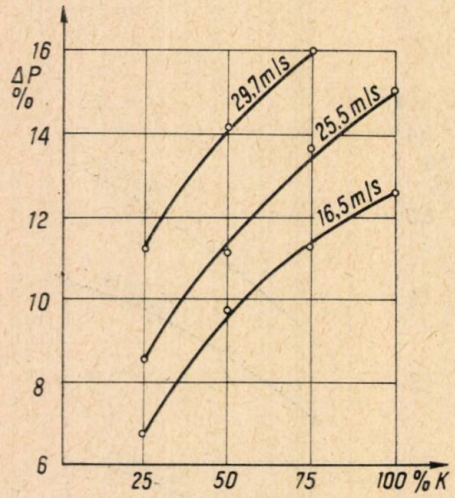


Fig. 13. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra variației relative a presiunii statice la periferia ciclonului la diverse concentrații ale suspensiei solide pentru particule cu $d_e = 2{,}75$ mm, și $\gamma_p = 2\,621$ kg/m³.

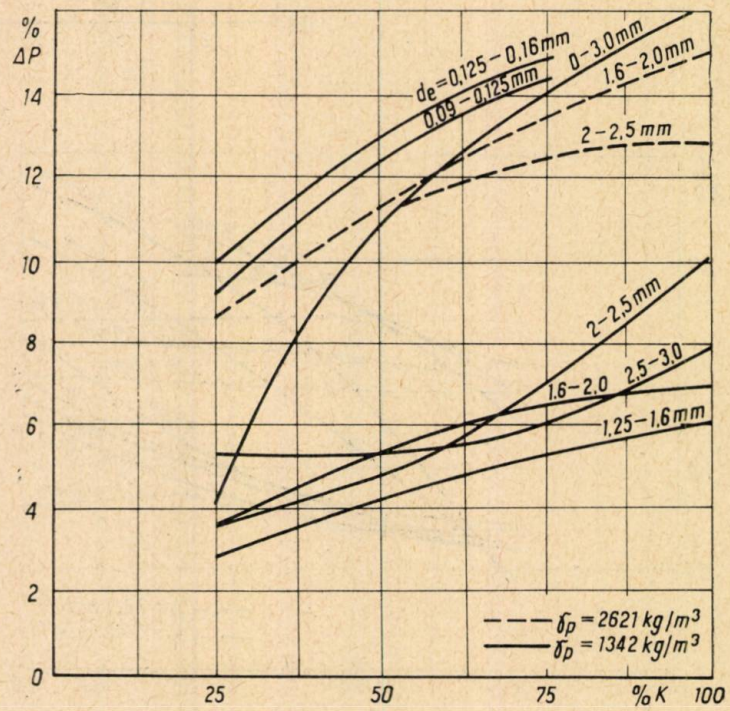


Fig. 14. — Influența concentrației k, a diametrului echivalent d_e și a greutății specifice γ_p a suspensiei solide asupra scăderii relative a presiunii statice la periferia ciclonului.

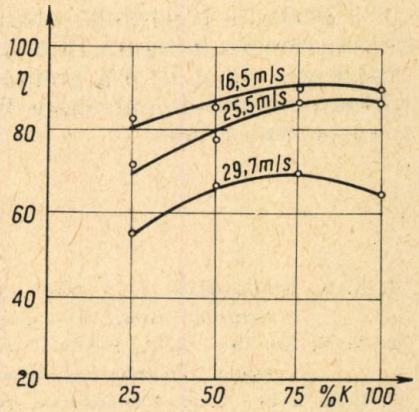


Fig. 15. — Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra gradului de separare a ciclonului la diverse concentrații ale fazei solide pentru particule cu $d_e = 2.75$ mm și $\gamma_p = 2\,621$ kg/m³.

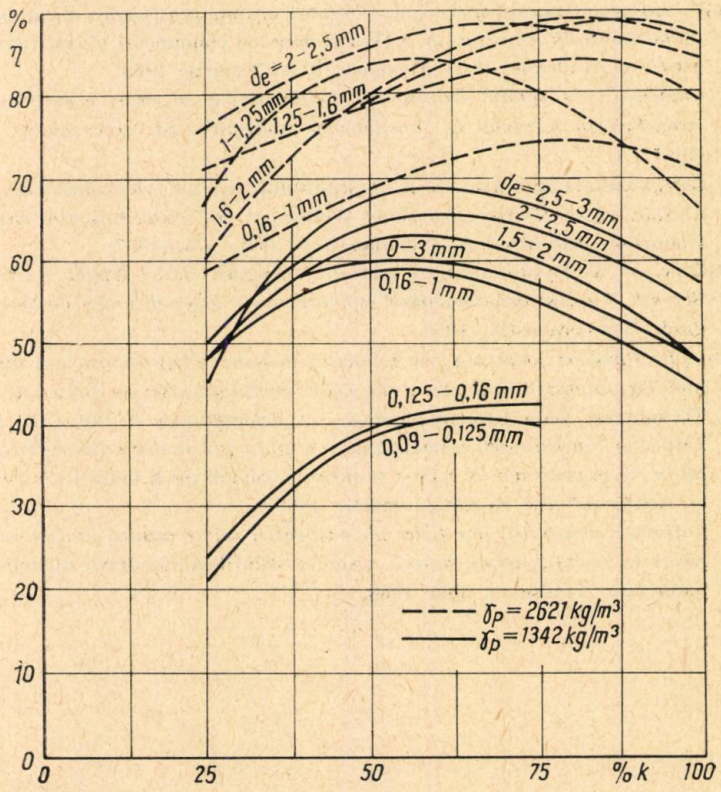


Fig. 16. — Influența concentrației k, a diametrului echivalent d_e și a greutății specifice γ_p a suspensiei solide asupra gradului de separare a focarului-ciclon.

conduce la o reducere substanţială a gradului de separare ca urmare a antrenării mai puternice.

Pentru a fi posibilă calcularea acestei influenţe şi pentru alte condiţii funcţionale, în figura 16 se prezintă influenţa concentraţiei k, a diametrului echivalent d_e şi a greutăţii specifice γ_p a suspensiei solide pentru viteza mediului de antrenare $W_i = 25{,}5$ m/s asupra gradului de separare a suspensiei solide.

BIBLIOGRAFIE

1. A. K. Nahapetian, I. S. Isaev, *O nekotorih assobennostiah ţiklonnovo potoka nesuşcevo tverdium vzvesi*, Teploenerghetika, *9*, 32—40 (1957).
2. A. N. Kozuhin, J. A. Erşov, *O vlieanii tviordoi fazi na aerodinamiki potoka i saprotivlenie ţiklonnih apparatov*, Teploenerghetika, *1*, 18—20 (1962).
3. I. S. Isaev, A. K. Nahapetian, *Issledovanie strukturi zapilennogo izotermiceskovo potoka v ţilonnoi kamere*, III Vsesoiuznoe soveşcianie po teorii goreniia, Moskva, 1960, p. 289—294.
4. G. F. Knorre ş.a. *Teoria topocinih proţesov*. Moskva-Leningrad, Izd. „Energhia" 1966.
5. N. Păноiu, *Influenţa concentraţiei combustibilului asupra funcţionării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic*, A XIV-a sesiune de comunicări a Institutului de energetică al Academiei R. S. România, 21—23 martie 1968.
6. — *Contribuţii la studiul traiectoriei şi timpului de separare a suspensiei solide în focarul-ciclon orizontal la funcţionarea izotermică*, St. cerc. energ., *4*, 851—868 (1967).
7. — *Geschnondigkeitseinfluss der Mitfuhrmediums auf die Absdeidezeit des Festen Suspension nider Horizontalenzyklon feureungen bei isothermischen Betrieb*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, *4*, 669—675 (1967).
8. P. O. Basina, V. A. Tonkonoghi, *O gorenii i separaţii ciastiţ topliva v ţiklonnoi topke. Sbornik. Voprosi aerodinamiki i teploperedaci v kotelnih proţessah*,Moskva—Leningrad, Gosenergoizdat, 1958.
9. N. Păноiu, *Einfluss der phisikalischen Kennzeichen fester Suspensionen auf die Trajektorie und Trennungszeit in Horizontalen Zykloneuerungen*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie Electrotechniques et Energetiques *2*, 291—310 (1967).
10. — *Influenţa concentraţiei combustibilului asupra funcţionării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic*, A XIV-a sesiune de comunicări a Institutului de energetică al Academiei R.S.România, martie 1968.
11. — *Influenţa caracteristicilor fizice ale suspensiei solide asupra funcţionării focarului-ciclon în regim izotermic bifazic*, sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice Institutul politehnic Timişoara, mai 1968.

INTERDEPENDENŢA DINTRE PARAMETRII STRUCTURALI ŞI CARACTERISTICILE ENERGETICE ALE COMBUSTIBILILOR SOLIZI

DE

C. COROIU

662.921

În lucrare se tratează interdependenţa dintre parametrii structurali şi caracteristicile energetice ale combustibililor solizi.
Se propune introducerea unor parametrii structurali care să ţină cont de natura grupelor funcţionale oxigenate şi un mod de reprezentare a masei organice a combustibililor solizi prin formule chimice structurale raportate. De asemenea se propune o diagramă pentru calcularea coeficientului λ din ecuaţia lui Van Krevelen pentru căldura de combustie, ceea ce conduce la creşterea preciziei calculelor.

Stadiul actual al cercetărilor de structură, şi în primul rînd datele oferite de spectroscopia în infraroşu, X, R.E.P. şi R.E.S., permite clasificarea cărbunilor în trei tipuri structurale succesive :

— o structură humică (turbele şi ligniţii în general), cu nuclee aromatice izolate sau puţin condensate, puternic legate între ele prin substanţa nearomatică ;

— o structură metaplastică (huilele în general), constituită din nuclee aromatice condensate, legate între ele prin punţi de legătură în general eterice care permit depolimerizarea la încălzire urmată de reticularea prin condensare şi polimerizare ;

— o structură de hidrocarbură policiclică condensată, cu un înalt grad de condensare specifică huilelor slabe şi antraciţilor. Substanţa nearomatică oxigenată este aproape integral dispărută, iar hidrogenul este legat de carbonul periferic al lamelelor. Atomii de oxigen reziduali formează punţi între lamelele suprapuse, care conferă o mare rezistenţă reţelei.

Aceasta ar fi o caracterizare calitativă a structurii cărbunilor.

O caracterizare cantitativă este posibilă cu ajutorul parametrilor structurali şi ar permite stabilirea pe această bază a unor ecuaţii pentru calculul caracteristicilor energetice şi a altor funcţii termodinamice.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 287—297, 1970

Fie un combustibil solid caracterizat prin C, O, H, S, N conținutul procentual gravimetric de carbon oxigen, hidrogen, sulf și azot, exprimat la masa organică.

Cu aceste date se pot defini rapoartele

$$n_C = \frac{C}{12{,}01}; \qquad n_H = \frac{H}{1{,}008}, \tag{1}$$

$$n_O = \frac{O}{16{,}00}; \qquad n_S = \frac{S}{32{,}06}, \tag{2}$$

$$n_N = \frac{N}{14{,}008}, \tag{3}$$

respectiv

$$x = \frac{n_O}{n_C}; \qquad y = \frac{n_H}{n_C}, \tag{4}$$

$$u = \frac{n_S}{n_C}; \qquad v = \frac{n_N}{n_C}, \tag{5}$$

unde

n_C, n_O, n_H, n_S, n_N reprezintă numărul de atomi de carbon, oxigen, hidrogen, sulf și azot corespunzător conținutului procentului gravimetric;

x, y, u, v — rapoarte între numărul de atomi de oxigen, hidrogen, sulf, azot și numărul de atomi de carbon.

Cu ajutorul lor se poate caracteriza compoziția combustibililor solizi atît prin așa-numitele formule chimice brute raportate:

$$C\,O_x\,H_y\,S_u\,N_v, \tag{6}$$

$$C\,O_x\,H_y, \tag{7}$$

$$C\,H_y, \tag{8}$$

cît și prin greutățile moleculare fictive corespunzătoare:

$$M_1 = 12{,}01 + 16{,}0\,x + 1{,}008\,y + 32{,}06\,u + 14{,}008v, \tag{9}$$

$$M_2 = 12{,}01 + 16{,}0x + 1{,}008\,y, \tag{10}$$

$$M_3 = 12{,}01 + 1{,}008\,y, \tag{11}$$

unde

$CO_x H_y S_u N_v$ este o formulă chimică brută raportată ținînd cont de conținutul în carbon, oxigen, hidrogen, sulf și azot;

$CO_x H_y$ — o formulă chimică brută raportată neglijînd conținutul de sulf și azot;

CH_y — o formulă chimică brută raportată neglijînd conținutul de oxigen, sulf și azot;

M_1 — greutatea moleculară fictivă ţinînd cont de conţinutul în carbon, oxigen, hidrogen, sulf şi azot;

M_2 — greutatea moleculară fictivă neglijînd conţinutul în sulf şi azot;

M_3 — greutatea moleculară fictivă neglijînd conţinutul de oxigen, sulf şi azot.

Între mărimile acestor ecuaţii există următoarea relaţie de dependenţă:

$$\frac{100}{M} = \frac{C}{12{,}01} = \frac{H}{1{,}008 \cdot y} = \frac{O}{16{,}0 \cdot x} = \frac{S}{32{,}06 \cdot u} = \frac{N}{14{,}008 \cdot v}. \qquad (12)$$

Definirea structurii combustibililor solizi pune problema diferenţierii calitative între diferitele specii de atomi după criteriul legăturilor chimice, respectiv a grupărilor funcţionale la care participă în cadrul unităţii structurale.

Exigenţa acestei diferenţieri este funcţie de:

— precizia limitată a datelor oferite de analizele chimice;

— precizia limitată a datelor oferite de termochimie;

— caracterul aproximativ al regulii aditivităţii;

— caracterul statistic al noţiunii de unitate structurală.

Fie α, β parametrii structurali introduşi de Van Krevelen:

$$\alpha = \frac{n_{C,1}}{n_C}, \qquad (13)$$

$$\beta = \frac{r - 1}{n_C}, \qquad (14)$$

$$n_C = n_{C,1} + n_{C,2}, \qquad (15)$$

unde

$n_{C,1}$ este numărul de atomi de carbon aromatic,

$n_{C,2}$ — numărul de atomi de carbon alifatic,

n_C — numărul total de atomi de carbon;

r — numărul de cicluri aromatice,

α — indicele de aromatizare,

β — gradul de condensare,

d — numărul de duble legături,

t — numărul de triple legături.

Luînd în consideraţie formula chimică brută raportată (8), se poate scrie relaţia

$$n_H = 2n_C + 2 - 2d - 4t - r. \qquad (16)$$

Considerînd

$$t = 0; \qquad n_{C,1} = 2d \qquad (17)$$

şi făcînd transformările corespunzătoare, se obţine

$$\alpha + 2\beta = 2 - y. \tag{18}$$

Conform propunerilor lui Van Krevelen, avem

$$y = y_{,1} + y_{,2}, \tag{19}$$

$$y_{,2} = \frac{n_{\text{H.C.2}}}{n_{\text{C}}} = 2(1 - \alpha), \tag{20}$$

$$y_{,1} = \frac{n_{\text{H.C.1}}}{n_{\text{C}}} = y - 2(1 - \alpha), \tag{21}$$

ceea ce conduce la ecuaţia

$$\alpha = 2\beta + y_{,1}, \tag{22}$$

unde

$n_{\text{H.C.1}}$ este numărul de atomi de hidrogen legaţi de atomii de carbon aromatic,

$n_{\text{H.C.2}}$ — numărul de atomi de hidrogen legaţi de atomii de carbon alifatic,

$y_{,1}$ — raportul dintre numărul de atomi de hidrogen legaţi de atomii de carbon aromatic şi numărul total de atomi de carbon;

$y_{,2}$ — raportul dintre numărul de atomi de hidrogen legaţi de atomii de carbon alifatic şi numărul total de atomi de carbon.

Grafic parametrii α, β pot fi determinaţi cu ajutorul diagramelor din figura 1, care prezintă variaţia lui α (curba *1*) şi β (curba *2*) funcţie de conţinutul în carbon al cărbunilor.

Determinarea unuia dintre aceşti parametrii face posibilă calcularea celuilalt cu ajutorul ecuaţiilor (18) — (22).

Analitic calcularea parametrului α poate fi făcută prin utilizarea combinată a relaţiei lui Van Krevelen:

$$\alpha = 0{,}97\,\frac{100 - MV}{C}, \tag{23}$$

şi a relaţiilor lui Seyler pentru indicele MV:

$$\lg MV = 0{,}23364\,\text{H} - 0{,}02706\,\text{C} + 2{,}579 \tag{24}$$

pentru antraciţi şi

$$MV = 10{,}61\,\text{H} - 1{,}24\,\text{C} + 84{,}15 \tag{25}$$

pentru restul cărbunilor, unde MV este conţinutul procentual gravimetric de materii volatile.

Posibilitatea calculării parametrilor α, y_1, y_2 ne permite să facem un salt calitativ în definirea cu ajutorul formulelor chimice a combusti-

bililor solizi. Astfel, în cazul neglijării conţinutului în oxigen, sulf şi azot, în locul formulei (8) propunem

$$C_\alpha C_{1-\alpha} H_{y_1} H_{y_2} \tag{26}$$

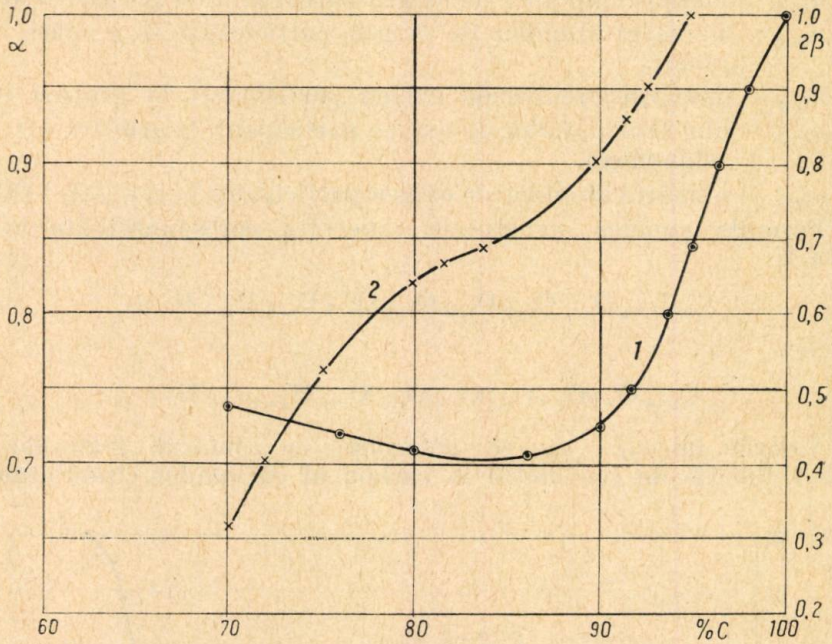


Fig. 1. — Variaţia gradului de condensare funcţie de conţinutul în carbon al cărbunilor (*1*) şi a indicelui de aromatizare funcţie de conţinutul în carbon al cărbunilor (*2*).

sau

$$C_\alpha C_{1-\alpha} H_{y-2(1-\alpha)} H_{2(1-\alpha)}. \tag{27}$$

Acest mod de reprezentare îl vom denumi formulă chimică structurală raportată, întrucît oferă atît o caracterizare cantitativă a compoziţiei, cît şi parametrii de bază ai structurii.

În continuare vom trece la analizarea cazului definit prin formula chimică brută (7), în care se ia în consideraţie şi conţinutul de oxigen.

Ţinînd cont de principalele grupări funcţionale oxigenate din cărbuni, propunem introducerea următorilor parametri structurali :

$$x,1 = \frac{n_{O,1}}{n_C}; \qquad x,2 = \frac{n_{O,2}}{n_C}, \tag{28}$$

$$x,3 = \frac{n_{O,3}}{n_C}; \qquad x,4 = \frac{n_{O,4}}{n_C}, \tag{29}$$

$$x,5 = \frac{n_{O,5}}{n_C}; \qquad x,6 = \frac{n_{O,6}}{n_C}, \tag{30}$$

$$x = x,1 + x,2 + x,3 + x,4 + x,5 + x,6, \tag{31}$$

unde

$n_{O,1}$ este numărul atomilor de oxigen participanți la grupări $\equiv C - O - C \equiv$,

$n_{O,2}$ — numărul atomilor de oxigen participanți la grupări — OCH_3,

$n_{O,3}$ — numărul atomilor de oxigen participanți la grupări —OH (acid),

$n_{O,4}$ — numărul atomilor de oxigen participanți la grupări —OH,

$n_{O,5}$ — numărul atomilor de oxigen participanți la grupări $= C = O$ (chinonice),

$n_{O,6}$ — numărul atomilor de oxigen participanți la grupări —COOH.

Formula chimică structurală raportată corespunzătoare acestui caz va fi

$$C_\alpha C_{1-\alpha} O_{x,1} O_{x,2} O_{x,3} O_{x,4} O_{x,5} O_{x,6} H_{y,1} H_{y,2}, \tag{32}$$

respectiv

$$C_\alpha C_{1-\alpha} O_{x,1} O_{x,2} O_{x,3} O_{x,4} O_{x,5} O_{x,6} H_{y-2(1-\alpha)} H_{2(1-\alpha)}. \tag{33}$$

Valorile lui $x_{,1} - x_{,6}$ se determină cu ajutorul graficelor din figura 2 funcție de conținutul în carbon al cărbunilor, citind ordonata

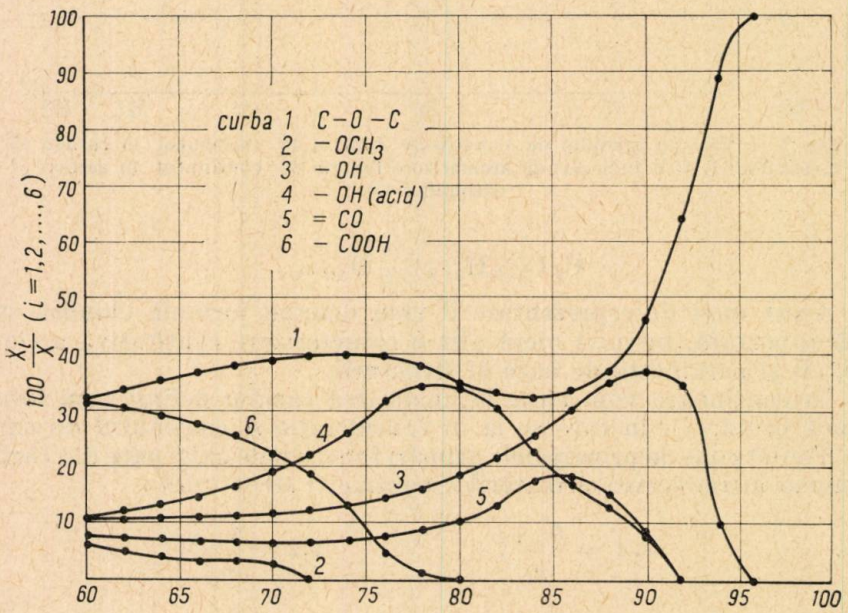


Fig. 2. — Distribuția oxigenului în grupele funcționale din cărbune exprimat în procente gravimetrice din oxigenul total.

corespunzătoare curbelor 1 — 6 și împărțind-o la 100 și înmulțind apoi cu x. Graficele din figura 2 au fost calculate de autor, folosind datele publicate de Blom ș.a.

Conţinutul redus în sulf şi azot şi absenţa unor date experimentale precise fac neinteresantă deocamdată o diferenţiere după criteriul grupărilor funcţionale la care participă aceste elemente.

Calcularea caracteristicilor energetice $Q_{c,s}$; $Q_{c,i}$; $P_{c,s}$; $P_{c,i}$ pornind de la compoziţia elementară a combustibililor a făcut obiectul preocupărilor a numeroşi cercetători, concretizate prin stabilirea unor relaţii empirice ca :

— ecuaţia lui Dulong,

$$P_{c,s} = 80{,}8\,C + \left(y - \frac{O}{8}\right) 344 + 25\,S\,; \tag{34}$$

— ecuaţia lui Mendeleev,

$$P_{c,s} = 80{,}8\,C + \left(y - \frac{O}{8}\right) 344\,; \tag{35}$$

— ecuaţia lui Vondracek,

$$P_{c,s} = (78{,}6 + 2{,}8\sqrt[4]{100 - C^{m\cdot c}})\,C^{t} + 270(H - 0{,}10) + 25S_{v}\,; \tag{36}$$

— ecuaţia lui Seyler,

$$P_{c,s} = 388\,H - 124\,C - 4270\,; \tag{37}$$

— ecuaţia lui Boie,

$$P_{c,s} = 84\,C + 277{,}65\,H - 26{,}5\,O + 25S + 15\,N, \tag{38}$$

unde

$Q_{c,s}$; $Q_{c,i}$ reprezintă căldura de combustie superioară, respectiv inferioară a unui mol fictiv de combustibil;

$P_{c,s}$; $P_{c,i}$ — puterea calorică superioară, respectiv inferioară a combustibilului respectiv;

C^{t} — conţinutul procentual gravimetric de carbon exprimat la proba iniţială;

C^{mc} — conţinutul procentual gravimetric de carbon exprimat la masa combustibilă.

Aceste ecuaţii permit calcularea cu o precizie satisfăcătoare pentru practică a caracteristicilor amintite fără a putea oferi o justificare teoretică suficientă a formei şi a constantelor respective, ceea ce se explică prin faptul că la data apariţiei lor cercetările privind structura chimică a combustibililor erau în fază incipientă.

Datele actuale oferite de chimia structurală a combustibililor oferă posibilitatea calculării caracteristicilor energetice cu ajutorul parametrilor structurali şi punerea în evidenţă a interacţiunii dintre ele.

De fapt interacţiunea dintre parametrii structurali şi caracteristicile energetice reprezintă o manifestare a corelaţiei dintre întreg şi parte în chimie.

Elementul structural ca întreg are o influenţă inversă asupra atomilor sau a grupurilor de atomi, de unde şi manifestarea diferită a acestora.

Din acest punct de vedere, divizarea cu ajutorul parametrilor

structurali a carbonului, oxigenului și hidrogenului în formulele chimice structurale raportate (27) și (33) în două, șase și, respectiv, două specii de atomi este incompletă. O divizare mai detaliată nu ar fi justificată, deoarece diferențele obținute prin această operație sînt mai mici decît erorile experimentale.

Fie un combustibil definit prin formulele chimice brute raportate (6) și (7). Calcularea mărimilor $Q_{c,s}$; $Q_{c,i}$; $P_{c,s}$; $P_{c,i}$ se fac aplicînd legea lui Hess la combustia teoretică a acestui combustibil.

$$CO_x H_y S_u N_v + mO_2 = CO_2 + \frac{y}{2} H_2O + uSO_2 + \frac{v}{2} N_2, \tag{39}$$

în care

$$m = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + u; \qquad z = \frac{y}{2} - x, \tag{40}$$

respectiv

$$CO_x H_y + mO_2 = CO_2 + \frac{y}{2} H_2O, \tag{41}$$

în care

$$m = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}; \qquad z = \frac{y}{2} - x; \tag{42}$$

unde m este coeficientul stoechiometric al oxigenului corespunzător combustiei teoretice și z hidrogenul disponibil.

Termochimic avem

$$Q_c = -\Delta H_c, \tag{43}$$

de asemenea

$$\Delta H_{f,comb\cdot 1} + m\Delta H_{f,O_2} = \Delta H_{f,CO_2} + \frac{y}{2}\Delta H_{f,H_2O} + \\ + u\Delta H_{f,SO_2} + \frac{v}{2}\Delta H_{f,N_2} + Q_c, \tag{44}$$

deci

$$\Delta H_{f,comb.1} + \Delta H_{c,comb.1} = \Delta H_{f,CO_2} + \frac{y}{2}\Delta H_{f,H_2O} + \\ + u\Delta H_{f,SO_2} + \frac{v}{2}\Delta H_{f,O_2} - m\Delta H_{f,O_2}. \tag{45}$$

Făcînd înlocuirile necesare, obținem

$$\Delta H_{f,comb.1} + \Delta H_{c,comb.1} = -94 - 28{,}9y - 71u, \tag{46}$$

respectiv

$$\Delta H_{f,\,comb.\,2} + \Delta H_{C,\,comb.\,2} = -\,94 - 28{,}9y. \tag{47}$$

Prin definiţie, avem

$$Q_{C.\,s} - Q_{C.\,i} = 10{,}77\,\frac{y}{2}, \tag{48}$$

$$P_{C.\,s} = 1000\,\frac{Q_{C.\,s}}{M}; \qquad P_{C.\,i} = 1000\,\frac{Q_{C.\,i}}{M}; \tag{49}$$

unde

Q_C, $Q_{C.\,s}$, $Q_{C.\,i}$ reprezintă căldura de combustie în general, respectiv superioară şi inferioară;

ΔH_C — entalpia de combustie în general;

$\Delta H_{f,\,comb.\,1}$, $\Delta H_{f,\,comb.\,2}$ — entalpiile de formare standard a combustibililor definiţi prin formulele (6), respectiv (7),

$\Delta H_{f,\,CO_2}$; $\Delta H_{f,\,H_2O}$; $\Delta H_{f,\,SO_2}$; $\Delta H_{f,\,N_2}$; $\Delta H_{f,\,O_2}$ — entalpiile molare de formare standard a CO_2, H_2O, SO_2, N_2, O_2,

$\Delta H_{C,\,comb.\,1}$; $\Delta H_{C,\,comb.\,2}$ — entalpiile de combustie standard a combustibililor definiţi prin formula (6), respectiv (7),

M — greutatea moleculară în general.

În cazul definirii combustibililor prin formule chimice structurale raportate, apare posibilitatea eliminării termenului $\Delta H_{f,\,comb.\,i}$ ţinînd cont de entalpiile de formare a produselor de combustie pornind de la reactanţii reali astfel:

$$\Delta H_{C,\,comb.\,3} = \alpha\,\Delta H_{f,\,1,\,CO_2} + (1-\alpha)\,\Delta H_{f,\,2,\,CO_2} + \frac{y_1}{2}\,\Delta H_{f,\,1,\,H_2O} +$$

$$+ \frac{y_2}{2}\,\Delta H_{f,\,2,\,H_2O} + u\,\Delta H_{f,\,SO_2} + \frac{v}{2}\,\Delta H_{f,\,N_2} + \sum_{1}^{6} \lambda_i x_i, \tag{50}$$

unde

$\Delta H_{C,\,comb.\,3}$ este entalpia de combustie standard a unui mol fictiv de combustibil definit prin formula 33, $\Delta H_{f,\,1,\,CO_2}$ — entalpia molară de formare a CO_2 din carbonul aromatic al combustibilului şi din oxigenul provenit din aer,

$\Delta H_{f,\,2,\,CO_2}$ — entalpia molară de formare a CO_2 din carbonul alifatic al combustibilului şi din oxigenul provenit din aer,

$\Delta H_{f,\,1,\,H_2O}$ — entalpia molară de formare a H_2O din hidrogenul legat de carbonul aromatic al combustibilului şi din oxigenul provenit din aer,

$\Delta H_{f,\,2,\,H_2O}$ — entalpia molară de formare a H_2O din hidrogenul legat de carbonul alifatic al combustibilului şi din oxigenul provenit din aer,

λ_i — coeficient de corecţie pentru oxigenul de combustie provenit din grupele funcţionale oxigenate ale combustibilului.

Remarcăm faptul că în ecuaţia (50) entalpiile de formare reprezintă de fapt entalpiile de combustie experimentale, ceea ce verifică ecuaţia generală

$$Q = (\Sigma_i Q_i)_p - (\Sigma_j Q_j)_r,$$

în care

Q este căldura de reacţie,

$(\Sigma_i Q_i)_p$ — suma căldurilor de combustie a produselor de reacţie,

$(\Sigma_j Q_j)_r$ — suma căldurilor de combustie a reactanţilor.

Comparînd parametrii structurali şi căldurile de combustie experimentale ale unui mare număr de compuşi organici, Van Krevelen a stabilit următoarea relaţie :

$$Q_{c.s} = 95\alpha + 98{,}9\,(1 - \alpha) + 35{,}5\,y_1 + 28{,}7\,y_2 - \lambda x + 100\,u + 15\,v.$$

Utilizînd datele privind distribuţia oxigenului în grupele funcţionale din cărbune prezentate în figura 2, autorul a construit graficul din figura 3 pentru determinarea coeficientului λ din ecuaţia (52), luînd în consideraţie diferenţele dintre energiile de legătură ale atomilor de oxigen în O_2 şi grupările funcţionale oxigenate. Folosirea valorilor pentru λ conform graficului conduce la creşterea preciziei ecuaţiei (52).

Trebuie remarcat faptul că precizia reclamată de practica de proiectare şi de exploatare pentru caracteristicile energetice ale combustibililor

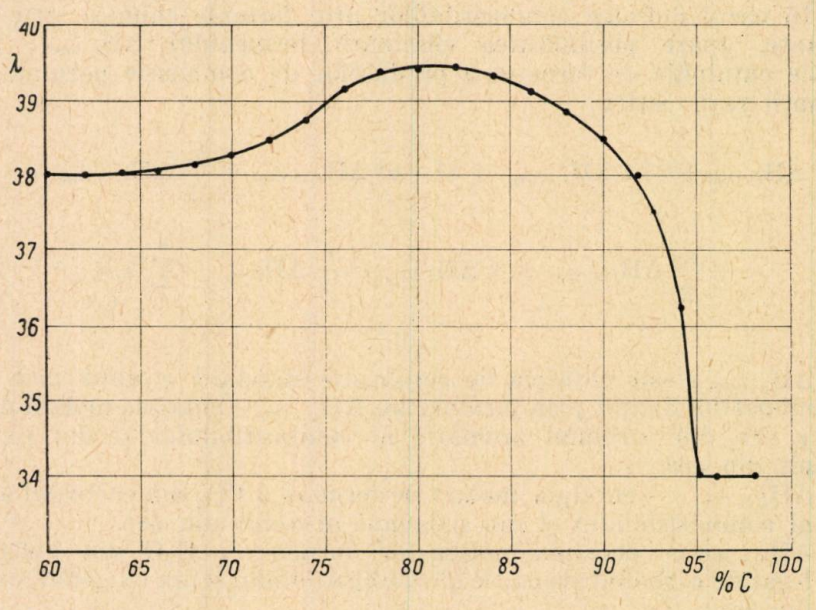


Fig. 3. —Dependenţa coeficientului λ de conţinutul în carbon al cărbunilor.

solizi este satisfăcută de ecuaţiile empirice ((34)—(38) etc.), care au avantajul de a fi mai simple ca ecuaţia (52), apelînd doar la compoziţia elementară.

Concluziile care se desprind din lucrare sînt:

— între parametrii structurali și caracteristicile energetice ale combustibililor solizi există o dependență directă, care este pusă în evidență de ecuațiile (50), respectiv (52);

— prin utilizarea parametrilor structurali introduși de Van Krevelen și a celor propuși în această lucrare ($x_1 - x_6$) se poate trece de la modul de reprezentare al masei organice din cărbuni prin formule chimice brute raportate la reprezentarea prin „formule chimice structurale raportate", care oferă în plus o caracterizare a structurii;

— utilizarea graficului din figura 3 pentru calcularea coeficientului λ din ecuația lui Van Krevelen (53) conduce la creșterea preciziei acesteia.

BIBLIOGRAFIE

1. D. W. Van Krevelen, *Coal Science*, New York, Els. Publ. Comp., 1957.
2. M. H. Karapetiant, *Termodinamica chimică*, București, Edit. tehnică, 1956.
3. L. Pauling, *The Nature of the Chemical*, Bond, New York, 1960.

CURGEREA PRIN CONDUCTE DE SECȚIUNE VARIABILĂ CU SCHIMB DE CĂLDURĂ ȘI FRECARE

DE

V. PIMSNER și C. A. VASILESCU

532.43.038

Lucrarea urmărește stabilirea relațiilor de calcul a dependenței dintre parametrii funcționali și constructivi ai curgerii cu frecare prin conducta de secțiune variabilă a unui gaz perfect care schimbă căldură cu exteriorul. În cadrul ipotezei curgerii monodimensionale, după precizarea ecuațiilor de schimb de căldură și a lucrului mecanic de frecare se determină ecuația diferențială a variației presiunii, vitezei etc., care este apoi integrată în cadrul unor ipoteze simplificatorii variabile în numeroase cazuri concrete.

În anumite organe ale mașinilor și instalațiilor termice, conductele au secțiunea variabilă pe direcția de curgere, iar în timpul curgerii fluidul schimbă căldură cu exteriorul și, datorită frecărilor în stratul-limită, este necesar luarea în considerare a lucrului mecanic de frecare consumat. Dacă se pot neglija componentele vitezei și ale accelerației în planul transversal direcției de curgere în comparație cu valorile componentelor pe direcția axială, se admite că vitezele sînt paralele între ele. În plus, dacă raportul dintre diametrul conductei și raza ei de curbură este suficient de mic, se poate considera că presiunea este constantă în orice plan transversal pe axul curgerii. Deoarece în regim permanent, care va fi analizat în continuare, debitul este constant, iar secțiunile transversale ale curgerii sînt precizate de pereții conductei, rezultă că parametrii de stare sînt constanți într-o secțiune transversală și variază numai în lungul axului curgerii.

Constanța parametrilor de stare și a vitezei în secțiunile transversale presupune că orice excitație produsă de frecarea fluidului de perete, de transferul de căldură sau masă etc. se transmite instantaneu în întreaga secțiune transversală, în care nu pot exista schimburi de energie, de masă sau de impulsuri; în consecință, parametrii curgerii variază numai în lungul axului conductei, ceea ce permite determinarea simplă, dar globală, a intensității frecării, schimbului de căldură, difuziei etc.

Independent de forma explicită a ecuației de stare, ea poate fi exprimată în forma generală de relația

$$p = f(\rho, s),$$

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 299–305, 1970

care prin diferenţiere poate fi pusă sub forma

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \mathrm{d}s = a^2\left[\mathrm{d}\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \mathrm{d}s\right], \tag{1}$$

în care $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$. Înlocuind $\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$, se obţine

$$\mathrm{d}p = a^2\left[\mathrm{d}\rho - \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}s\right]. \tag{1'}$$

Corelaţia dintre lucrul mecanic de frecare şi parametrii de stare este exprimată de relaţia

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w\mathrm{d}w + \mathrm{d}l_f = 0, \tag{2}$$

care, împreună cu ecuaţia continuităţii şi cu expresia primului principiu aplicat sistemelor deschise,

$$\mathrm{d}q_{ext} = \mathrm{d}i + w\mathrm{d}w, \tag{3}$$

permit ca relaţia (1′) să poată fi pusă sub forma

$$(M^2 - 1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{1}{\rho c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}q_{ext} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{a^2}{\rho c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p - 1\right]\mathrm{d}l_f, \tag{4}$$

în care $M = \frac{w}{a}$ este criteriul Mach, iar A secţiunea transversală a conductei.

Se constată că influenţa variaţiei parametrilor analizaţi asupra vitezei este diferită în regim subsonic ($M < 1$) faţă de cel supersonic ($M > 1$), iar sensul şi intensitatea influenţei schimbului de căldură şi a lucrului de frecare sînt determinate de tipul ecuaţiei de stare al fluidului, a cărei formă explicită este necesară pentru integrarea ecuaţiei (4). Astfel, în ipoteza gazelor perfecte se va căuta în continuare determinarea cantitativă a relaţiei dintre parametrii de stare ai gazului şi intensitatea schimburilor energetice. Considerînd efectul global al frecării dintre fluid şi perete, se poate exprima lucrul mecanic de învingere al rezistenţelor pe perete prin relaţia lui Darcy-Weisbach :

$$\mathrm{d}l_f = \zeta \frac{w^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{D_h}, \tag{5}$$

în care ζ este coeficientul de frecare în conductă şi D_h diametrul hidraulic al conductei. Variaţia ariei secţiunii transversale, presupusă circulară, este

$$\mathrm{d}A = \pi[(r + \mathrm{d}r)^2 - r^2] = 2\pi r\mathrm{d}r \tag{6}$$

şi, admiţînd o variaţie liniară între două secţiuni infinit vecine, rezultă

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}x \operatorname{tg} \alpha, \tag{7}$$

în care 2α este unghiul de divergență al conductei. Din relațiile (6) și (7) rezultă

$$\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2\frac{dx}{r}\operatorname{tg}\alpha. \tag{8}$$

În ipoteza gazului perfect, relația (4) devine

$$\frac{dw}{w}(w^2 - RT) + R dT - RT\frac{dA}{A} + dl_f = 0,$$

care, prin înlocuirea relațiilor obținute, poate fi scrisă

$$\frac{dw}{w}(w^2 - RT) + \frac{R}{c_p}(dq_{ext} - w dw) - 2RT\operatorname{tg}\alpha\frac{dx}{r} + \zeta\frac{w^2}{2}\frac{dw}{D_h} = 0 \tag{9}$$

sau, grupînd termenii,

$$\frac{dw}{w}\left(\frac{w^2}{\varkappa} - RT\right) + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}dq_{ext} - 2RT\operatorname{tg}\alpha\frac{dx}{r} + \zeta\frac{w^2}{2D_h}dx = 0. \tag{9'}$$

Împărțind toți termenii cu dx, se deduce

$$\frac{1}{w}(w^2 - a^2)\frac{dw}{dx} + (\varkappa - 1)\frac{dq_{ext}}{dx} - 2a^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r} + \zeta\varkappa\frac{w^2}{2D_h} = 0,$$

de unde

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w}{r}\cdot\frac{2a^2\operatorname{tg}\alpha - \zeta\frac{\varkappa w^2}{4} + (\varkappa - 1)r\frac{dq_{ext}}{dx}}{w^2 - a^2} \tag{10}$$

sau

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w}{r}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha - \zeta\frac{\varkappa M^2}{4} + \frac{\varkappa - 1}{a^2}r\frac{dq_{ext}}{dx}}{M^2 - 1}, \tag{10'}$$

care reprezintă ecuația diferențială de variație a vitezei în lungul conductei de secțiune variabilă. Pe baza relației (2) se poate exprima variația presiunii prin relația

$$\frac{dp}{dx} = \varkappa p M^2\left(\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{\zeta}{2D}\right). \tag{11}$$

În mod identic se deduce și relația de variație a temperaturii. Integrarea ecuației obținute necesită definirea variației termenilor componenți în lungul conductei. Pierderile de presiune într-o conductă se datoresc frecărilor și vîrtejurilor rezultate la o variație mai rapidă a secțiunii divergente, de aceea se poate considera că

$$\zeta = \zeta_f + \zeta_v,$$

în care ζ_f este coeficientul pierderilor prin frecări, a cărui variaţie cu criteriile Reynolds şi Mach este prezentată în figura 1 [1].

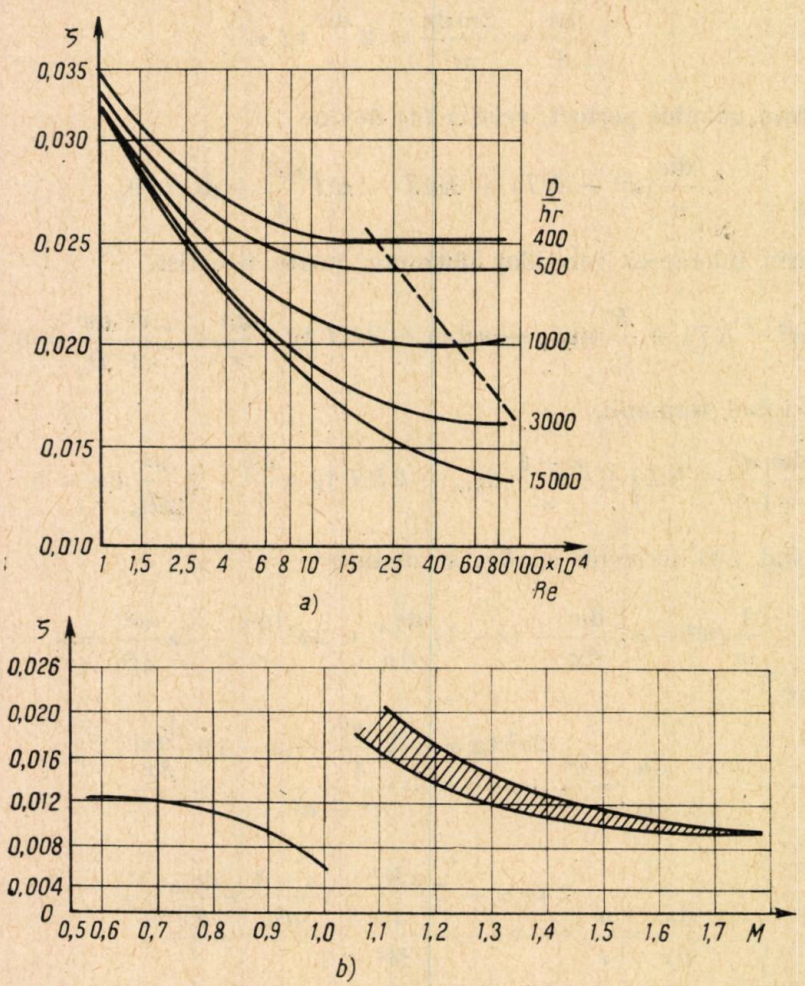


Fig. 1. — Variaţia coeficienţilor de frecare ζ în funcţie de criteriul Re (fig. *a*) şi de criteriul Mach (fig. *b*).

În zona divergentă a conductei, datorită desprinderii stratului-limită, pierderile datorită vîrtejurilor depind de unghiul local de divergenţă şi de raportul dintre suprafeţele de intrare şi de ieşire. În porţiunile convergente pierderile prin vîrtejuri pot fi neglijate, valoarea lor fiind suficient de redusă. Cu creşterea unghiului α, zona vîrtejurilor se deplasează dinspre aval spre amontele curgerii, ajungînd să acopere integral pereţii pentru un anumit regim, considerat ca regim-limită. Din datele experimentale rezultă că pierderile prin vîrtejuri în zona divergentă pot fi evaluate de relaţia:

$$l_v = \psi \frac{\Delta w}{2}, \tag{12}$$

în care $\psi < 1$ este coeficientul de amortizare al șocului, care, la Re = const, depinde numai de unghiul α. Valorile lui ψ sînt prezentate în lucrările de specialitate [2], [3] etc. Se poate considera că ζ este o mărime constantă pe o porțiune suficient de mică a intervalului considerat și care poate fi determinată pe baza datelor experimentale existente pentru fiecare interval în parte.

Schimbul de căldură cu exteriorul este precizat de relația

$$dq_{ext} = K(T_g^* - T_p)dA, \tag{13}$$

în care K este coeficientul global de transfer de căldură, T_g^* temperatura de frînare a gazului și T_p temperatura peretelui. Ținînd seama de relația (6), expresia (13) poate fi scrisă sub forma

$$dq_{ext} = K\frac{T_g^* - T_p}{m}2\pi r dx,$$

care poate fi astfel introdusă în relația (10′), deci

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w}{r}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha - \zeta\frac{\varkappa M^2}{4} + \frac{2\pi r^2(\varkappa-1)(T_g^* - T_p)}{a^2 m}}{M^2 - 1}. \tag{14}$$

Relația (11), neconținînd termenul corespunzător schimbului elementar de căldură, rămîne neschimbată. Se poate imagina rezolvarea ecuațiilor (11) și (14); pentru a fi utilizate în calcule concrete trebuie știută variația mărimilor care intră în relațiile stabilite, spre exemplu α, K, T_g^*, T_p etc. Pentru calcule preliminare se pot admite anumite ipoteze simplificatorii care să permită integrarea ecuațiilor stabilite; verificările experimentale pot determina gradul de exactitate al ipotezelor stabilite.

Se presupune într-o primă aproximație că viteza sunetului este constantă pe o distanță convenabil aleasă, calculată, spre exemplu, din temperatura la intrarea în elementul de conductă considerat sau din media aritmetică a temperaturilor extreme ale intervalului.

Se consideră ζ = const, curgerea fiind în general în domeniul de automodelare în raport cu criteriul Re, rezultă ζ_f = const, iar ζ_v este ales ca valoare medie pe interval.

Dacă coeficientul de transfer de căldură prin convecție de la gaz la perete α_1 este suficient de mic, el determină valoarea coeficientului global de transfer de căldură, deoarece se poate considera că K este proporțional cu α_1. În regim turbulent, în aceleași condiții, se admite că $\alpha_1 \sim d_{ec}^{1,8\div 2}$. Deci, pe măsură ce diametrul conductei se mărește (conductă divergentă), α_1 crește, însă se micșorează diferența temperaturilor $T_g^* - T_p$, ceea ce permite ca într-o primă aproximație să se considere termenul corespunzător schimbului de căldură, adică

$$\frac{2\pi r^2(\varkappa-1)(T_g^* - T_p)}{ma^2} = B = \text{const.}$$

Întrucît pe intervalul considerat s-a admis că $\alpha = \text{const}$, termenul

$$2 \operatorname{tg} \alpha = N = \text{const},$$

iar

$$\frac{\varkappa\zeta}{4a^2} = C = \text{const},$$

relaţia (14) poate fi pusă sub forma condensată

$$\frac{dw}{dx} = \frac{wa^2}{r} \cdot \frac{N + B - Cw^2}{w^2 - d^2}. \tag{14'}$$

Cum $\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}$, iar $\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{2}$, rezultă

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dr} \cdot \frac{N}{2},$$

de unde

$$\frac{dw}{dr} = \frac{2a^2 w}{r} \cdot \frac{N + B - Cw^2}{w^2 - a^2},$$

care permite separarea variabilelor, rezultînd relaţia

$$\frac{dr}{r} = \frac{N}{2a^2} \cdot \frac{w^2 - a^2}{w(N + B - Cw^2)} dw,$$

care pentru integrare poate fi descompusă sub forma

$$\frac{dr}{r} = \frac{N}{2a^2}\left[\frac{w dw}{N + B - Cw^2} - \frac{a^2 dw}{w(N + B - Cw^2)}\right]$$

Notînd

$$I_1 = \int \frac{w dw}{N + B - Cw^2} = -\frac{1}{2C}\int \frac{-2Cw dw}{N + B - Cw^2} =$$

$$= -\frac{1}{2C} \ln(N + B - Cw^2) + K_1, \tag{15}$$

iar

$$I_2 = \int \frac{-a^2 dw}{w(N + B - Cw^2)} = -\frac{a^2}{N + B}\int \frac{dw}{w} - \frac{a^2\sqrt{C}}{2(N + B)}\int \frac{dw}{\sqrt{N + B} - w\sqrt{C}} +$$

$$+ \frac{a^2\sqrt{C}}{2(N + B)}\int \frac{dw}{\sqrt{N + B} + w\sqrt{C}} + K_2,$$

de unde

$$I_2 = -\frac{a^2}{N + B} \ln w + \frac{a^2}{2(N + B)} \ln(N + B - Cw^2) + K_2. \tag{16}$$

Impunînd limitele de integrare, rezultă

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{N}{2a^2}\left[\frac{a^2}{N+B}\ln\frac{w_1}{w_2} + \frac{N+B-a^2C}{2(N+B)C}\ln\frac{N+B-Cw_1^2}{N+B-Cw_2^2}\right]$$

sau

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{N}{2(N+B)}}\left(\frac{N+B-Cw_1^2}{N+B-Cw_2^2}\right)^{\frac{N(N+B-a^2C)}{4a^2C(N+B)}}, \tag{17}$$

relație care determină variația vitezei în funcție de dimensiunile geometrice ale conductei. În mod analog se deduce

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}x}{r}\varkappa w^2\frac{\left[\left(N+B-\frac{\zeta}{4}\right)-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}Cw^2\right]}{w^2-a^2} \tag{18}$$

Cum

$$\frac{\mathrm{d}x}{r} = \frac{(w^2-a^2)\mathrm{d}w}{wa^2(N+B-Cw^2)},$$

rezultă relația

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\left[\left(\frac{\zeta}{4}-N-B\right)+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}Cw^2\right]\varkappa w\mathrm{d}w}{(N+B-Cw^2)a^2}, \tag{19}$$

din care, prin integrare, se deduce

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{N+B-Cw_2^2}{N+B-Cw_1^2}\right)^{\frac{N+B-Ca^2}{2Ca^2}}\mathrm{e}^{\frac{(\varkappa-1)(w_1^2-w_2^2)}{2a^2}} \tag{20}$$

relație care precizează variația presiunii în funcție de mărimile N, B și C și de variația vitezei în intervalul ales. Stabilirea mărimii intervalului depinde de precizia urmărită în calcul, presupunînd că valorile inițiale de calcul pot fi cunoscute pentru fiecare interval în parte. Pentru un calcul mai exact, în ipoteza cunoașterii legii de variație a parametrilor din relațiile de bază (11) și (14), se poate elabora metoda de calcul, bazată pe utilizarea mașinilor electronice de calcul. Chiar în acest caz, metoda propusă este necesar a fi utilizată pentru precizarea valorilor intermediare și încadrarea generală a valorilor.

BIBLIOGRAFIE

1. Дейч М.Е., *Техническая газодинамика*. Госэнергоиздат,1961, Москва,
2. V. Pimsner, C. A. Vasilescu, Gh. Rădulescu, *Energetica turbomotoarelor cu ardere internă*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1964, București.
3. H. Linneken, *Forsch. Geb. Ingenieurwesens*, 97—104 **27**, *4*, (1961).

ANALIZA TERMODINAMICĂ A CICLURILOR CU ABUR SATURAT ŞI A CICLURILOR TERMICE DIRECTE PENTRU CENTRALELE NUCLEARE-ELECTRICE

DE

C. HAIDUC şi E. LICSANDRU

536.24 : 621.039

În lucrare se prezintă metoda de analiză termodinamică a ciclurilor cu abur saturat şi a ciclurilor directe pentru centralele nucleare-electrice. Se dau ecuaţiile complexe pentru randamentele termice şi nete ale C.N.E. în funcţie de un număr mare de parametri ai ciclurilor termice, ai reactorului şi ai generatorului de aburi. Se prezintă rezultatele analizei termodinamice efectuate cu metoda menţionată pentru cele două tipuri de cicluri. Metoda propusă permite determinarea mărimilor η_b, η_n, η_e, η_t, η_r, η_{ga} şi ψ, şi optimizarea parametrilor diferitelor tipuri de C.N.E. cu reactori cu neutroni termici sau cu reactori rapizi reproducători.

Modelarea matematică a proceselor termice şi hidrodinamice din ciclurile termodinamice ale reactorilor nucleari energetici prezintă o importanţă deosebită pentru optimizarea parametrilor C.N.E. Modelarea acestor procese implică stabilirea ecuaţiilor desfăşurate pentru randamentele brut, net, electric şi termic, care să ţină seama de complexitatea reactorului nuclear a generatorului de abur şi a ciclului termic al C.N.E.

Ţinînd seama de perspectivele ciclurilor indirecte cu abur saturat şi a ciclurilor directe cu abur supraîncălzit pentru C.N.E., în lucrarea de faţă se prezintă rezultatele cercetărilor de analiză termodinamică a ciclurilor centralelor nucleare-electrice efectuate de autori în cadrul Institutului de energetică al Academiei Republicii Socialiste România.

În cazul general, randamentul brut al C.N.E. cu dublu circuit poate fi scris sub forma

$$\eta_b = \eta_r \cdot \eta_{c1} \cdot \eta_{ga} \cdot \eta_{c2} \cdot \eta_e , \qquad (1)$$

unde η_r, η_{c2}, η_{ga}, η_{c1} şi η_e reprezintă randamentele reactorului, circuitului primar, generatorului de abur, circuitului secundar şi randamentul electric al C.N.E.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 307— 322, 1970

În ecuaţia (1) randamentul electric este

$$\eta_e = \eta_t \cdot \eta_m \cdot \eta_{ge}, \tag{2}$$

unde η_t, η_m, η_{ge} reprezintă randamentele termic al ciclului termodinamic, mecanic şi al generatorului electric.

Randamentul net al C.N.E. are forma

$$\eta_n = \eta_b(1 - \psi), \tag{3}$$

unde ψ reprezintă consumul relativ de putere la serviciile interne ale C.N.E.

În ecuaţia (1), dacă notăm $\eta_p = \eta_r \cdot \eta_{c1} \cdot \eta_{g\cdot a} \cdot \eta_{c2}$, pentru η_p se poate obţine ecuaţia

$$\eta_p = \left(1 - \frac{\Sigma Q_{p\cdot r}}{Q_r}\right)\left[1 - \frac{n\Sigma Q_{p\cdot c_1}}{(1+K)Q'_r}\right]\left[1 - \frac{\Sigma Q_{p\cdot ga}}{\frac{1+K}{n}Q'_r - \Sigma Q_{p\cdot a}}\right]\left[1 - \frac{\Sigma(Q_{p_1}+Q_{p_2})}{Q'_{ga}}\right]. \tag{4}$$

În ecuaţia (4) s-au utilizat următoarele notaţii: suma pierderilor de căldură din reactor

$$\Sigma Q_{p\cdot r} = Q_e + Q_m, \tag{5}$$

Q_e reprezintă pierderile de căldură în mediul exterior prin vasul de presiune şi protecţia termică a acestuia, kcal/h;

Q_m — pierderile de căldură la răcirea moderatorului în circuitul de răcire al acestuia, kcal/h;

Q_r — puterea termică a reactorului, kcal/h;

n — numărul de circuite de răcire a reactorului;

$\Sigma Q_{p\cdot c_1}$ — suma pierderilor de căldură din conductele unui circuit de răcire în mediul exterior, kcal/h;

$\Sigma Q_{p\cdot ga}$ — suma pierderilor de căldură din generatorul de abur, kcal/h;

$\Sigma Q_{p\cdot c_1}$ — suma pierderilor de căldură din conductele unui circuit de răcire al reactorului în mediul exterior, kcal/h;

$\Sigma(Q_{p_1} + Q_{p_2})$ — suma pierderilor de căldură din circuitul secundar al C.N.E. prin convecţie şi prin scurgeri din circuit, kcal/h;

Q_s — căldura primită de mediul de răcire din circuitul primar de la pompe datorită lucrului mecanic al acestora şi prin frecare în conducte, kcal/h;

Q'_r — căldura cedată mediului de răcire în reactor, kcal/h;

Puterea termică a generatorului de abur

$$Q_{g.a} = \frac{Q'_r}{n} - (Q_s - \Sigma Q_{p.c_1}),$$

iar mărimea

$$K = n \frac{Q_s}{Q'_r}. \tag{6}$$

În ecuaţia randamentului net, mărimea ψ poate fi exprimată sub forma a două componente :

$$\psi = \psi_c + \psi_p, \tag{7}$$

unde

$\psi_c = \frac{P_c}{P_e}$ este consumul relativ intern de putere la pompele de circulaţie din circuitul primar,

$\psi_p = \frac{P_{c_i}}{P_e}$ — consumul relativ intern de putere la pompele de alimentare, la pompele de circulaţie ale condensatorilor, la pompele de condensat şi la instalaţiile auxiliare ale C.N.E.

Mărimea ψ_c se poate exprima

$$\psi_c = a \frac{nG\Delta p_{c_1}}{\eta'_p \eta_b Q_r \gamma_1}, \tag{8}$$

unde

$$a = \frac{860 \cdot 10^4}{3600 \cdot 10^2} = \text{const},$$

G este debitul mediu de răcire într-un circuit de răcire al reactorului, kg/h,

Δp_{c_1} — rezistenţa hidraulică a circuitului primar, kg/m^2,

$\eta_{p'}$ — randamentul pompei de circulaţie ,

γ_1 — greutatea specifică a mediului de răcire în pompa de circulaţie a reactorului, kg/m^3.

În cazul cînd se admite o lege pătratică de variaţie a rezistenţei hidraulice pentru toate elementele circuitului primar, avem

$$\Delta p_{c_1} = \Delta p_r + \Delta p_{g.a} + \Delta p_c = \frac{1}{2g} \Sigma \xi_i \bar{\gamma}_i \overline{W}_i^2, \tag{9}$$

unde Δp_r, $\Delta p_{g.a}$, Δp_c sînt pierderile de presiune în reactor, generatorul de abur şi în conductele circuitului primar, iar $\Sigma \xi_i \bar{\gamma}_i \overline{W}_i^2$ suma produselor

coeficienţilor de rezistenţă hidraulică, greutăţilor specifice ale mediului de răcire şi vitezei medii în componentele circuitului primar.

Pentru o secţiune $F_{g\cdot a}$ dată a generatorului de abur şi o putere dată a generatorului de abur $Q_{g\cdot a} = G\overline{C}_p\Delta t_{g\cdot a}$, viteza medie este

$$\overline{W}_{g\cdot a} = \frac{Q_{g\cdot a}}{\gamma_{g\cdot a}\overline{C}_p F_{g\cdot a}\Delta t_{g\cdot a}}. \tag{10}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (9) şi (10) şi considerînd dimensiunile elementelor circuitului primar constante, raportul mărimilor $\Delta p_{g\cdot a}$ pentru două regimuri date de funcţionare va fi

$$\frac{\Delta p''_{g\cdot a}}{\Delta p'_{g\cdot a}} = \frac{\gamma'_{g\cdot a}}{\gamma''_{g\cdot a}}\left(\frac{G''F'_{g\cdot a}}{G'F''_{g\cdot a}}\right)^2. \tag{11}$$

Pentru reactor, punînd condiţia $\Delta t_r = \text{const}$, se obţine în mod analog

$$\frac{\Delta p''_r}{\Delta p'_r} = \frac{\gamma'_r}{\gamma''_r}\left(\frac{G''F'_r}{G'F''_r}\right)^2, \tag{12}$$

iar pentru conductele circuitului primar

$$\frac{\Delta p''_c}{\Delta p'_c} = \frac{\gamma'_c}{\gamma''_c}\left(\frac{G''}{G'}\right)^2. \tag{13}$$

În acest caz, avem

$$\frac{\Delta p''_{c_1}}{\Delta p'_{c_1}} = \left(\frac{Q''_{g\cdot a}\overline{C}'_{p\cdot g\cdot a}\Delta t'_{g\cdot a}}{Q'_{g\cdot a}\overline{C}''_{p\cdot g\cdot a}\Delta t''_{g\cdot a}}\right)^2\cdot\left[\frac{\gamma'_c}{\gamma''_c} + \frac{\gamma'_r}{\gamma''_r}\left(\frac{F'_r}{F''_r}\right)^2 + \frac{\gamma'_{g\cdot a}}{\gamma''_{g\cdot a}}\left(\frac{F'_{g\cdot a}}{F''_{g\cdot a}}\right)^2\right], \tag{14}$$

iar raportul mărimilor ψ_c pentru două regimuri de funcţionare a reactorului se poate exprima

$$\frac{\psi''_c}{\psi'_c} = \left(\frac{\overline{C}'_p\overline{\gamma}'\eta'_p}{\overline{C}''_p\overline{\gamma}''\eta''_p}\right)\left(\frac{Q''_{g\cdot a}\Delta t'_{g\cdot a}}{Q'_{g\cdot a}\Delta t''_{g\cdot a}}\right)\left(\frac{Q'_r\Delta p''_{c_1}\eta'_b}{Q''_r\Delta p'_{c_1}\eta''_b}\right), \tag{15}$$

sau, ţinînd seama de ecuaţia (14),

$$\frac{\psi''_c}{\psi'_c} = \left(\frac{\overline{C}'_p\overline{\gamma}'\eta'_p}{\overline{C}''_p\overline{\gamma}''\eta''_p}\right)\left(\frac{Q''_{g\cdot a}\Delta t''_{g\cdot a}}{Q'_{g\cdot a}\Delta t'_{g\cdot a}}\right)^3\left(\frac{\overline{C}'_{p\cdot g\cdot a}}{\overline{C}''_{p\cdot g\cdot a}}\right)^2\left(\frac{Q'_r\eta'_b}{Q''_r\eta''_b}\right)\left[\frac{\gamma'_c}{\gamma''_c} + \frac{\gamma'_r}{\gamma''_r}\left(\frac{F'_r}{F''_r}\right)^2 + \frac{\gamma'_{g\cdot a}}{\gamma''_{g\cdot a}}\left(\frac{F'_{g\cdot a}}{F''_{g\cdot a}}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Ecuaţia (16) permite efectuarea analizei influenţei oricărui regim termic sau hidrodinamic din circuitul primar asupra lui ψ_c pentru reactorii de tip P.W.R, B.H.W.R., P.H.W.R. şi S.G.H.W.R.

În ecuaţia (7), mărimea ψ_p poate fi exprimată în ecuaţia

$$\psi_p = \chi + \frac{d_e}{36{,}72 \cdot 10^4}\left[\frac{p_a}{\eta_{p.a}\bar{\gamma}_a} + \frac{M\alpha_c \Delta p_{ar}}{\bar{\gamma}_{a.r}\eta_{p.c}}\right], \tag{17}$$

unde

χ reprezintă consumul relativ intern de putere la instalaţiile auxiliare ale C.N.E.,
d_e — consumul specific de abur din ciclul termodinamic al C.N.E., kg/kWh,
α_c — debitul relativ de abur în condensator,
p_a — presiunea apei după pompa de alimentare, kg/m^2,
Δp_{ar} — pierderile de presiune în circuitul de răcire al condensatorilor, kg/m^2,
$\eta_{p.a}$, $\eta_{p.c}$ — randamentele pompelor de alimentare şi de circulaţie a condensatorilor,
$\bar{\gamma}_a$, $\bar{\gamma}_{ar}$ — greutatea specifică a apei în pompa de alimentare şi a apei de răcire a condensatorilor, kg/m^3,
M — factorul de circulaţie al condensatorilor.

Variaţia lui ψ_p pentru două regimuri diferite de funcţionare a C.N.E. este dată de ecuaţia

$$\frac{\psi_p''}{\psi_p'} = \frac{aP'_{p.a} + bP'_{pc} + cP'_{aux}}{P'_{p.a} + P'_{p.c} + P'_{aux}}\left(\frac{Q_r'\eta_b'}{Q_r''\eta_b''}\right), \tag{18}$$

unde

$$a = \frac{P''_{p.a}}{P'_{p.a}} = \frac{d_e''p_a''}{d_e'p_a'}\left(\frac{Q_r''\eta_b''}{Q_r'\eta_b'}\right), \tag{19}$$

$$b = \frac{P''_{p.c}}{P'_{p.c}} = \frac{\alpha_c''d_e''\Delta p''_{ar}}{\alpha_c'd_e'\Delta p'_{ar}}\left(\frac{Q_r''\eta_b''}{Q_r'\eta_b'}\right), \tag{20}$$

$$c = \frac{P''_{aux}}{P'_{aux}} = \frac{Q_r''\eta_b''}{Q_r'\eta_b'} \tag{21}$$

sau, dacă introducem notaţiile:

$$\bar{P}_{p.a} = \frac{P'_{p.a}}{P'_{p.a} + P'_{p.c} + P'_{aux}}, \tag{22}$$

$$\bar{P}_{p.c} = \frac{P'_{p.c}}{P'_{p.a} + P'_{p.c}}, \tag{23}$$

$$\bar{P}_{aux} = \frac{P'_{aux}}{P'_{p.a} + P'_{p.c} + P'_{aux}}, \tag{24}$$

unde $P'_{p\cdot a}$, $P'_{p\cdot c}$, P'_{aux} reprezintă puterea pompei de alimentare, a pompei de condensat şi a instalaţiilor auxiliare ale C.N.E. pentru un regim dat de funcţionare a C.N.E.

Mărimile a, b, c se pot exprima sub o formă mai dezvoltată :

$$a = \frac{d''_e p''_a \overline{\gamma}'_a \eta'_{p\cdot a}}{d'_e p'_a \overline{\gamma}''_a \eta''_{p\cdot a}} \left(\frac{Q''_r \eta''_b}{Q'_r \eta'_b} \right), \tag{25}$$

$$b = \frac{\alpha''_c D''}{\alpha'_c D'} \left(\frac{\Delta p''_{a\cdot r} \overline{\gamma}'_{ar} \eta'_{pc}}{\Delta p'_{ar} \overline{\gamma}''_{ar} \eta''_{p\cdot c}} \right), \tag{26}$$

$$c = \frac{\chi''}{\chi'} \left(\frac{Q''_r \eta''_b}{Q'_r \eta'_b} \right), \tag{27}$$

unde D reprezintă debitul de abur la turbină, kg/h.

În acest caz,

$$\frac{\psi''_p}{\psi'_p} = (a\overline{P}_{p\cdot a} + b\overline{P}_{p\cdot c} + c\overline{P}_{aux}) \left(\frac{Q'_r \eta'_b}{Q''_r \eta''_b} \right), \tag{28}$$

iar dacă ţinem seama de ecuaţiile (25), (26), (27), raportul ψ''_p/ψ'_p este dat de ecuaţia

$$\frac{\psi''_p}{\psi'_p} = \overline{P}_{aux} + \frac{d''_e}{d'_e} \left(\frac{p''_a}{p'_a} \overline{P}_{p\cdot a} + \frac{\alpha''_c}{\alpha'_c} \frac{\Delta p''_{ar}}{\Delta p'_{ar}} \overline{P}_{p\cdot c} \right). \tag{29}$$

În ecuaţia (2), mărimile $\overline{P}_{p\cdot a}$, $\overline{P}_{p\cdot c}$, $\overline{P}_{aux}$ sînt constante şi se determină pentru un regim dat de funcţionare a C.N.E. care se ia de referinţă, iar

$$\overline{P}_{p\cdot a} + \overline{P}_{p\cdot c} + \overline{P}_{aux} = 1. \tag{30}$$

Pentru rapordul $\frac{d''_e}{d'_e}$ se obţine ecuaţia

$$\frac{d''_e}{d'_e} = \left(\frac{G' \overline{C}_{p'\cdot r}}{G'' \overline{C}''_{p\cdot r}} \right) \left(\frac{\Delta t'_r}{\Delta t''_r} \right) \left(\frac{\eta'_b}{\eta''_b} \right). \tag{31}$$

Dacă se ţine seama de ecuaţiile (29) şi (31), expresia pentru raportul ψ''_p/ψ'_p devine

$$\frac{\psi''_p}{\psi'_p} = \overline{P}_{aux} + \left(\frac{G' \overline{C}'_{p\cdot r}}{G'' \overline{C}''_{pr}} \right) \left(\frac{\Delta t'_r}{\Delta t''_r} \right) \left(\frac{\eta'_b}{\eta''_b} \right) \left(\frac{p''_a}{p'_a} \overline{P}_{p\cdot a} + \frac{\alpha''_c \Delta p''_{ar}}{\alpha'_c \Delta p'_{ar}} \overline{P}_{p\cdot c} \right). \tag{32}$$

În cazul cînd considerăm invariabili parametrii geometrici ai circuitului de răcire al condensatorilor şi se neglijează variaţia coeficientului de rezistenţă hidraulică al acestuia cu sarcina reactorului, precum şi $\overline{\gamma}_{ar}$ = const, pierderile de presiune în circuitul de răcire al condensatorului sînt

$$\frac{\Delta p''_{ar}}{\Delta p'_{ar}} = \left(\frac{\alpha''_c}{\alpha'_c}\right)^2, \tag{33}$$

iar ecuaţia (32) devine

$$\frac{\psi''_p}{\psi'_p} = \overline{P}_{aux} + \left(\frac{G'\overline{C}'_{pr}}{G''\overline{C}''_{pr}}\right)\left(\frac{\Delta t'_r}{\Delta t''_r}\right)\left(\frac{\eta'_b}{\eta''_b}\right)\left[\frac{p''_a}{p'_a}\overline{P}_{p.a} + \left(\frac{\alpha''_c}{\alpha'_c}\right)^3 \overline{P}_{p.c}\right]. \tag{34}$$

În ecuaţia (34), mărimea ψ_p este direct proporţională cu p_a şi α_c. Ecuaţia (34) permite efectuarea analizei influenţei lui Δt_r asupra lui ψ_p pentru G = const sau a mărimii G asupra lui ψ_p pentru Δt_r = const.

În cazul cînd Q_r = const, ψ_p este funcţie de p_a, α_c^3 şi η_b.

Ecuaţia (34) permite de asemenea să se studieze pentru G = const, Δt_r = const şi p_a = const influenţa condiţiilor climaterice de amplasare a C.N.E. asupra lui ψ_p prin intermediul lui α_c.

Avînd în vedere faptul că pentru majoritatea tipurilor de reactori nucleari se utilizează cicluri cu abur saturat şi separator de umiditate, în lucrare a fost luat în consideraţie un astfel de ciclu. Se consideră că drenajele din preîncălzitorii de înaltă presiune se scurg în cascadă în degazor. În degazor se introduce de asemenea drenajul de la separatorul de umiditate, iar alimentarea cu abur a degazonului se face dinainte de separator. Drenajele din preîncălzitorii de joasă presiune se scurg în cascadă pînă în ultimul preîncălzitor, iar din aceasta în punctul de amestec situat între ultimul şi penultimul preîncălzitor de joasă presiune.

La deducerea ecuaţiei randamentului termic pentru un astfel de ciclu termodinamic am admis următoarele ipoteze :

— se consideră variabilă repartiţia preîncălzirii regenerative τ a apei de alimentare în schema de regeneraţie termică ;

— se consideră variabilă căldura de condensaţie a aburului q în toate prizele regenerative ;

— se consideră constantă diferenţa θ dintre temperatura drenajului şi a apei de alimentare la ieşire din preîncălzitorii regenerativi ;

— se ţine seama de lucrul pompei de alimentare Δi_p care trece în căldură.

Ţinînd seama de aceste ipoteze, randamentul ciclului termic se poate exprima

$$\eta_t = 1 - \frac{\alpha_c q_c}{i_0 - (\bar{t}_a + \Delta i_p)}, \tag{35}$$

unde

α_c reprezintă debitul relativ de abur în condensator,

q_c — diferența dintre entalpia aburului la intrare în condensator i_c și entalpia condensatului t_c, kcal/kg,

$\bar{t}_a$ — entalpia apei de alimentare, kcal/kg.

În ecuația (35), pentru debitul relativ de abur în condensator se obține ecuația

$$\alpha_c = 1 - \left\{\left(\sum_1^{z_i} \frac{\tau_i}{q_i} - X\right)\left[1 - \frac{B + D(B + CD - 1)}{1 - CD}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{A(1 - D) + D(1 + C)}{1 - CD} + MY\right\}, \tag{36}$$

unde

$$X = \left[a\frac{\tau_{1i}}{q_{2i}} + (a + b)\frac{\tau_{2i}}{q_{3i}} + (a + b + c)\frac{\tau_{3i}}{q_{4i}} + (a + b + c + d)\frac{\tau_{4i}}{q_{5i}} + \cdots\right], \tag{37}$$

$$a = \frac{\tau_{1i}}{q_{1i}}, \tag{38}$$

$$b = \frac{\tau_{2i}}{q_{2i}} - a\frac{\tau_{1i}}{q_{2i}}, \tag{39}$$

$$c = \frac{\tau_{3i}}{q_{3i}} - (a + b)\frac{\tau_{2i}}{q_{3i}}. \tag{40}$$

$$d = \frac{\tau_{4i}}{q_{4i}} - (a + b + c)\frac{\tau_{3i}}{q_{4i}}, \tag{41}$$

$$e = \frac{\tau_{5i}}{q_{5i}} - (a + b + c + d)\frac{\tau_{4i}}{q_{5i}}, \tag{42}$$

$$A = \frac{\tau_d}{q_d + \tau_d}, \tag{43}$$

$$B = \frac{\tau_d + \tau_{3i} + \theta + \Delta i_p}{q_d + \tau_d}, \tag{44}$$

$$C = \frac{\bar{t}_s - \left(\bar{t}_c + \Delta\bar{t} + \sum_1^{z_j} \tau_{ij}\right)}{q_d + \tau_d}, \tag{45}$$

unde

τ_{1i}, τ_{2i}, τ_{3i}, τ_{4i} reprezintă creșterile de entalpie în preîncălzitorii de înaltă presiune, kcal/kg,

τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} — creșterile de entalpie în preîncălzitorii de joasă presiune, kcal/kg,

q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}, q_{4i} — entalpia de condensație a aburului în preîncălzitorii de înaltă presiune, kcal/kg,

q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, q_{4j} — entalpia de condensație a aburului în preîncălzitorii de joasă presiune, kcal/kg,

$\Delta\bar{t} = 3 \ldots 6$ kcal/kg — creșterea de entalpie în punctul de amestec dintre preîncălzitorii de joasă presiune.

Mărimea $\Delta\bar{t}$ se dă inițial, apoi se stabilește prin aproximații succesive:

$$D = \frac{i_2 - i_1}{i_2 - \bar{t}_s}, \tag{46}$$

unde

i_1, i_2 reprezintă entalpia aburului la intrarea și la ieșirea din separatorul de umiditate, kcal/kg,

$\bar{t}_s$ — entalpia drenajului din separator, kcal/kg,

$$M = \left\{1 - \left(\sum_1^{z_i} \frac{\tau_i}{q_i} - X\right)\left[1 + \frac{B - D(B + CD - 1)}{1 - CD}\right] - \left[\frac{A + D(1 - A + C)}{1 - CD}\right]\right\}, \tag{47}$$

$$Y = \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}} + \left(\frac{\tau_{2j}}{q_{2j}} - \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}}\frac{\tau_{1j}}{q_{2j}}\right) + \left[\frac{\tau_{3j}}{q_{3j} + \tau_{3j} + R} - \frac{\tau_{2j} + \tau_{3j} + R}{q_{3j} + \tau_{3j} + R}\left(\frac{R}{\theta}\right)\right], \tag{48}$$

iar

$$R = \theta\left(\frac{\tau_{1j}}{q_{1j}} + \frac{\tau_{2j}}{q_{2j}} - \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}}\frac{\tau_{1j}}{q_{2j}}\right). \tag{49}$$

Mărimea X din ecuația (37) se determină în funcție de Z_i; pentru $Z_i = 1$ se ia în considerare numai primul termen. Pentru $Z_i = 2$ se consideră primii doi termeni a.m.d.

Mărimea Y din ecuația (48) se determină în funcție de Z_j; pentru $Z_j = 1$ se ia în considerație numai primul termen. Pentru $Z_j = 2$ se consideră primii doi termeni a.m.d.

Mărimea Y a fost dedusă pentru condiția cînd $Z_j \leqslant 3$, întrucît de obicei la C.N.E. Z_j nu trece de această valoare.

Metoda de determinare a randamentului termic a fost aplicată pentru un ciclu de C.N.E. cu abur saturat la parametrii $p_0 = 60$ ata, $p_c = 0{,}03$ ata și presiunea la intrare în separatorul de umiditate $p_s = 5$ ata.

În figura 1 se prezintă dependența dintre randamentul termic al ciclului în funcție de $\bar{t}_a$ și Z.

Alura acestor curbe este identică cu cele obţinute pentru ciclurile cu abur supraîncălzit, iar influenţa lui Z asupra lui η_t este de asemenea identică.

Variaţia randamentului net al C.N.E. cu ciclu cu abur saturat menţionat în funcţie de $\bar{t}_a$ este dată în figura 2.

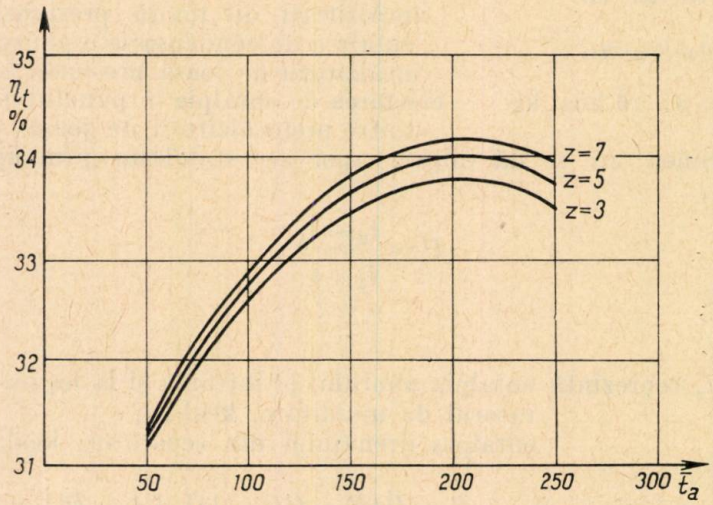


Fig. 1. — Variaţia randamentului termic al ciclului termic cu abur saturat în funcţie de entalpia apei de alimentare şi Z: p_0 — 60 ata; p_s — 5 ata; p_c — 0,03 ata.

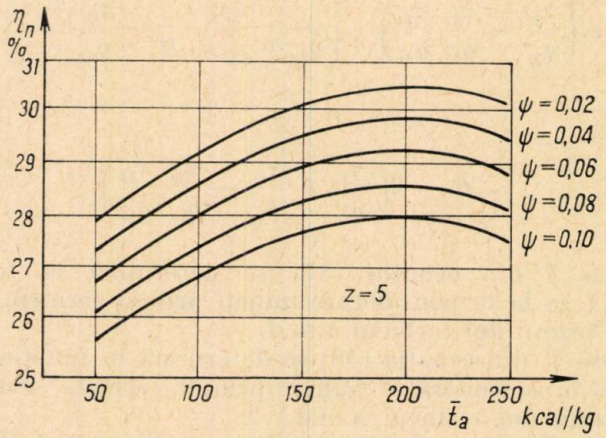


Fig. 2. — Variaţia randamentului net al C.N.E. în funcţie de entalpia apei de alimentare şi ψ pentru $Z = 5$: p_0 — 60 ata; p_s — 5 ata; p_c — 0,03 ata; $0{,}02 \leqslant \psi \leqslant 0{,}10$.

Se observă influenţa importantă a mărimii ψ asupra alurii curbelor $\eta_n = f(\bar{t}_a)$ şi asupra poziţiei maximului curbelor. Cu creşterea lui ψ, valoarea optimă a lui t_a este mai ridicată.

În figura 3 se prezintă curbele $\alpha_c = f(t_a)$ pentru ciclul cu abur saturat. Se observă dependența practic liniară a lui α_c funcție de $\bar{t}_a$ aproape pentru întreg domeniul de variație a lui $\bar{t}_a$. Cu creșterea lui z, mărimea α_c scade în mod egal pentru toate valorile lui $\bar{t}_a$.

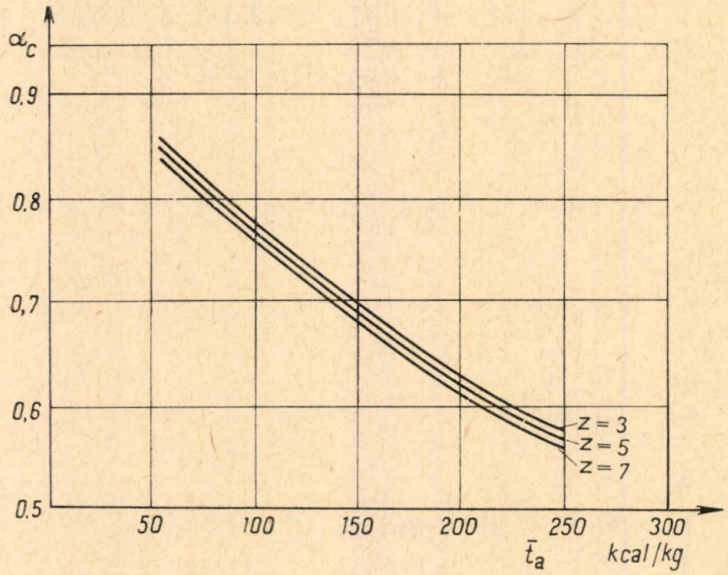


Fig. 3. — Dependența dintre debitul relativ de abur în condensator și entalpia apei de alimentare pentru ciclul cu abur saturat și $3 \leqslant Z \leqslant 7$.

În cazul ciclului direct cu abur supraîncălzit, ecuația pentru randamentul termic se obține sub forma

$$\eta_t = 1 - \frac{\left\{1 - \left[(1 - B_1)\left(\sum_1^{zi} \frac{\tau_i}{q_i} - X\right) + A + M_1 Y\right]\right\} q_c}{i_0 - (\bar{t}_a + \Delta i_p)}, \qquad (50)$$

unde mărimile A și Y se exprimă cu ecuațiile (43) și (48), iar pentru B_1 și M_1 se obțin ecuațiile

$$B_1 = \frac{\tau_{zi} + \Delta i_p + \theta}{q_a + \tau_a}, \qquad (51)$$

$$M_1 = (1 - A) - (1 - B_1)\left(\sum_1^{zi} \frac{\tau_i}{q_i} - X\right). \qquad (52)$$

Ecuația (50) a fost obținută pentru cazul cînd drenajele din preîncălzitorii de joasă presiune se scurg în cascadă în condensator.

În cazul cînd se consideră ciclul cu abur supraîncălzit şi cu punct de amestec între ultimul şi penultimul preîncălzitor regenerativ de joasă presiune, ecuaţia pentru randamentul termic devine

$$\eta_t = 1 - \frac{\left\{1 - \left[(1 - B_1)\left(\sum_1^{Zi} \frac{\tau_i}{q_i} - X\right) + A + M_1 Y_1\right]\right\} q_c}{i_0 - (\bar{t}_a + \Delta i_p)}, \tag{53}$$

unde

$$Y_1 = a_1 + b_1 + c_1 + [Z_1 - (a_1 + b_1 + c_1)Z_2], \tag{54}$$

$$a_1 = \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}}, \tag{55}$$

$$b_1 = \frac{\tau_{2j}}{q_{2j}} - \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}} \frac{\tau_{1j}}{q_{2j}}, \tag{56}$$

$$c_1 = \frac{\tau_{3j}}{q_{3j}} - \frac{\tau_{1j}}{q_{1j}} \frac{\tau_{2j}}{q_{3j}} - \frac{\tau_{2j}^2}{q_{2j}^2} + \frac{\tau_{1j}^2 \tau_{2j}}{q_{1j} q_{2j} q_{3j}}, \tag{57}$$

$$Z_1 = \frac{\tau_{4j}}{\tau_{4j} + q_{4j}}, \tag{58}$$

$$Z_2 = \frac{\tau_{3j} + \tau_{4j} + \Delta\bar{t} + 2\theta}{\tau_{4j} + q_{4j}}. \tag{59}$$

În ecuaţia (54), pentru $Z_j = 1$ se ia în consideraţie primul termen, pentru $Z_j = 2$ se consideră primii doi termeni a.m.d.

Randamentul termic al ciclului direct cu abur supraîncălzit a fost obţinut de asemenea pornind de la următoarele considerente :

— s-a considerat constantă repartiţia creşterii entalpiei apei de alimentare τ în treptele de preîncălzire regenerativă ;

— s-a considerat constantă entalpia de condensaţie a aburului în prizele de înaltă şi de joasă presiune q_i şi q_j;

— s-a ţinut seama de lucrul pompei de alimentare care trece în căldură.

Ţinînd seama de aceste considerente, pentru randamentul termic al ciclului direct se obţine ecuaţia

$$\eta_t = 1 - \frac{\alpha[\gamma(1 - \nabla - \beta) + \beta]q_c}{i_0 - (\bar{t}_a + \Delta i_p)}, \tag{60}$$

unde

$$\alpha = \left(1 - \frac{\tau}{q_j}\right)^{Z_j}, \tag{61}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{\tau}{q_i}\right)^{Z_i}, \tag{62}$$

$$\nabla = \frac{\tau}{q_j + \tau}, \tag{63}$$

$$\beta = \frac{\tau + \theta}{q_j + \tau}, \tag{64}$$

$$\tau = \frac{\bar{t}_a - \bar{t}_c}{Z_i + Z_j + 1}, \tag{65}$$

θ reprezentînd diferenţa dintre temperatura drenajelor şi a apei la ieşire din preîncălzitorii regenerativi.

Ecuaţia (60) a fost utilizată în paralel cu ecuaţia (50) pentru analiza termodinamică a unui ciclu direct cu parametrii $p_0 = 100$ ata, $t_0 = 500°C$ şi presiunea în condensator $p_c = 0{,}03$ ata.

Rezultatele obţinute pentru η_t sînt prezentate în tabela 1.

Din aceste rezultate apare evident faptul că cele două metode dau practic aceleaşi rezultate pentru η_t. În acest mod, ecuaţia (60) poate fi

Tabela 1

Z	$\bar{t}_a$, $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	η_t	
		ecuaţia (50)	ecuaţia (60)
3	50	36,9	36,8
	150	39,85	39,8
	250	41,3	41,3
	300	41,5	41,3
5	50	36,95	37
	150	40	40,1
	250	41,6	41,65
	300	41,8	41,3
7	50	36,95	36,8
	150	40,1	40,1
	250	41,7	41,8
	300	41,9	42,1
10	50	36,9	36,9
	150	40,2	40,2
	250	41,8	41,7
	300	42,2	42,2

utilizată în probleme de optimizare a parametrilor ciclurilor termodinamice. Ecuaţiile (50) şi (53) pot fi utilizate pentru cazuri cînd se pune problema analizării lui η_t pentru repartiţii neuniforme a preîncălzirii regenerative ale apei de alimentare pe preîncălzitori.

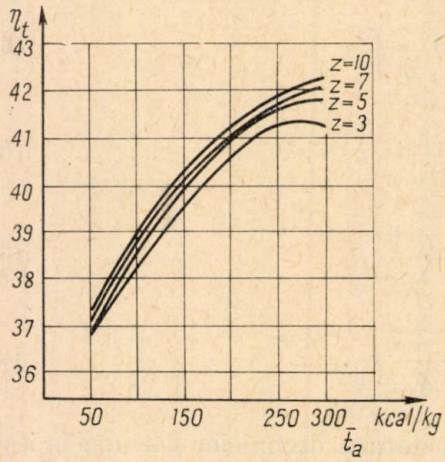


Fig. 4

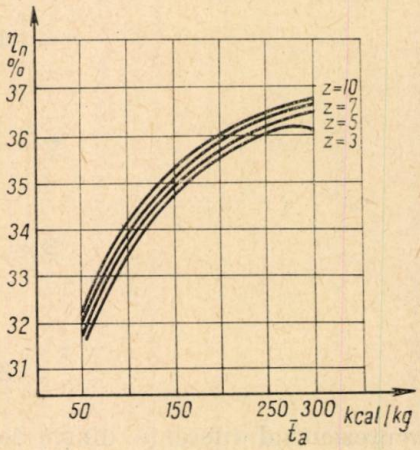


Fig. 5

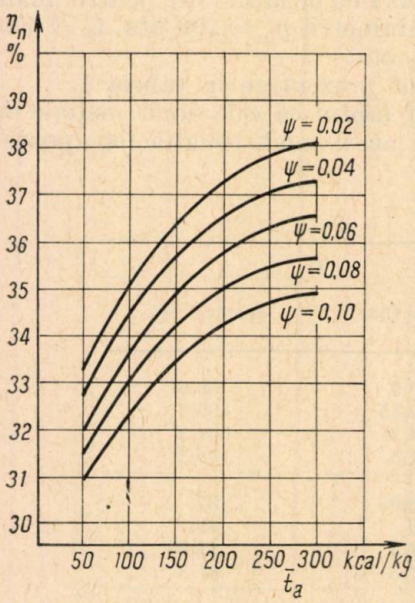


Fig. 6

Fig. 4. — Variaţia randamentului termic al ciclului direct cu abur supraîncălzit în funcţie de entalpia apei de alimentare: p_0 — 100 ata; t_0 — 500°C; p_c — 0,03 ata.

Fig. 5 — Variaţia randamentului net al C.N.E. cu abur supraîncălzit şi cu ciclu termic direct în funcţie de entalpia apei de alimentare: p_0 — 100 ata; t_0 — 500°C; p_c — 0,03 ata; ψ — 0,06.

Fig. 6. — Variaţia randamentului net al C.N.E. cu abur supraîncălzit şi cu ciclu termic direct în funcţie de entalpia apei de alimentare şi consumul relativ intern de putere la serviciile interne ale C.N.E.: p_0 — 100 ata; t_0 — 500°C; p_c — 0,03 ata.

În figurile 4, 5 şi 6 se prezintă variaţia randamentelor termice şi nete în funcţie de $\bar{t}_a$ pentru ciclul direct cu abur supraîncălzit.

Se remarcă influenţa lui ψ asupra poziţiei maximului curbelor $\eta_n = f(\bar{t}_a)$ şi asupra valorilor optime pentru $\bar{t}_a$ care se obţin din aceste curbe.

În figurile 7 și 8 se dă dependența mărimilor α și γ funcție de $\bar{t}_a$ pentru ciclul cu abur supraîncălzit.

În diagramele 7 și 8, $(1-\alpha)$ și $(1-\gamma)$ reprezintă debitele relative de abur în prizele de înaltă și, respectiv, de joasă presiune. Se observă variația liniară a acestor mărimi în funcție de $\bar{t}_a$.

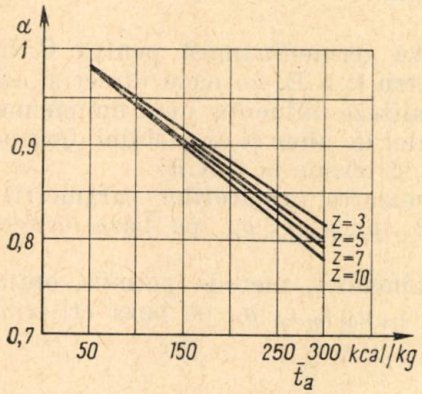


Fig. 7. — Variația mărimii α în funcție de entalpia apei de alimentare pentru $3 \leqslant Z \leqslant 10$ în cazul ciclului termic direct cu abur supraîncălzit.

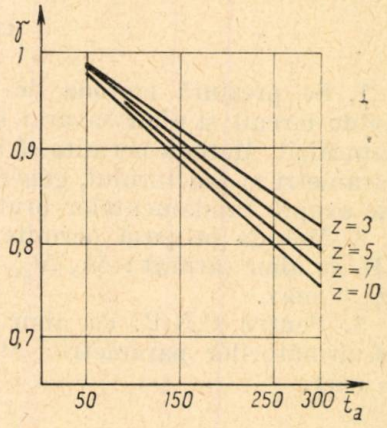


Fig. 8. — Variația mărimii b în funcție de entalpia apei de alimentare pentru $3 \leqslant Z \leqslant 10$ în cazul ciclului termic direct cu abur supraîncălzit.

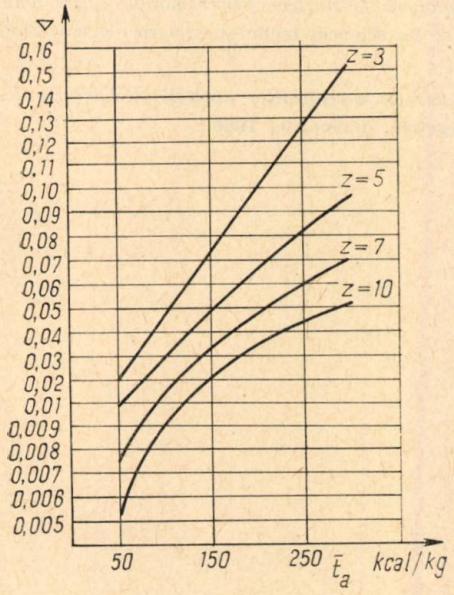


Fig. 9. — Dependența mărimii ∇ în funcție de entalpia apei de alimentare pentru $3 \leqslant Z \leqslant 10$ în cazul ciclului termic direct cu abur supraîncălzit.

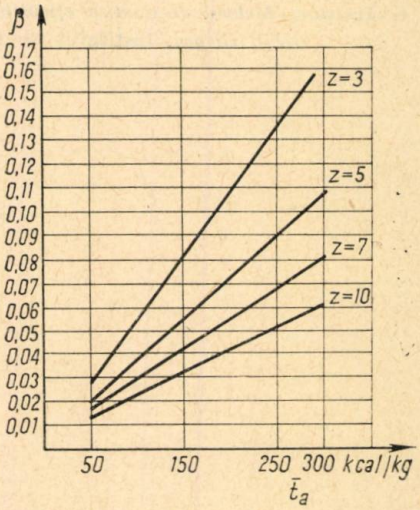


Fig. 10. — Dependența dintre β și entalpia apei de alimentare pentru $3 \leqslant Z \leqslant 10$ în cazul ciclului termic cu abur supraîncălzit.

Variaţia mărimilor ∇ şi β în funcţie de $\bar{t}_a$ este asemănătoare şi este dată în figurile 9 şi 10.

Utilizarea ecuaţiei (60) pentru determinarea lui η_t conduce la simplificarea calculelor faţă de ecuaţiile (50) şi (53).

CONCLUZII

1. Se prezintă metoda de analiză termodinamică pentru C.N.E. cu dublu circuit şi abur saturat şi pentru C.N.E. cu ciclu direct şi abur supraîncălzit. Metoda permite să se analizeze influenţa unui număr mare de parametri ai reactorului, generatorului de abur şi ai ciclului termodinamic asupra randamentelor brut, net şi termic ai C.N.E.

2. Metoda propusă permite optimizarea următorilor parametrii ai C.N.E. cu abur saturat : Δt_r, Δt_{ga}, ψ_{c1}, ψ_p, p_0, p_s, $\bar{t}_a$, p_c, pe baza criteriului $\eta_n = \max$.

3. Pentru C.N.E. cu abur supraîncălzit, metoda permite optimizarea următorilor parametri : Δt_r, ψ_{c1}, ψ_p, p_0, t_0, $\bar{t}_a$, p_c, pe baza criteriului $\eta_n = \max$.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Haiduc, *Modelul matematic de analiză termodinamică a ciclurilor centralelor nucleare-electrice cu reactori moderaţi cu apă grea*, Institutul de energetică, memoriu, 1967

2. C. Haiduc, P. Vidican, *Thermodynamic analysis of nuclear power station cycles with gas — cooled reactors*, Revue roumaine des sciences techniques, serie electrotechnique et energetique, **13**, *2* (1968).

3. C. Haiduc, *Metoda de analiza eficacităţii termice a centralelor nucleare-electrice cu reactorĕ răciţi cu gaz*, Institutul de energetică, memoriu, 1966.

CONSIDERAȚII ASUPRA MECANISMULUI DE APARIȚIE A INSTABILITĂȚILOR SUB FORMĂ OSCILATORIE LA UN SISTEM BIFAZIC FIERBĂTOR APĂ-ABUR

DE

RASIN GEORGESCU

536.24 ; 621.03

Articolul prezintă un mecanism nou care explică comportarea instabilităților de tip oscilatoriu a unui sistem bifazic fierbător apă-abur. Compararea valorilor experimentale cu valorile frecvențelor calculate cu ajutorul mecanismului propus arată o concordanță foarte bună.

Se calculează de asemenea valorile razei inițiale de formare a bulelor de abur, care corespund foarte bine cu cele utilizate de Plesset și Zwick.

1. INTRODUCERE

Studiul sistemelor hidrodinamice cu schimbări mari de densitate ale fluidelor din canale încălzite a pus în evidență comportări instabile, care pot avea loc fie cu schimbarea, fie fără schimbarea fazei. Primul caz poate apărea în cazul reactorilor nucleari fierbători, pe cînd al doilea în aparate în care fluidul se află în presiuni supracritice. Instabilitățile pot fi de următoarele forme :

a) criză de fierbere asociată cu creșteri rapide de temperatură ale pereților ;

b) redistribuirea debitului fluidului între canalele paralele prin care curge ;

c) apariția unor oscilații armonice a tuturor parametrilor hidrodinamici, ceea ce face imposibilă o creștere a puterii aparatului.

Lucrarea de față încearcă să prezinte un mecanism privind cauzele apariției ultimului tip de instabilități în canale verticale.

În ultimii 20 de ani au fost publicate foarte multe lucrări teoretice și experimentale care recomandă diferite modele privind mecanismul de oscilație a curgerilor bifazice [1]—[11]. În cea mai mare parte, aceste modele consideră curgerea bifazică omogenă, scoțîndu-se în relief influența predominantă asupra mecanismului de producere a oscilațiilor a unor parametri ca subrăcirea, presiunea și pierderile de presiune datorită curgerii bifazice. Studiile comparative efectuate au evidențiat însă discrepanțe mari între diferitele modele propuse, stabilindu-se existența

unei mari diferențe între fluxul termic prezis de modele și cel real. Astfel apare necesitatea de a se încerca interpretarea fizică a acestor fenomene pentru a se putea înțelege mecanismul lor fizic. Acest lucru încearcă să-l realizeze lucrarea de față într-o formă simplificată.

2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ ȘI METODICA DE EVIDENȚIERE A MECANISMULUI OSCILATORIU

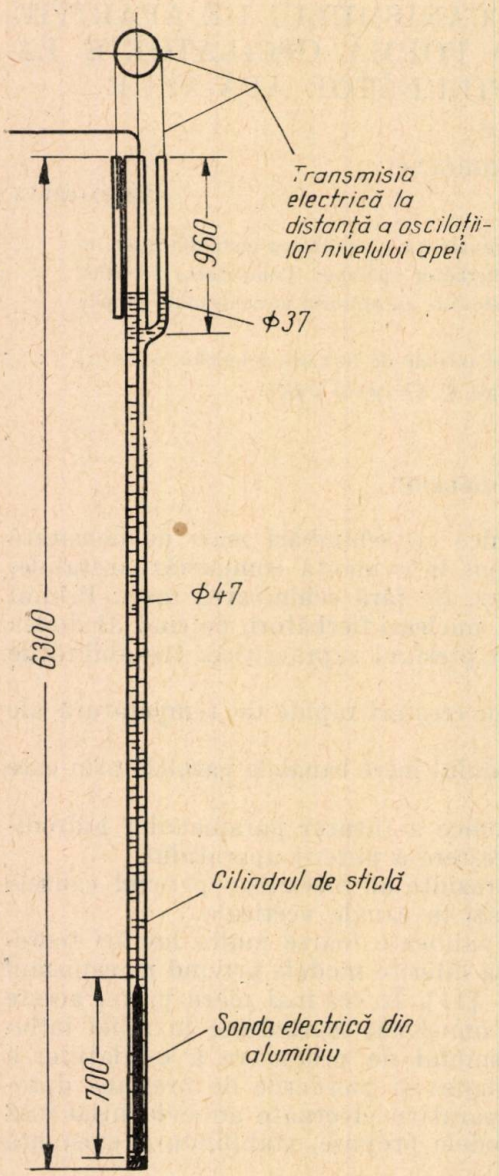


Fig. 1. — Instalația experimentală.

Instalația experimentală constă dintr-un tub vertical rotund închis la capătul inferior și deschis la cel superior (presiunea atmosferică). În interiorul tubului este plasată o sondă electrică de aluminiu, care poate fierbe apa în partea inferioară a tubului.

Tubul este un cilindru de sticlă cu diametrul interior de 47 mm, înălțimea de 6,3 m și grosimea peretelui de 3 mm (fig. 1). Puterea electrică maximă de 2,5 kW se aplică încălzitorului, care are un diametru exterior de 25 mm și 700 mm înălțime, ea măsurîndu-se cu ajutorul unui ampermetru și voltmetru clasa 0,5.

Temperaturile se măsoară cu termocuple cupru-constantan cu diametrul 0,2 mm în două puncte pe suprafața sondei de aluminiu, într-un punct pe suprafața exterioară a tubului de sticlă în dreptul zonei de fierbere și la diferite nivele ale apei pe înălțimea coloanei de apă din tubul de sticlă.

Oscilațiile nivelului apei din interiorul cilindrului de sticlă experimental sînt urmărite de un flotor cu transmisie electrică a acestora la distanță.

Au fost obținute date experimentale și la o instalație unde cilindrul în care fierbe apa este din aluminiu, avînd diametru interior de 40 mm, o înălțime de 7,5 m și o grosime a peretelui de 2 mm. Încălzitorul electric a fost identic cu cel utilizat pentru fierberea apei în cilindrul de sticlă [12].

Pierderile termice au fost estimate în zona de fierbere la 10% pentru cilindrul de sticlă și 12% pentru cilindrul de aluminiu.

Au fost făcute măsurători pentru 500, 750 și 1800 kcal/oră. Timpul de experimentare pentru fiecare serie de experiențe a fost de maximum 200 min.

Comportarea oscilatorie apare astfel: se aplică o putere electrică sondei de încălzire și se reglează la nivelul constant dorit. Aburul produs se acumulează în sistemul format de cantitatea de apă existentă în cilindrul de sticlă și dislocă o cantitate de apă corespunzătoare volumului său. În consecință, nivelul apei crește în interiorul cilindrului de sticlă, creîndu-se o suprapresiune în sistem față de nivelul inițial. Apoi producerea aburului încetează și aburul dispare în interiorul cilindrului de sticlă, condensîndu-se, ceea ce se poate observa bine prin peretele transparent al acestuia. În continuare, nivelul lichidului scade și, ca rezultat, suprapresiunea descrește treptat pînă ce condițiile inițiale sînt restabilite. Producția de abur reîncepe, nivelul apei și deci suprapresiunea crește din nou pînă cînd formarea bulelor încetează aburul se condensează, suprapresiunea scade și așa mai departe.

3. MECANISMUL COMPORTĂRII OSCILATORII A SISTEMULUI BIFAZIC FIERBĂTOR

Comportarea oscilatorie poate fi explicată pe baza următoarelor trei observații:

— *prima observație*: cînd se aplică un flux termic unui sistem monofazic staționar și acesta începe să fiarbă, apare o perioadă tranzitorie de timp în care în sistem se acumulează treptat abur;

— *a doua observație*: cu toate că greutatea cantității de abur care rămîne în sistem este mică, volumul ocupat de el poate fi important, în special la presiuni reduse. Astfel aburul din sistem dislocă o cantitate de lichid corespunzătoare volumului său. Cantitatea de lichid dislocat de aburul rămas în sistem dă naștere la o suprapresiune în interiorul sistemului bifazic peste presiunea inițială a sistemului egală cu greutatea lichidului dislocat raportată la secțiunea sistemului;

— *a treia observație* legată de formarea bulelor: bula de abur poate crește pornind de la un mic „nucleu" stabilizat pe un perete solid, cînd presiunea internă a ei depășește presiunea ambiantă a sistemului. Creșterea bulei de abur este determinată de tensiunea superficială, de inerția lichidului și de diferența de presiune dintre presiunea din interiorul bulei și cea din exteriorul ei. După relația lui Laplace, această diferență de presiune este definită de ecuația

$$\Delta P_0 = \frac{2\sigma}{R_0}, \tag{1}$$

unde R_0 este raza inițială efectivă a bulei pentru condițiile date, iar σ tensiunea superficială a lichidului. Cînd suprapresiunea datorată acumulării treptate a aburului în sistem în timpul perioadei tranzitorii depășește diferența de presiune necesară formării bulelor dată de relația (1), producerea aburului încetează. Formarea bulelor reîncepe numai cînd această suprapresiune încetează să mai acționeze datorită dispariției aburului din sistem prin condensare.

Considerînd cele trei observaţii de mai sus, mecanismul producerii instabilităţii unui sistem bifazic sub formă oscilatorie poate fi următorul. Se aplică un flux termic constant unui sistem monofazic la o presiune iniţială, astfel că în sistem are loc fierberea lichidului. Apare imediat o perioadă în care se acumulează treptat în sistem o cantitate de abur care dislocuieşte treptat o cantitate de apă corespunzătoare volumului său. Cînd cantitatea de apă dislocată creează în sistem o suprapresiune peste presiunea iniţială care depăşeşte valoarea diferenţei de presiune necesară apariţiei bulelor dată de ecuaţia (1), atunci producerea bulelor de abur încetează pe suprafaţa sondei. Datorită acestui fapt, suprapresiunea dispare, presiunea în sistem revenind la presiunea iniţială.

Formarea bulelor reîncepe, aburul se acumulează din nou şi dislocă o cantitate de apă în sistem, producînd o suprapresiune care anihilează formarea bulelor. Apoi se revine la situaţia iniţială şi aşa mai departe. Astfel aparte o comportare oscilatorie a sistemului bifazic. Dacă suprapresiunea dată de dislocarea fluidului nu depăşeşte valoarea diferenţei de presiune dată în ecuaţia (1), atunci formarea bulelor are loc în mod continuu, obţinîndu-se un regim staţionar stabil, fără să mai apară o comportare oscilatorie a sistemului.

Amplitudinea oscilaţiilor este dată de valoarea ΔP_0 (vezi (1)) pentru presiunea corespunzătoare a sistemului.

O semiperioadă a oscilaţiilor poate fi considerată egală cu timpul necesar pentru acumularea aburului pînă ce suprapresiunea în sistem anihilează formarea bulelor, iar cealaltă semiperioadă constă din timpul necesar ca suprapresiunea să descrească pînă la condiţiile iniţiale. Cele două semiperioade nu sînt egale. Timpul cît durează prima semiperioadă poate fi calculat făcînd raportul dintre diferenţa de presiune necesară formării bulelor (1) şi suprapresiunea datorită acumulării aburului în sistem în fiecare unitate de timp. În cazul cînd se iau în consideraţie forţele de fricţiune, de inerţie şi cele elastice, valorile perioadelor de oscilaţie şi ale amplitudinilor se schimbă corespunzător.

Dacă cantitatea de abur care rămîne în sistem în unitatea de timp este $k\,X\,G$, atunci suprapresiunea creată în sistem în unitatea de timp de volumul de apă dislocuit de acest abur este dată de relaţia

$$\Delta P = \frac{kXG'\gamma'}{\gamma''F} = \frac{kG''\gamma'}{\gamma''F}, \tag{2}$$

unde $k \leqslant 1$ reprezintă un coeficient proporţional cu cantitatea de abur care rămîne în sistem şi este funcţie de parametrii geometrici, termici şi hidrodinamici ai sistemului.

Pe baza relaţiilor (1) şi (2), valoarea semiperioadei este

$$T = \frac{\Delta P_0}{\Delta P} = \frac{2\sigma\gamma''F}{kG''\gamma'R_0}. \tag{3}$$

Luînd în considerare fluxul termic şi temperatura de intrare a apei, ecuaţia (3) devine

$$T = \frac{\gamma''}{\gamma'}\frac{2\sigma Fr}{kR_0(Q - \Delta iG')}. \tag{4}$$

Ecuația (4) corelează valoarea semiperioadei în funcție de condițiile geometrice, de densitățile specifice ale fazelor, de condițiile de formarea bulelor, de fluxul termic asociat cu subrăcirea (diferența dintre temperatura de saturație pentru presiunea respectivă și temperatura de intrare a fluidului) și de coeficientul K. Dacă se rearanjează ecuația (4), se obține

$$T = \frac{2\sigma}{\gamma' R_0} \frac{1}{\frac{k(Q - \Delta iG')}{\gamma'' Fr}}. \tag{5}$$

Această formă este atractivă pentru interpretarea parametrilor. Astfel grupul $2\sigma/\gamma' R_0$ reprezintă înălțimea coloanei de lichid echivalentă presiunii din interiorul bulelor de abur, iar $k(Q - \Delta iG')/\gamma'' Fr$ înălțimea coloanei de lichid dislocată de aburul cumulat în sistem în unitatea de timp. Pragul de oscilație se obține cînd înălțimea lichidului dislocat în T unități de timp este echivalentă cu ΔP_0.

În cazul cînd presiunea din interiorul bulelor nu poate fi egalată de presiunea dată de înălțimea lichidului dislocuit de aburul care rămîne în sistem, sistemul nu va avea o comportare oscilatorie.

În tabela 1 se arată valorile obținute experimental la instalația descrisă în lucrarea de față, privind comportarea oscilatorie a sistemului, iar figurile 2, 3 și 4 diagramele cu înregistrările variațiilor de nivel ale apei în cilindrul de sticlă pentru fluxurile termice de mai sus.

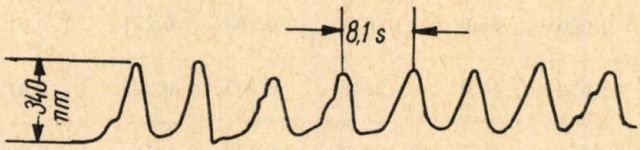


Fig. 2. — Oscilațiile nivelului pentru fluxul termic 447 kcal/oră.

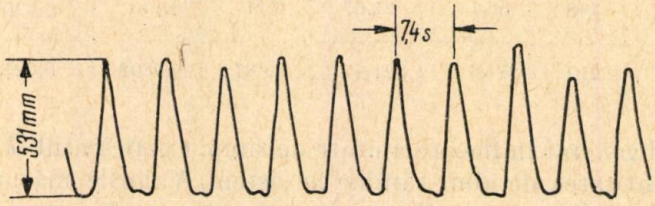


Fig. 3. — Oscilațiile nivelului pentru fluxul termic 743 kcal/oră.

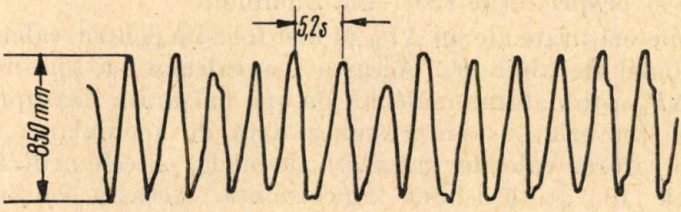


Fig. 4. — Oscilațiile nivelului pentru fluxul termic 1 750 kcal/oră.

Valorile frecvenţelor calculate din tabela 1 sînt egale cu valorile obţinute pentru prima semiperioadă înmulţite cu 2. Semiperioada a fost calculată utilizînd ecuaţia (3), unde ΔP_0 este egal cu valorile măsurate (înălţimea de apă măsurată peste nivelul iniţial), iar suprapresiunea creată în fiecare unitate de timp ΔP este egală cu volumul dislocat de lichid de

Tabela 1

Date experimentale privind comportarea oscilatorie

Nr. experienţei	Q, kcal/h	Cantitatea de abur produs pe s, cm³/s	Înălţimea apei peste nivelul iniţial (supra-pres. măsurată), cm	Secţiunea canalului de fierbere, cm²	Frecvenţa măsurată pe diagramele înreg., Hz	Frecvenţa calculată, Hz	Raza iniţială de formare a bulei de abur calculată cu ajutorul supra-pres. măsurate, R_0, mm	Observaţii
1	447	267	34,0	28,2	0,123	0,138	0,0341	canal de sticlă
2	743	449	53,1	28,2	0,135	0,149	0,0218	idem
3	1 750	1 060	85,0	28,2	0,193	0,221	0,0136	idem
4	1 770	1 070	85,0	28,2	0,199	0,223	0,0136	idem
5	585	354	50,7	21,67	0,122	0,16	0,0229	canal de aluminiu
6	576	348	56,1	21,67	0,11	0,143	0,0207	idem
7	351	212	54,6	21,67	0,087	0,0892	0,0212	idem

către aburul generat în fiecare unitate de timp. Coeficientul $k = 1$, întrucît toată cantitatea de abur rămîne în sistem. Valorile măsurate pe grafice ale frecvenţelor sînt în bună concordanţă cu cele calculate. Factorii care determină valoarea frecvenţelor sînt fluxul termic, dimensiunile geometrice şi proprietăţile fizice ale fluidului.

Valorile măsurate ale lui ΔP_0 au fost folosite pentru calcularea razei iniţiale a bulei de abur R_0. Aceasta s-a calculat cu ajutorul formulei (1), unde ΔP_0 este datorat înălţimii de apă măsurate deasupra nivelului iniţial, care reprezintă suprapresiunea dată de acumularea aburului în sistem. Compararea valorilor calculate ale lui R_0 cu cele utilizate de Plesset şi Zwick [13] arată o bună concordanţă. Aceasta confirmă încă o dată mecanismul oscilatoriu propus.

4. CONCLUZII

Mecanismul fizic propus pentru explicarea comportării oscilatorii a unui sistem bifazic a fost verificat într-o instalație experimentală fără circulație forțată. Observațiile de bază expuse pot explica comportarea oscilatorie a sistemului experimentat. Frecvențele de oscilație măsurate pe diagramele de variație a nivelului coloanei de apă sînt într-o concordanță satisfăcătoare cu frecvențele de oscilație calculate cu ajutorul formulei propuse (3). Valorile obținute au fost verificate și prin calcularea razei inițiale de formare a bulei de abur pe peretele încălzit al sondei electrice și care concordă foarte bine cu valorile experimentale obținute de alți autori.

NOTAȚII

Q — fluxul termic, kcal/h;
F — secțiunea conductei, m^2;
v', v'' — volumul specific al lichidului (aburului), m^3/kg;
$\gamma'\gamma''$ — greutatea specifică a lichidului (aburului), kg/m^3;
X — titlul amestecului, conținutul de abur în greutate, %;
G', G'' — debitul de lichid (abur), kg/h;
r — căldura latentă de vaporizare, kcal/kg;
Δi — diferența de entalpie între entalpia fluidului la saturație și la intrare, kcal/kg;
σ — tensiunea superficială a fluidului, kg/m;
T — semiperioada de oscilație, s;
R_0 — raza inițială a bulei de abur, m;

BIBLIOGRAFIE

1. E. R. Quandt, *Analysis of measurement of flow oscillations*, Chemical Engineering Progress Symposium Series, **57**, *32*, 111 (1961).
2. G. B. Wallis, J. H. Heasley, *Oscillations in two-phase flow systems.*, Transactions of the ASME, Series C, **83**, *3*, august 1961, p. 363.
3. З. Л. Миропольский, *Пульсации расхода в испарительных каналах при наличии упругой среды в предвключенных элементах тракта*, И.Ф.Ж. 8 (1964).
4. J. Boure, *An Analysis of the Density Effect*, Rap. CEA-R3049.
5. I. S. Maulbetsch, P. Griffith, *Prediction of the onset of system induced instabilities in subcooled boiling*, Paper 7.1 at Symposium on two-phase flow dynamics, Eindhoven, 1967.
6. L. G. Neal, S. M. Zivi, R. W. Wright, *The mechanisms of hydro-dynamics instabilites in boiling systems*, Paper 8.1 at Symposium on two-phase flow dynamics, Eindhoven, 1967.
7. N. Zuber, *Flow excursions and oscillations in boiling, two-phase flow systems with heat addition*, Paper 8.4 at Symposium on two-phase flow dynamics, Eindhoven, 1967.
8. I. Randles, *Kinetios of boiling hydraulic loops*, AEEW-R87.
9. K. O. Solberg, P. Bakstad, *A model for the dynamics of nuclear reactors with boiling coolant with a new approach to the vapour generation process*, Paper 7.4 at Symposium.

on two-phase flow dynamics, Eindhoven, 1967.

10. T. Bjrlo, T. Eurola, R. Grumbach, P. Hansson, A. Olsen, J. Rasmusser, K.Romslo, *Comparative studies of mathematical hydrodynamics models applied to selected, boiling channel experiments*, Paper 8.2 at Symposium ont wo-phase flow dynamics, Eindhoven, 1967.
11. C. L. Spigt, P. J. Dijkman, J. E. Tummers, M. Bogaardt, *An analysis of the steady state and stability characteristics of a natural circulation boiling channel*, Proceedings of the third international heat transfer Conference, aug. 1966, Chicago, vol. IV, p. 193.
12. Р. Джорджеску, К. Добреску, *Исследование пульсации поля тепловых нейтронов температуры стенки нагревателя и воды при кипении в активной зоне реактора B.B.P.C.*, ИАФ — ТР 56, 1968.
13. M. S. Plesset, S. A. Zwick, *The growth of vapor bubbles in superheated liquids*, J. Appl. Phys., **25**, *4*, 493 (1954).

ASUPRA NUCLEAŢIEI BULELOR CAVITAŢIONALE*)

DE

VIRGIL BARBU

532.5

Lucrarea reprezintă un studiu experimental şi teoretic asupra transferului termic şi asupra condiţiilor de nucleaţie a bulelor de vapori în zona deformaţiilor elastice şi plastice ale suprafeţei purtătoare.
Sînt scoase în evidenţă unele aspecte interesante pentru cunoaşterea fenomenului nucleaţiei, printre care raza echivalentă a suprafeţei de contact, zona de activare a centrelor de nucleaţie sub influenţa supraîncălzirii peretelui, influenţa microgeometriei cavităţii, a unghiului de contact şi a temperaturii de echilibru.

1. INTRODUCERE

Cavitaţia reprezintă un fenomen de discontinuitate macroscopică în masa unui lichid, apărută prin evoluţia rapidă a unor nuclee (goluri) microscopice în momentul în care starea de echilibru a acestora în lichid încetează. Fenomenul cavitaţiei se apropie astfel foarte mult de acela al fierberii, deosebirea dintre ele fiind mai mult sau mai puţin convenţională; în mod obişnuit, termenul de *cavitaţie* se foloseşte atunci cînd discontinuităţile sînt cauzate prin forţe hidrodinamice, iar cel de *fierbere* atunci cînd apariţia discontinuităţilor este de origine termodinamică. Şi într-un caz, şi în altul, creşterea bulelor microscopice (a nucleelor) se datoreşte dezechilibrului dintre presiunea din interiorul bulei şi cea din exterior, cu diferenţa că în primul caz cauza o constituie scăderea presiunii exterioare, iar în al doilea creşterea presiunii interioare.

O serie de probleme, ca formarea bulelor din nuclee (nucleaţia), creşterea şi condensarea sau surparea bulelor ş.a., sînt comune atît cavitaţiei, cît şi vaporizării.

Într-un sens mai larg deci, cavitaţia trebuie privită ca o fierbere locală a lichidului în zonele unde presiunea sa este suficient de joasă (în

*) Lucrarea a fost realizată în cadrul secţiei de cavitaţie a Bazei din Timişoara a Academiei Republicii Socialiste România, sub conducerea şi îndrumarea directă a tov. prof. dr. ing. I. Anton, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, căruia autorul îi mulţumeşte şi pe această cale pentru ajutorul primit.

zonele de viteză locală ridicată). Se înțelege astfel de ce cercetarea fenomenului cavitației impune în mod necesar considerarea unor aspecte termodinamice caracteristice și, la fel, cercetarea fierberii impune considerarea unor aspecte hidrodinamice.

Cunoașterea îndeaproape a fierberii, în general, și a fierberii nucleare, îndeosebi, va contribui în mare măsură și la stăpînirea apariției fenomenului cavitației. Din păcate, cu tot interesul deosebit de care s-a bucurat în ultimii douăzeci de ani, problema fierberii nucleare este încă departe de a fi lămurită. Una dintre principalele dificultăți este constituită de complexitatea și de variația condițiilor superficiale care afectează activitatea și populația centrelor de nucleație.

Este aproape unanim acceptat astăzi că nucleația bulelor are loc numai în zgîrieturi și adînciturі ale suprafeței purtătoare. Studii convingătoare în această privință au fost efectuate de Westwater [1], [2] și [4], Bankoff [3], Clark, Strange și Westwater [4], Griffith și Wallis [5] ș.a. Se știe însă foarte puțin asupra microgeometriei și dimensiunilor cavităților active, precum și asupra dinamicii acestora sub influența principalilor factori care condiționează fierberea nucleară, ca presiunea de lucru, tensiunea superficială a lichidului, viscozitatea și capacitatea sa de umectare, rugozitatea suprafeței purtătoare, supraîncălzirea peretelui, subrăcirea lichidului etc.

În cadrul lucrării de față se încearcă să se dea unele răspunsuri la aceste probleme legate de nucleația fierberii și deci a cavitației.

2. METODICA DE LUCRU

Pentru a cerceta influența exclusivă a microgeometriei cavităților suprafeței purtătoare asupra activării acestora, restul condițiilor păstrîndu-se aceleași, s-a urmărit efectul modificării microgometriei centrelor de nucleație prin deformația elastică și plastică a suprafeței purtătoare.

Aparatul folosit în acest scop este redat schematic în figura 1; detalii asupra construcției acestuia și asupra metodicii de lucru pot fi găsite într-o lucrare anterioară [6], unde sînt redate de asemenea și unele dintre primele rezultate înregistrate.

După cum s-a arătat în lucrarea citată [6], studiile propuse au fost efectuate pe sîrme subțiri din oțel moale, cu diametrul de $\sim$0,2 mm, încălzite prin efect Joule în curent continuu și menținute în diferite stări de deformație prin întindere. Ca mediu de producere a bulelor de vapori s-a folosit apă distilată, care s-a menținut la temperatura de fierbere sau la temperatura dorită cu ajutorul unei încălziri auxiliare; presiunea de lucru a fost cea atmosferică.

În esență, elementele urmărite în lucrarea de față au fost pragul de activare a centrelor de nucleație, populația centrelor de nucleație, densitatea fluxului termic și coeficientul de convecție termică, în funcție de supraîncălzirea suprafeței firului, la diferite stări de deformare ale acestuia.

Temperatura suprafeței firului s-a determinat pe baza măsurării rezistenței acestuia cu ajutorul unei punți compensatoare; etalonări prealabile au arătat că, pentru intervalul temperaturilor de lucru, materialul folosit prezintă un coeficient de creștere a rezistenței cu tempera-

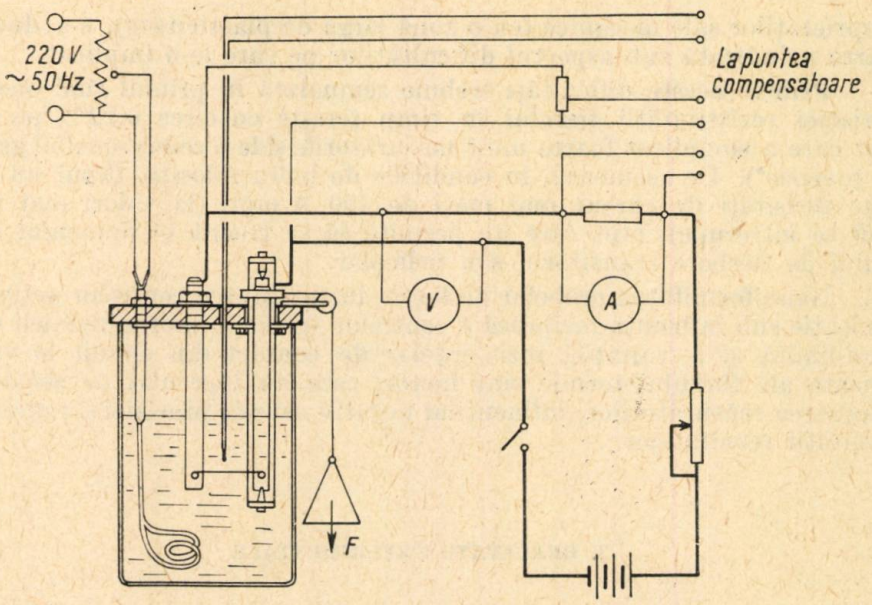


Fig. 1. — Schema instalației de lucru.

tura $\bar{\beta} \equiv \beta_{med} = 3{,}86 \cdot 10^{-3}\ °K^{-1}$, admis constant. Trecerea de la temperatura medie a firului t_m, corespunzătoare rezistenței măsurate, la temperatura peretelui (suprafeței) t_p s-a făcut pe baza corecției

$$t_m - t_p = \frac{r_e q}{\ln\left(1 + \frac{\bar{\beta} r_e q}{2\lambda}\right)} - \frac{1}{\bar{\beta}} \simeq 1/\left(\frac{4\lambda}{r_e q} - \bar{\beta}\right), \qquad (1)$$

dedusă din relația evidentă

$$\frac{\pi r_e^2}{\overline{\rho l}} = \int_0^{r_e} \frac{2\pi r dr}{\rho_t l},$$

cu

$$\rho_t = \rho_{tp}\,[1 + \beta(t - t_p)]$$

și

$$t - t_p = q\frac{r_e}{2\lambda}\left[1 - \left(\frac{r}{r_e}\right)^2\right] ([7], \text{p. } 311),$$

unde r_e este raza exterioară a firului, l lungimea sa, λ conductivitatea termică, ρ rezistivitatea electrică și q densitatea fluxului termic la suprafața firului.

Este de observat că folosirea oțelului ca material de lucru, foarte indicată sub aspectul importanței tehnice a acestuia îndeosebi în construcția de mașini hidraulice, sub aspectul accesibilității și sub aspectul

proprietăților sale mecanice (cu o zonă largă de plasticitate), s-a dovedit foarte neindicată sub aspectul dificultăților pe care le-a implicat.

Printre aceste dificultăți trebuie semnalată în primul rînd aceea a variației rezistivității fierului în timp (crește cu circa 0,22% pe oră), fapt care a complicat foarte mult măsurătorile și le-a redus sensibil gradul de precizie*). De asemenea, în condițiile de lucru folosite, fierul nu permite densități de curent mai mari de 400 A/mm² (la valori mai mari firul se întrerupe), fapt care nu permite să se treacă în domeniul regimului de fierbere tranzitoriu sau pelicular.

Neuniformitatea probelor de lucru, instabilitatea centrelor active de nucleație sub influența reciprocă a centrelor vecine, a hidrodinamicii stratului-limită și a variației rezistențelor de contact din circuit la valori ridicate ale fluxului termic sînt factori care au îngreuiat de asemenea efectuarea măsurătorilor, influențînd negativ asupra preciziei și reproductibilității rezultatelor.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

a) POPULAȚIA CENTRELOR ACTIVE DE NUCLEAȚIE

Principalele rezultate obținute sînt redate în figurile 2—6.

Astfel, în figura 2 este redată influența deformațiilor elastice și plastice ale suprafeței purtătoare asupra populației centrelor de nucleație active Z/A. Măsurătorile corespunzătoare au fost efectuate pentru încărcări termice constante, la stări de întindere variabile ale probelor, în condițiile specificate în explicația figurii (asupra influenței temperaturii lichidului de lucru $\bar{t}_w$, vezi [6], fig. 6 și 7). Se observă că, dacă în zona deformațiilor elastice populația germenilor activi de nucleație nu este practic influențată (vezi și [6], fig. 8), în zona deformațiilor plastice numărul centrelor active crește sensibil cu creșterea deformației (funcție de efortul specific σ). Mărirea populației centrelor active de nucleație prin deformația plastică a suprafeței purtătoare rezultă de asemenea și din figura 3, care redă variația populației nucleelor de vaporizare în funcție de densitatea fluxului termic pentru diferite probe, precum și din figura 4, care redă aceeași variație în funcție de diferența de temperatură, $\Delta t = t_p - \bar{t}_w$.

b) MĂRIMI CARACTERISTICE ALE TRANSFERULUI TERMIC

În figura 5 este redată variația densității fluxului termic q și a coeficientului de convecție α în funcție de diferența de temperatură $\Delta t = t_p - \bar{t}_w$, așa cum rezultă din măsurătorile efectuate (curbele *2*) în comparație cu datele cunoscute în literatura de specialitate (curbele *1*; vezi, de exemplu [7], p. 119, [8], p. 370, sau [9]). Pentru condițiile de lucru folosite (sîrmă din fier cu $d \simeq 0{,}2$ mm, apă distilată la presiunea atmosferică), la

*) Este motivul pentru care fierul este ocolit de cercetători și pentru care datele din literatură asupra nucleației pe suprafețele din fier sînt extrem de sărace.

aceleași valori ale supraîncălzirii Δt s-au obținut valori mult mai mari atît pentru q, cît și pentru α (curbele *1* de referință corespund unei sîrme din platină cu $d \simeq 0{,}14$ mm, de asemenea în apă distilată, la presiunea atmosferică). Variațiile acestora pot fi exprimate astfel:

$$q = 5390 \cdot \Delta t^{1{,}48} \text{ și } \alpha = 5430 \cdot \Delta t^{0{,}145} = 2340\ q^{0{,}98} \qquad (2)$$

în loc de

$$q = 670 \Delta t^{1{,}58} \text{ și } \alpha = 760 \Delta t^{0{,}365} = 164\ q^{0{,}231} \qquad (2')$$

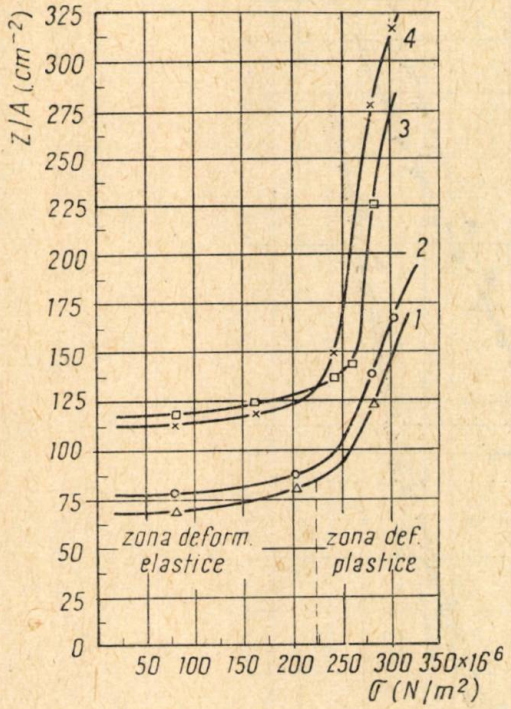


Fig. 2. — Influența deformațiilor elastice și plastice ale suprafeței purtătoare: *1* și *2* — $q \simeq 530\,000$ W/m², $t_w \simeq 100$°C; *3* și *4* — $q \simeq 400\,000$ W/m², $t_w \simeq 95$°C, probe diferite.

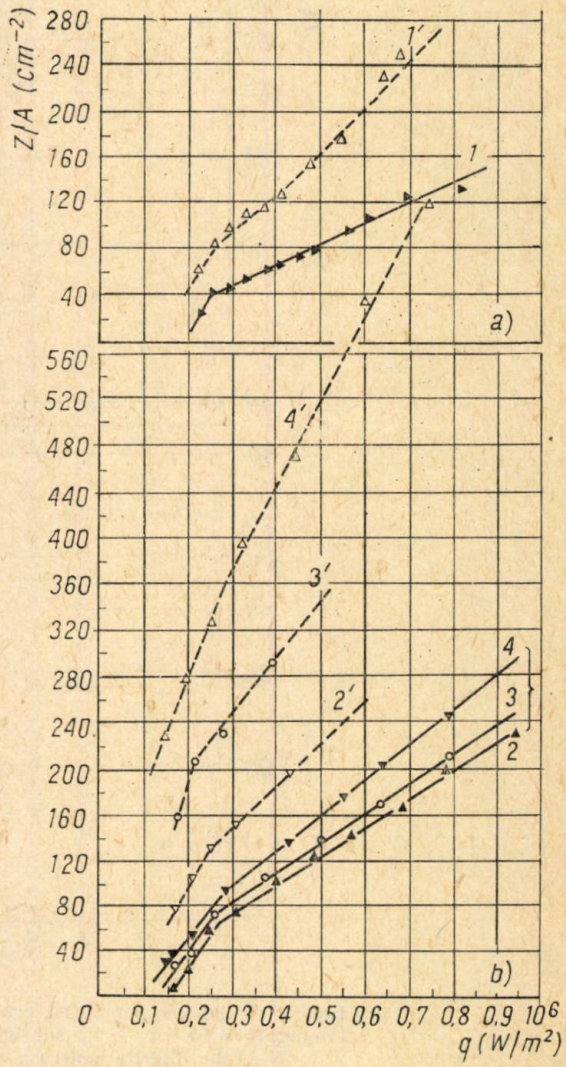


Fig. 3. — Variația populației centrelor active cu densitatea fluxului termic sub influența deformațiilor plasitce: *a* — $t_w \simeq 100$°C; *b* — $t_w \simeq 95$°C; *1*, *2*, *3*, *4* — probe diferite pentru $\sigma \simeq 80$ N/mm² (zona deformațiilor elastice); *1'*, *2'*, *3'*, *4'* — aceleași probe pentru $\sigma \simeq 300$ N/mm² (zona deformațiilor plastice).

pentru zona convecției libere ($A-B$) și

$$q = 1{,}14 \Delta t^{5{,}1} \text{ și } \alpha = 2{,}26 \Delta t^{3{,}84} = 2{,}05\ q^{0{,}755} \qquad (3)$$

în loc de

$$q = 20{,}65 \Delta t^{3{,}6} \text{ și } \alpha = 2{,}35\ \Delta t^{3{,}37} = 0{,}138\ q^{0{,}935} \qquad (3')$$

pentru zona fierberii nucleare ($B-C$). Începutul fierberii nucleare este deplasat de asemenea spre temperaturi mai mari, corespunzînd unei supraîncălziri a peretelui $\Delta t \simeq 8°$ în loc de $\sim 5°$.

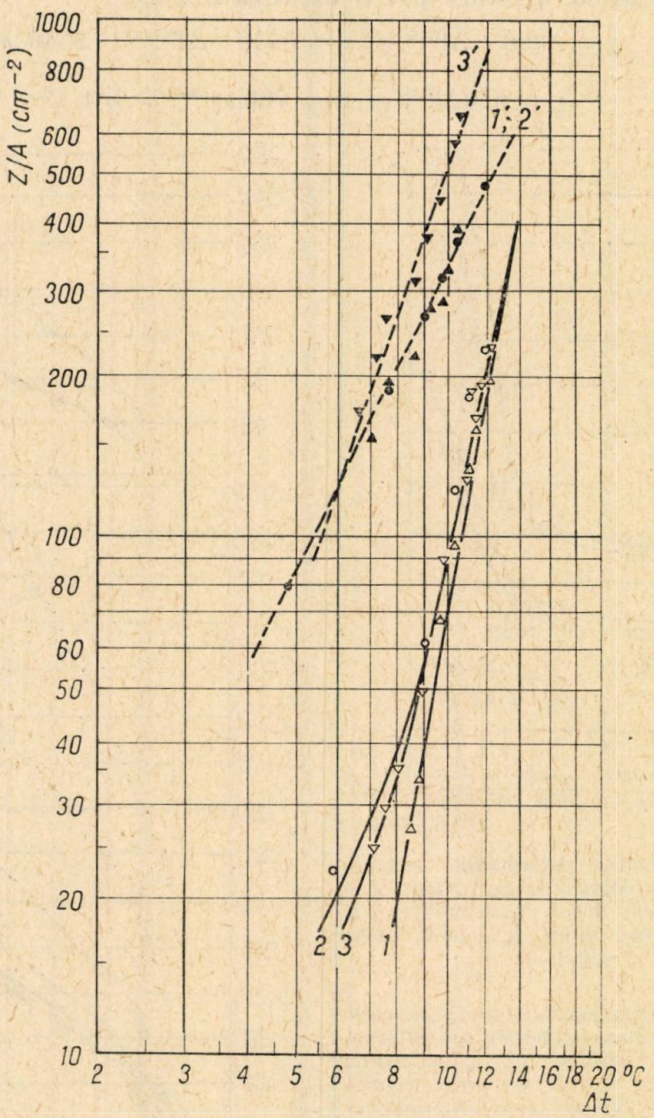


Fig. 4. — Variația populației centrelor active cu diferența de temperatură $\Delta t = t_p - t_w$ sub influența deformațiilor plastice; *1*, *2*, *3* — probe diferite pentru $\sigma \simeq 80$ N/mm² (zona deformațiilor elastice); *1'*, *2'*, *3'* — aceleași probe pentru $\sigma \simeq 300$ N/mm² (zona deformațiilor plastice).

Diferențele sînt mari în special în zona convecției libere (vezi și fig. 6), fapt care denotă o influență sensibilă asupra stratului termic limită a

condițiilor de lucru diferite (diametru, material, calitatea suprafeței, intensitatea curenților de convecție etc.). Dacă, pe baza cercetărilor lui Mc Adams și Rinaldo [10], se exclude influența diametrului diferit, care ar trebui să se manifeste în sens invers, rămîn a fi considerate drept cauze

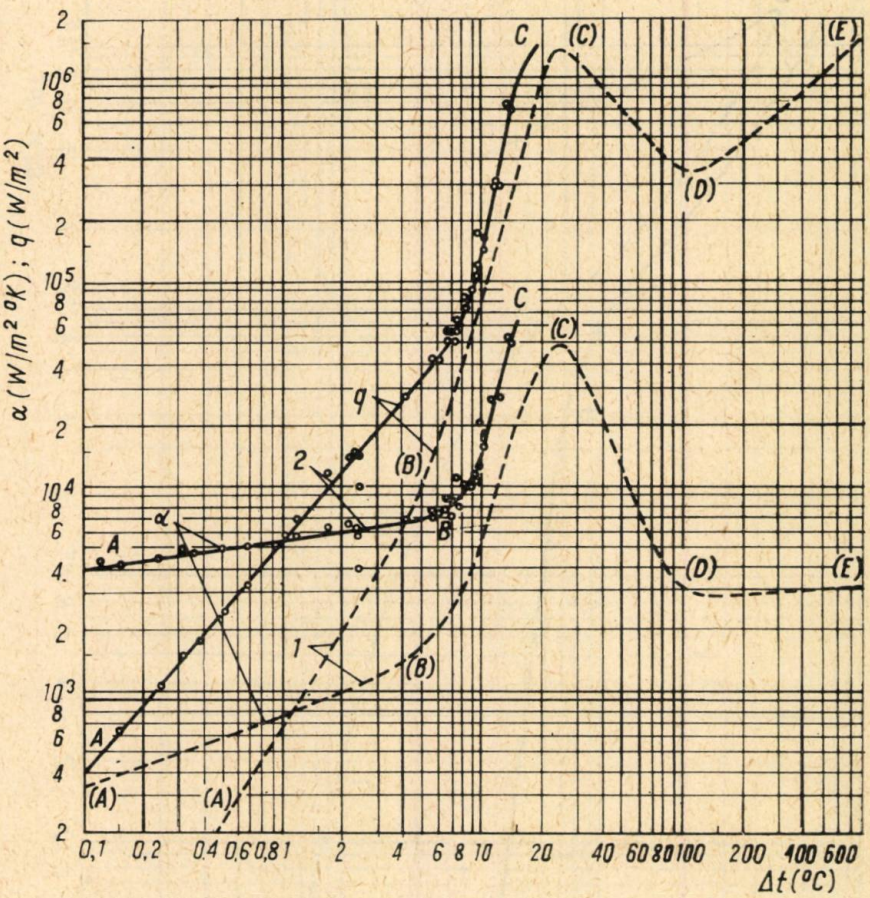


Fig. 5. — Variația densității fluxului termic q și a coeficientului de convecție α în funcție de supraîncălzirea peretelui.

influența materialului, a calității suprafeței sau a intensității curenților de convecție. De altfel, astfel de influențe, la fel de puternice, au fost scoase în evidență și de alți cercetători, ca, de exemplu, de Bonilla și Perry [11], în privința influenței materialului și a calității suprafeței, sau de Beecher [12], în privința intensității curenților de convecție. Insuficiența relațiilor de calcul existente în privința transmiterii căldurii la fierbere, care nu țin seama de factorii de mai sus, apare astfel evidentă, impunînd cercetări sistematice pentru completarea lor.

În domeniul fierberii nucleare (zona $B-C$), diferențele se micșorează (vezi și fig. 6), lucru care se remarcă și din rezultatele înregis-

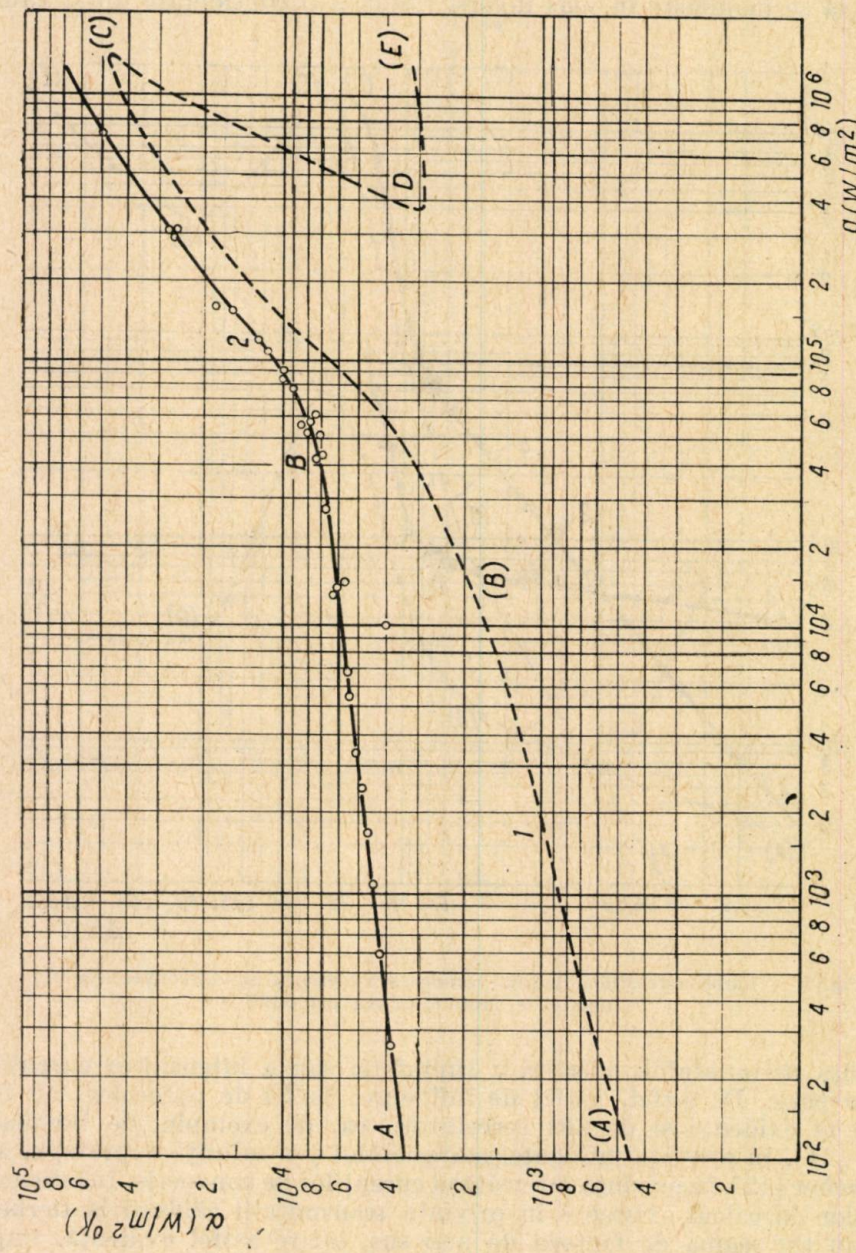


Fig. 6. — Variația coeficientului de convecție α în funcție de densitatea fluxului termic q.

trate în cadrul cercetărilor citate [10]—[12] și care denotă reducerea importanței unor factori ca diametrul sîrmei, materialul sau calitatea suprafeței în determinarea stratului termic limită și creșterea importanței circulației convective ca rezultat al supraîncălzirii stratului-limită și al generării bulelor de vapori.

După cum s-a mai amintit, utilizarea fierului nu permite depășirea regimului de fierbere nucleară, deoarece, la atingerea sau la depășirea valorii critice q_c a densității fluxului termic, firul se întrerupe. Cauza acestei întreruperi ar putea fi fie topirea materialului, fie arderea lui, rămînînd a fi precizată pe baza unor cercetări metalografice ale secțiunii de întrerupere. În prima ipoteză ar rezulta că ramura (DE) corespunzătoare fierberii peliculare (vezi fig. 5, $q = f(\Delta t)$) se află situată mult mai la dreapta sau are o pantă sensibilă mai mică decît în cazul platinei, și anume astfel încît orizontala q_c să determine o supraîncălzire mai mare decît temperatura de topire a fierului. În a doua ipoteză ar rezulta că în timpul vaporizării, la densități ridicate ale fluxului termic, apare oxigen liber fie prin disocierea moleculelor de vapori, fie prin electroliză. Desigur, elucidarea acestei chestiuni nu este lipsită de importanță practică și ar putea constitui obiectul unor cercetări speciale.

c) CORELAREA POPULAȚIEI CENTRELOR ACTIVE DE NUCLEAȚIE ȘI A MĂRIMILOR CARACTERISTICE SCHIMBULUI DE CĂLDURĂ

În figura 7 este redată corelația dintre populația centrelor active de nucleație Z/A și mărimile caracteristice transferului termic, q și α, atît pentru cazul deformațiilor elastice ale suprafeței purtătoare (curbele pline), cît și pentru acela al deformațiilor plastice (curbele întrerupte).

S-ar părea din examinarea acestor rezultate că începerea fierberii nucleare (zona vecină punctului B) se află în corelare directă cu producerea primelor bule de vapori, iar dezvoltarea fierberii nucleare cu activarea centrelor de generare a bulelor de vapori : cu cît populația centrelor active de nucleație este mai mare, cu atît și mărimile q și α sînt mai mari.

Faptul că pragul de apariție a bulelor de vapori variază mult cu diferitele probe (vezi curbele *1—5*, precum și [6]) în timp ce curbele q și α rămîn aproape aceleași și faptul că populația centrelor active de nucleație Z/A crește mult mai mult prin trecerea în zona deformațiilor plastice decît se măresc q și α (vezi curbele întrerupte) scot în evidență importanța contribuției directe a supraîncălzirii stratului termic limită asupra circulației convective în jurul probei, circulația produsă de dezvoltarea bulelor de vapori apărînd astfel ca o acțiune suprapusă de loc neglijabilă, dar nu exclusivă.

Este interesant de remarcat de asemenea că, dacă pentru supraîncălziri Δt relativ reduse diferitele probe se comportă destul de diferit, pe măsura creșterii supraîncălzirii diferențele dintre probe se atenuează și tind să dispară (curbele Z/A se apropie între ele cu creșterea lui Δt) ; diferențele dintre populațiile centrelor active Z/A corespunzătoare deformațiilor plastice ale suprafeței purtătoare și cele corespunzătoare deformațiilor elastice se reduc de asemenea cu creșterea supraîncălzirii și tind să dispară.

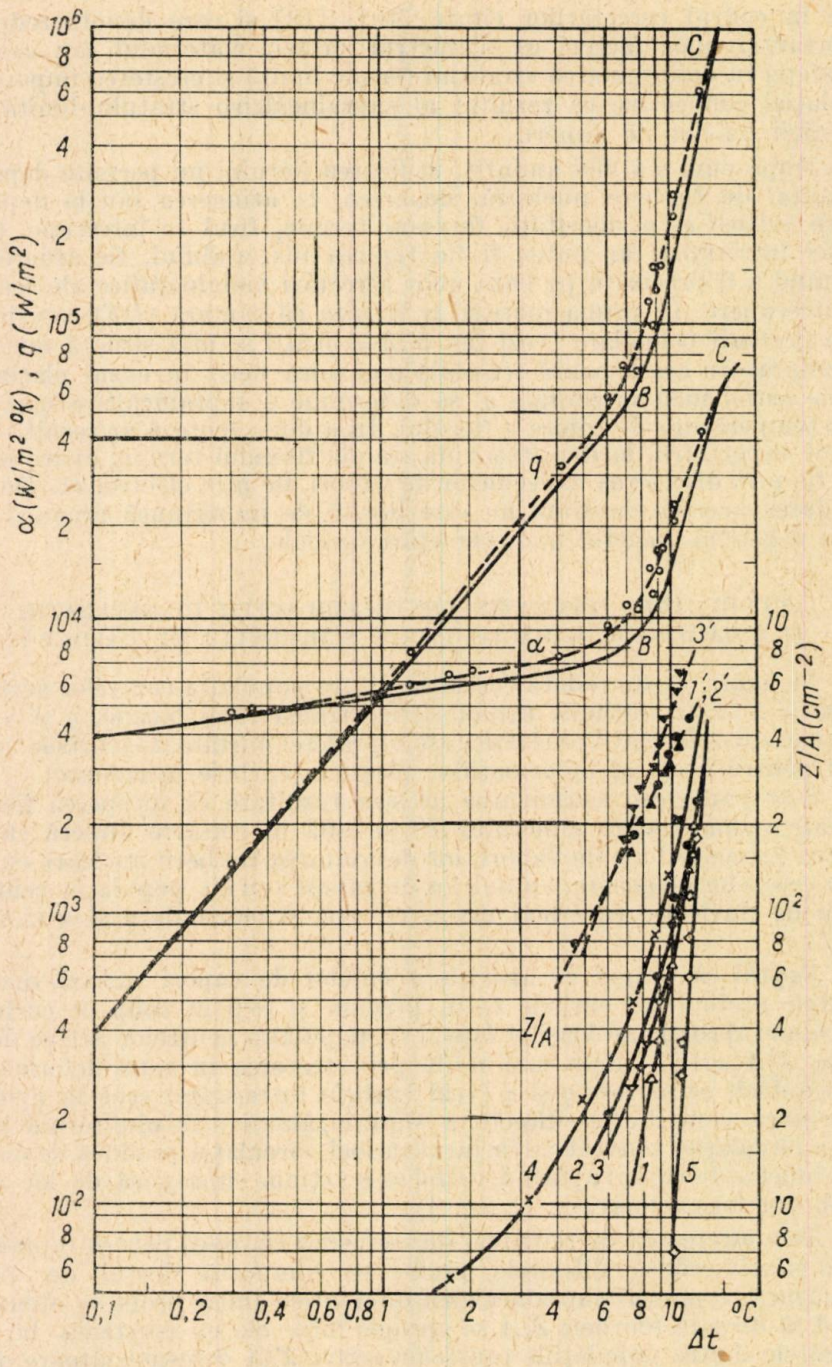


Fig. 7. — Corelația dintre q, α și Z/A pentru cazul deformațiilor elastice (curbele pline) și al deformațiilor plastice (curbele întrerupte): *1*, *2*, *3*, *4*, *5* — probe diferite.

Explicația pare destul de simplă, deoarece, dacă la început zona de activare este restrînsă în jurul centrului de nucleație cu microgeometria cea mai favorabilă în condițiile date, microgeometrie care diferă de la probă la probă prin însăși individualitatea centrului, pe măsura creșterii supraîncălzirii zona de activare se lărgește, cuprinzînd un număr de centre de nucleație tot mai mare și cu microgeometrii tot mai variate, astfel încît probabilitatea repartiției lor pentru diferitele probe se uniformizează.

4. CONSIDERAȚII ASUPRA CONDIȚIILOR DE ACTIVARE ALE CENTRELOR DE NUCLEAȚIE

a) MĂRIMI DETERMINANTE ALE ACTIVĂRII

Pentru interpretarea acestor rezultate este suficient, în primă aproximație, să facem uz de ecuația de echilibru termodinamic a lui Clapeyron :

$$\frac{\Delta p}{T_p - T_s} = \frac{(i'' - i')_p}{T_p (v'' - v')_p}, \tag{4}$$

care, cu considerarea ecuației de echilibru static a lui Gibbs,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \tag{5}$$

poate fi scrisă sub forma

$$T_p - T_s = \frac{T_p}{r}\left(\frac{2\sigma(v'' - v')}{i'' - i'}\right) \quad t = t_p, \tag{6}$$

unde

r este raza bulei formate,
T_p — temperatura peretelui și a vaporilor din interiorul bulei,
T_s — temperatura de saturație,
$i'' - i'$ — căldura de vaporizare a lichidului,
$v'' - v'$ — creșterea volumului specific prin vaporizare,
σ — tensiunea superficială a lichidului.

Din aceste relații se observă că atît diferența de presiuni Δp, cît și supraîncălzirea peretelui și a lichidului din stratul-limită $\Delta T = T_p - T_s$, în condițiile de echilibru amintite, sînt invers proporționale cu raza bulei formate. Cu cît formarea bulei de vapori are loc la o rază mai mare, cu atît supraîncălzirea necesară este mai redusă. De aici importanța deosebită a resturilor de gaze sau de vapori reținute în interiorul cavităților de nucleație ; în absența acestor gaze, nucleația bulelor de vapori este, după ecuația (6), practic imposibilă. Supraîncălzirea minimă necesară apariției primelor bule depinde de cantitatea de gaze și de vapori reținută în interiorul cavității sau, mai exact, de raza echivalentă (vezi anexa), a suprafeței de contact a gazului cu lichidul, funcție de proprietatea de adsorbție a peretelui, de unghiul de contact dintre lichid și perete, de microgeometria și de dimensiunile cavității. Pe măsura măririi supra-

încălzirii ΔT se activează centre cu raze echivalente ale suprafețelor de contact tot mai mici și, în consecință, populația centrelor active de nucleație crește (vezi fig. 4).

Această supraîncălzire este determinată, variind în limite relativ restrînse, de la probă la probă, după individualitatea cavității celei mai favorabile, după cum s-a amintit mai sus, pentru că însăși cantitatea de gaze și de vapori ce poate fi reținută este determinată. De altfel orice vaporizare este precedată, după cum se știe, de eliminarea surplusului de gaze reținut în cavități sau la suprafața peretelui printr-o stare de echilibru metastabilă; creșterea volumului specific al gazelor prin încălzire acționează în favoarea forțelor ascensionale de desprindere a surplusului de gaze.

Desigur, cantitatea de gaze reținută în cavități se reduce și în timpul procesului de vaporizare prin antrenarea gazului de către bulele de vapori generate; activarea centrelor de nucleație respective nu este influențată prin aceasta atîta timp cît procesul de vaporizare nu se întrerupe (vaporii din cavitate îndeplinesc același rol ca și gazul eliminat). Lucrurile se schimbă însă prin întreruperea vaporizării și răcirea lichidului, deoarece în acest caz o parte din vaporii reținuți în cavitate se condensează și raza echivalentă a suprafeței de contact poate să devină sensibil mai mică decît valoarea sa inițială. Activarea unor astfel de centre nu mai este posibilă decît la supraîncălziri mai ridicate; este tocmai ceea ce explică reducerea populației centrelor active de nucleație înregistrate prin repetarea proceselor de vaporizare (vezi fig. 8, după [6], fig. 4).

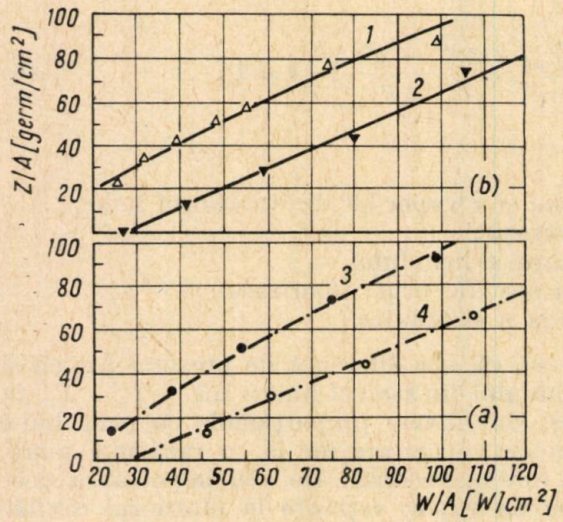


Fig. 8. — Reducerea populației centrelor active de nucleație prin repetarea vaporizării: *a* și *b* — probe diferite; *1* și *3* — primele măsurători; *2* și *4* — după 24 h (păstrarea probelor în apă).

Corelarea supraîncălzirii necesare $\Delta T = T_p - T_s$, a diferenței de presiuni Δp dintre interiorul și exteriorul bulei și a razei echivalente r a suprafeței de contact dintre lichid și vapori, stabilită pe baza ecuațiilor (5) și (6), este redată în figura 9.

Au fost considerate două valori ale temperaturii de saturație: $t_s = 100°C$, temperatura de lucru în cercetările efectuate, și $t_s = 14°C$, tem-

peratura obișnuită a apei în procesul de cavitație din mașinile hidraulice.

Sînt de remarcat diferențele mari care apar între curbele corespunzătoare acestor două temperaturi, cauzate, desigur, de diferențele mari dintre volumele specifice v''.

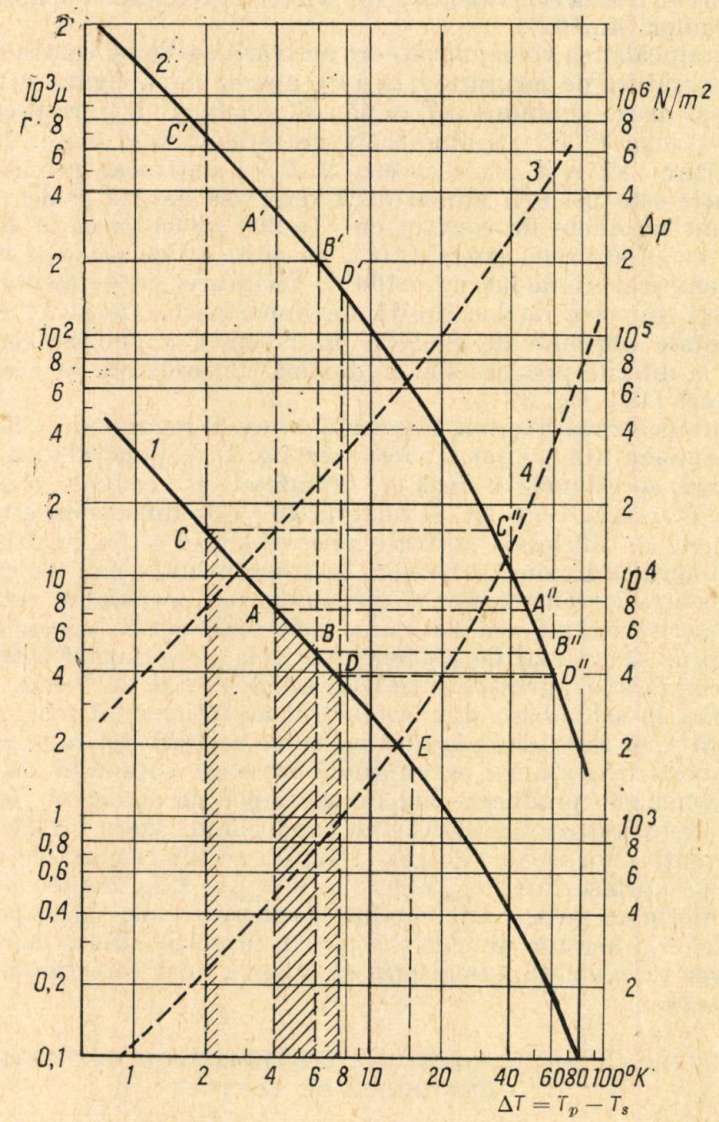


Fig. 9. — Corelarea supraîncălzirii $T = T_p - T_s$, a diferenței de presiuni Δp și a razei r a suprafeței de contact: *1* și *3* — $t_s \simeq$ $\simeq$100°C; *2* și *4* — $t_s \simeq$ 14°C.

Astfel, din rezultatele experimentale prezentate mai sus (vezi fig. 4 și 7) rezultă că, pentru o temperatură de lucru $t_s \simeq$100°C, supraîncălzirea

corespunzătoare pragului de apariţie a primelor bule se cifrează la $\Delta T = 4...\ 6°$ (zona AB, curba I, fig. 9) sau, mai larg, $\Delta T = 2...7{,}5°$ (zona CD); valorile corespunzătoare ale razei r sînt $r \simeq 5...7{,}5\mu$ sau, mai larg, $r = 4...15{,}6\mu$. Primele centre de nucleaţie care îşi încep activarea la temperatura considerată sînt, în consecinţă, acelea ale căror rezerve de gaz şi de vapori au o rază echivalentă a suprafeţei de contact cu apa de ordinul micronilor (4...16μ).

Supraîncălzirea corespunzătoare activării aceloraşi centre de nucleaţie la temperatura de saturaţie $t_s \simeq 14°C$ apare, după figura 9 (curba 2), sensibil mai mare, şi anume $\Delta T = 45...55°$ (zona $A''B''$), respectiv $\Delta T = 30...60°$ (zona $C''D''$), aproximativ de zece ori mai mare. La aceeaşi supraîncălzire ($\Delta T = 4...6°$, respectiv $2...7{,}5°$), activarea primelor centre de nucleaţie este posibilă numai dacă rezervele de gaz şi de vapori ale acestora au suprafeţe de contact cu $r = 200...300\mu$ (zona $A'B'$, fig. 9), respectiv $r = 150...700\mu$ (zona $C'D'$), de circa 40 de ori mai mari decît în cazul temperaturii de lucru $t_s \simeq 100°C$. Verificarea experimentală a acestor deducţii nu este de loc lipsită de importanţă. De altfel rezultatele experimentale obţinute de Semeria în privinţa populaţiei centrelor de nucleaţie la diferite presiuni sînt în deplină concordanţă cu aceste consideraţii (vezi [13], fig. 3).

Supraîncălzirea maximă măsurată în cazul regimului de fierbere nucleară la temperatura $t_s \simeq 100°$ C a fost (vezi fig. 5 şi 7, punctul C) $\Delta T_{max} \simeq 15°$, pentru care corespunde o rază a suprafeţei de contact a germenilor de nucleaţie $r \simeq 1{,}7\mu$ (vezi fig. 9, punctul E); este dimensiunea minimă la care centrele de nucleaţie activate prin creşterea supraîncălzirii se mai manifestă încă individual. Desigur, la supraîncălziri mai ridicate pot fi activate centre cu dimensiuni şi mai mici, dar populaţia centrelor de nucleaţie active devine atît de mare, încît coalescenţa bulelor de vapori vecine începe să nu mai fie un fenomen izolat, cuprinzînd zone tot mai largi ale suprafeţei purtătoare izolată astfel parţial de lichid. În aceste zone, mereu în schimbare prin caracterul nestaţionar al fenomenului de coalescenţă*), se stabileşte regimul pelicular de fierbere, care, prin mărirea supraîncălzirii, ajunge să cuprindă întreaga suprafaţă de încălzire.

În concluzie, producera bulelor de vapori în domeniul fierberii nucleare, la temperatura $t_s \simeq 100°C$ şi în condiţiile de lucru menţionate, implică existenţa unor resturi de gaz şi vapori cu dimensiuni ale suprafeţei de contact cuprinse între $r_{max} \simeq 4...15\mu$ şi $r_{min} \simeq 1{,}7\mu$. Pentru alte temperaturi de fierbere, pentru alte condiţii de lucru şi, mai ales, pentru alte lichide, valorile acestor dimensiuni pot fi cu totul altele, lucru care ar putea fi pus în evidenţă numai prin efectuarea unor cercetări sistematice în acest sens.

b) INFLUENŢA MICROGEOMETRIEI CENTRELOR DE NUCLEAŢIE ŞI A UNGHIULUI DE CONTACT

Principalii factori care influenţează asupra razei r a suprafeţei de contact sînt, după cum am mai amintit, volumul gazelor şi al vaporilor reţinuţi în cavitate, microgeometria cavităţii şi unghiul de contact β dintre lichid şi perete.

*) Este însăşi esenţa regimului tranzitoriu de fierbere.

Observație. În prezent, din păcate, nu dispunem încă de suficiente relații aplicabile pentru dimensiuni microscopice sau submicroscopice ale cavităților; astfel de relații ar trebui să ateste umplerea incompletă a unor astfel de cavități, pe de o parte datorită dimensiunilor relativ mari ale grupărilor de molecule care caracterizează lichidele, pe de alta, datorită reținerii gazului la fundul cavității prin adsorbție.

S-ar putea încerca de asemenea fundamentarea unui nou model al nucleelor cavitaționale, și anume prin admiterea unui strat de gaz adsorbit la suprafața de separație lichid-gaz. Un astfel de strat „de baraj" ar împiedica difuzarea gazului din interiorul nucleului înspre exterior, făcînd astfel posibilă existența unor presiuni interioare considerabil mai mari (corespunzătoare acțiunii tensiunii superficiale). Astfel de nuclee ar putea să existe sub toate formele cunoscute, și anume: a) în masa lichidului, sub forma unor bule de gaz submicroscopice, libere sau atașate particulelor solide în suspensie; b) în cavitățile microscopice sau submicroscopice ale acestor suspensii; c) în cavitățile superficiale ale pereților.

Față de modelul lui Fox și Herzfeld [14], modelul propus ar avea avantajul că se dispensează de ipoteza peliculei organice monomoleculare cvasirigide, iar față de modelul lui Harvey [15] că este mai general, putînd explica menținerea nucleelor de gaz în cavitățile conice sau cu pereți divergenți și pentru lichidele care udă pereții ($\beta \leqslant 90°$), caz mai frecvent întîlnit în practică (pentru apă, în contact cu oțelul, de exemplu, $\beta \leqslant 30...85°$, după [5]).

Indiferent de modelul nucleului admis, creșterea supraîncălzirii ΔT și pătrunderea în cavitate a vaporilor din stratul termic limită supraîncălzit conduc la creșterea volumului stării gazoase din cavitate și prin aceasta, mai devreme sau mai tîrziu, la creșterea razei echivalente r a suprafeței de contact peste valoarea de echilibru corespunzătoare ecuației (6); bula de vapori crește în acest caz rapid pînă la mărimea de desprindere, după care, similar, se formează o nouă bulă.

Legea de variație a razei r prin creșterea volumului stării gazoase din cavitate depinde în principal de microgeometria cavității respective și de unghiul de contact β dintre lichid și perete. Un tablou elocvent în această privință ne oferă figura 10, în care sînt schițate principalele tipuri de cavități ale pereților și curbele de variație ale inversului razei suprafeței de contact de partea lichidului, prin creșterea volumului gazului și vaporilor din cavitate, pentru diferitele valori caracteristice ale unghiului de contact β. S-a considerat inversul razei, deoarece graficele de variație ale lui $1/r$ reprezintă în același timp și variațiile supraîncălzirii ΔT și ale diferenței de presiuni Δp (vezi (5) și (6)).

Pentru toate tipurile de cavități se observă că supraîncălzirile necesitate pentru activarea lor sînt cu atît mai mari, cu cît unghiul de contact β este mai mic (cu cît lichidul udă mai bine peretele); pentru lichidele care nu udă pereții sînt necesare supraîncălziri mult mai mici.

Referindu-ne la centrele de nucleație conice sau cu pereți divergenți (fig. 10 *a* și 12), de exemplu, se observă că pentru aceeași cantitate a gazelor și a vaporilor reținuți în cavitate, desemnată prin volumul inițial V_1 (sensibil mai mic decît volumul cavității), supraîncălzirea maximă reclamată corespunde curbei I*).

*) *Observație.* Diferențele sînt și mai mari dacă se are în vedere că, pentru curba I, și Δp este mai mare și, în consecință, pentru aceeași cantitate inițială de gaze reținută V_1 este mai mic.

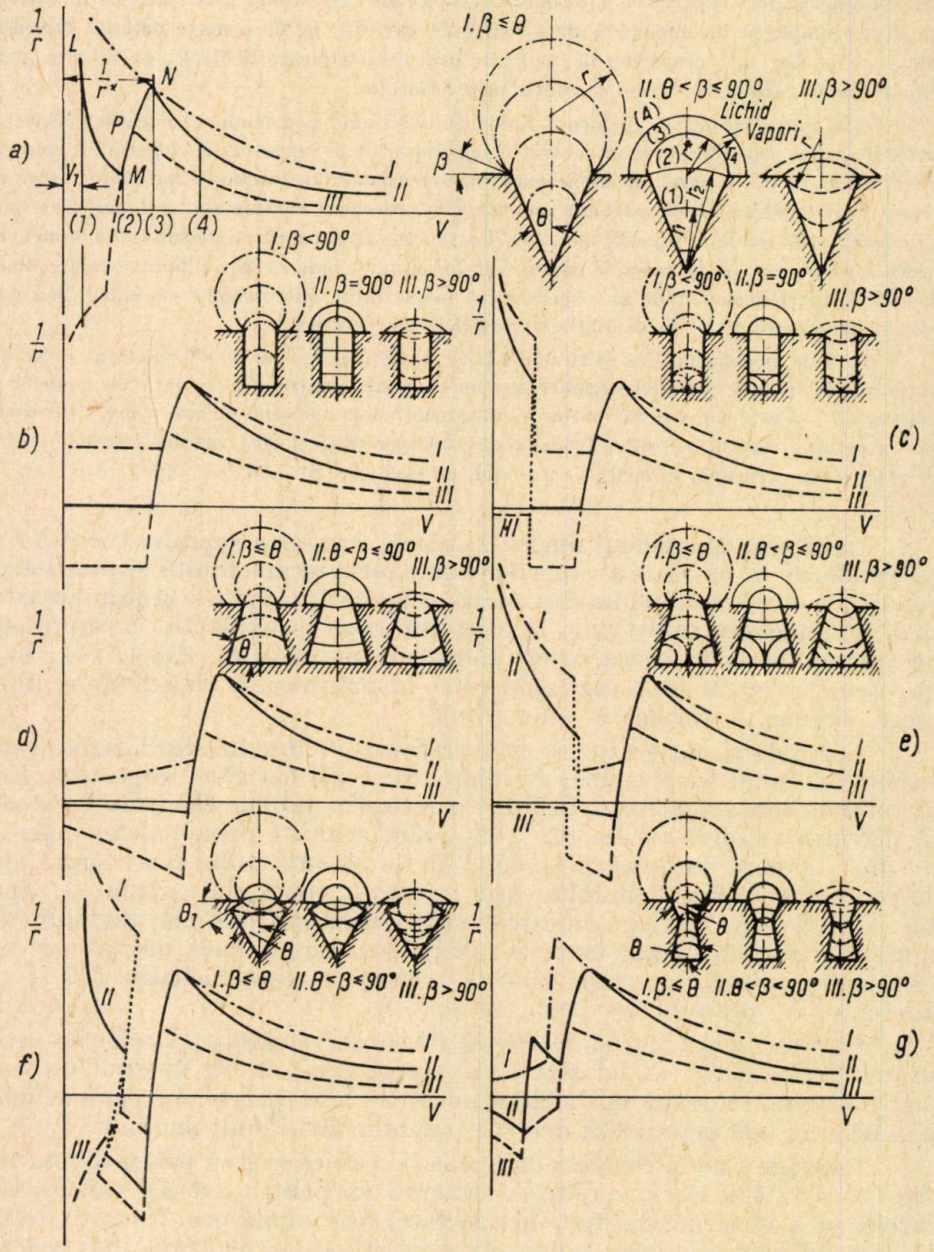


Fig. 10. — Variația inversului razei suprafeței de separație în funcție de volumul stării gazoase din cavitate pentru diferite microgeometrii ale cavităților și diferite unghiuri de contact: *a* — cavități conice sau cu pereți divergenți; *b* și *c* — cavități cilindrice sau cu pereți paraleli; *d* și *e* — cavități cu pereți convergenți; *f* și *g* — cavități combinate (divergent-convergente și convergent-divergente).

Odată atinsă această supraîncălzire pentru $\beta \leqslant \theta$ vezi fig. 10 *a*) creșterea volumului conduce la depășirea valorii de echilibru a razei r și spațiul de vapori din cavitate crește în continuare nestînjenit pînă la mărimea de desprindere, cu o viteză funcție de fluxul de vapori și de reducerea presiunii interioare.

Debitarea bulelor dintr-un astfel de centru este în general neregulată și are întreruperi frecvente chiar pentru $\Delta T \simeq$ const, datorită faptului că volumul gazelor și vaporilor rămași în cavitate după desprinderea bulei formate nu este mereu același; variația supraîncălzirii locale ΔT accentuează și mai mult instabilitatea centrului respectiv. Este de menționat de asemenea că în timpul formării bulei are loc o scădere continuă a presiunii interioare, o destindere deci (scade Δp), urmată de o comprimare bruscă în momentul desprinderii bulei, prin acțiunea tensiunii superficiale, ca urmare a modificării bruște a suprafețelor de contact (mai puțin pentru bula desprinsă, mai mult pentru gazul și vaporii rămași în cavitate). Este cauza atît a oscilațiilor care însoțesc evoluția ulterioară a bulei desprinse, oscilații puse în evidență prin filmare de mulți cercetători (vezi și fig. 11), cît și a zgomotului caracteristic procesului de fierbere.

Pentru curba *II* (curba plină, fig. 10 *a*), caracteristică unor unghiuri de contact $\theta < \beta \leqslant 90°$, se observă că atingerea supraîncălzirii corespunzătoare volumului inițial V_1 (sensibil mai mic decît în cazul precedent) nu mai este totdeauna o condiție suficientă pentru amorsarea centrului de nucleație respectiv; desigur, și în acest caz starea gazoasă din cavitate își mărește nestînjenit volumul ca urmare a fluxului de vapori din stratul termic supraîncălzit și a scăderii presiunii interioare, dar numai pînă la atingerea volumului V_2 (punctul M), adică pînă la umplerea întregii cavități cu vapori; creșterea ulterioară a volumului stării gazoase implică scăderea razei r și prin aceasta creșterea presiunii interioare și a supraîncălzirii ΔT. Este nevoie astfel de un flux energetic suficient de puternic pentru a putea asigura surplusul necesar de vapori în aceste condiții; aceasta numai pînă în momentul atingerii volumului V_3 (punctul N), deoarece creșterea ulterioară a volumului de vapori se face similar ca în cazul curbei *I*, sau chiar mai favorabil (panta curbei *II* este mai mare).

Supraîncălzirea minimă necesară amorsării centrului de nucleație pentru cazul considerat ($\theta < \beta \leqslant 90°$) este astfel cea mai mare dintre valorile aferente punctelor L și N, corespunzătoare razelor r_1 (raza inițială) și, respectiv r^*, raza critică, egală cu raza gurii cavității (pentru secțiuni circulare; pentru zgîrieturi sau fisuri de lungimi mari în comparație cu lățimea, r^* este egală cu jumătate din lățimea gurii (vezi anexa); ultima intervine mai ales pentru unghiuri de contact β mai mari, apropiate de 90°. Referindu-ne în special la această ultimă situație, cînd $\Delta T_N \gg \Delta T_L$, debitarea centrului de nucleație în cazul *II* este mult mai stabilă decît în cazul *I*, deoarece variațiile inevitabile ale volumului V_1 rămas în cavitate după desprinderea bulei și deci ale razei r_1 nu mai conduc la întreruperea funcționării centrului respectiv cît timp $r_1 \leqslant r^*$ și $\Delta T \geqslant \Delta T_N$. Desprinderea bulei formate (prin creșterea forțelor ascensionale) are loc cu o variație mai accentuată a razei de contact cu lichidul și, în consecință, oscilațiile bulei desprinse vor fi mai puternice decît în cazul *I*.

Pentru curba *III* (curba întreruptă, fig. 10 *a*), caracteristică unor unghiuri de contact $\beta > 90°$, adică pentru lichide care nu udă pereții,

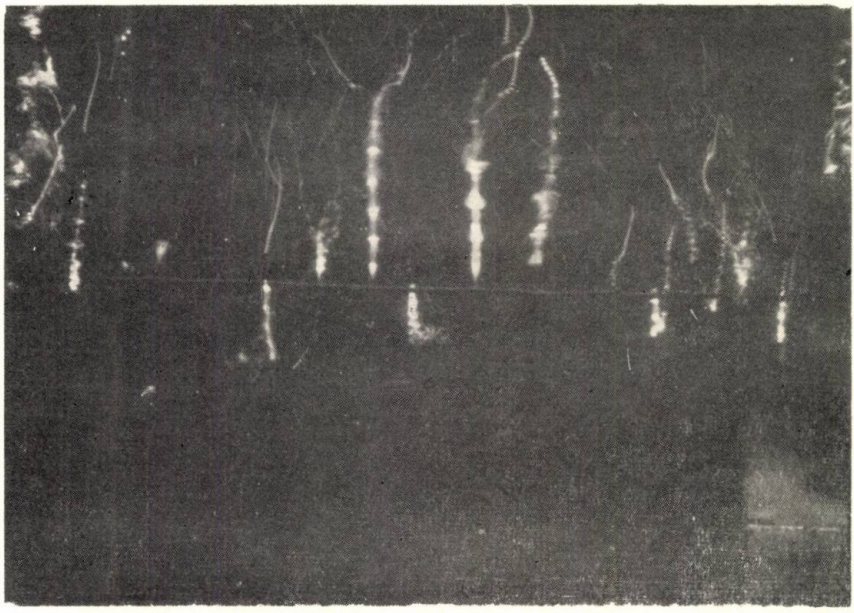
presiunea interioară din cavitate este mai mică decît presiunea lichidului ($\Delta p<0$), și anume cu atît mai mică cu cît volumul V_1 al gazului și vaporilor rămași în cavitate este mai mic, fiind posibil ca în nucleul inițial să existe numai vapori (la presiunea de saturație corespunzătoare); este singurul caz pentru care se poate renunța la ipoteza unui nucleu de gaz. Supraîncălzirea minimă necesară activării centrului de nucleație corespunde punctului P (fig. 10 *a*), adică razei minime a suprafeței de contact convexe ce se formează la gura cavității și este mai mică decît cea rezultată pentru cazurile precedente (cu atît mai mică cu cît β este mai mare); activarea centrului de nucleație în cazul considerat ($\beta>90°$) se face astfel mult mai ușor decît în cazurile precedente și are un caracter mult mai stabil, singura condiție fiind ca $\Delta T\geqslant\Delta T_p$. În schimb, oscilațiile bulelor desprinse și ale volumului vaporilor rămași în cavitate după desprindere sînt mult mai accentuate, datorită variației mai mari a razelor suprafețelor de separație în momentul desprinderii.

Foarte stabilă se prezintă și activarea centrelor de nucleație cilindrice sau cu pereți paraleli, convergente sau convergent-divergente (fig. 10 *b*, *d* și *g*); explicarea funcționării acestora pe baza curbelor prezentate și în lumina celor de mai sus nu prezintă dificultăți. Este de remarcat că în cazul centrelor de tipul *d* și *g* pot fi admise nuclee inițiale exclusiv din vapori nu numai pentru $\beta>90°$, ci și pentru $\theta<\beta\leqslant90°$ (vezi curbele *II*).

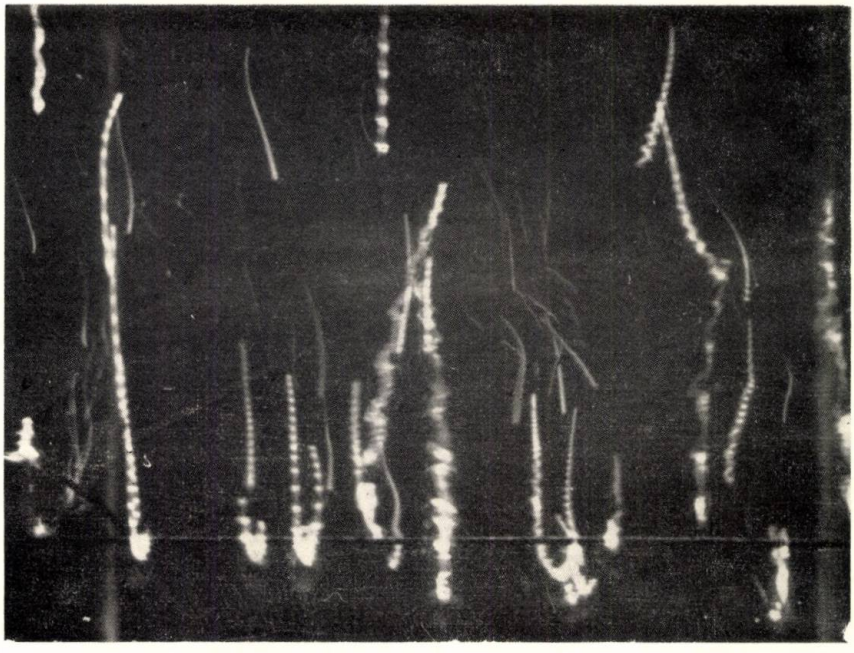
Tot în figura 10 se observă că variații bruște ale diferenței de presiuni Δp pot interveni nu numai în momentul desprinderii bulelor formate, ci chiar în timpul evoluției nucleelor din cavități, dacă variația razei suprafeței de separație prezintă discontinuități. Este cazul nucleelor care inițial nu cuprind întreaga secțiune a cavității (fig. 10 *c* și *e*) în momentul coalescenței lor (se trece brusc de la razele nucleelor parțiale la cea a nucleului rezultat prin contopirea lor) sau al nucleelor care evoluează în cavitățile de tip divergent-convergent (fig. 10 *f*). Destinderile bruște care apar în cavitate în aceste situații au ca efect expulzarea surplusului de vapori din cavitate sub forma unui jet de bule dirijat normal pe suprafața purtătoare, chiar împotriva forțelor ascensionale (vezi, de exemplu, fig. 11); intensitatea jetului este o măsură a mărimii saltului de presiune din cavitate.

Desigur, cele mai frecvente și deci cele mai importante sînt cavitățile de tip conic. Activarea unor astfel de centre în diferitele condiții poate fi urmărită mai îndeaproape în figurile 12—14, construite la scară. Astfel, în figura 12 este redată influența unghiului de contact β pentru o cavitate conică cu un unghi de deschidere $2\theta = 45°$ ($\theta = 22{,}5°$). Sînt regăsite toate concluziile stabilite mai sus cu privire la influența favorabilă a unghiurilor de contact mari (ramura LM și punctul critic N sînt cu atît mai coborîte, cu cît β este mai mare). Cu cît adîncimea cavității este mai mare, cu atît punctul critic N este mai coborît și deci centrul respectiv activează mai ușor.

În figura 13 și 14 poate fi urmărită influența unghiului de deschidere 2θ al cavității: prima pentru un unghi de contact $\beta = 90°$, a doua pentru $\beta = 45°$, ambele pentru aceeași adîncime a cavității, constantă. Se observă că punctul critic N este situat cu atît mai jos și ramura LM cu atît mai sus, cu cît unghiul 2θ este mai mare. Cu cît deschiderea cavității este mai mică, cu atît activarea centrului respectiv este mai



a



b

Fig. 11. — Coloanele și jeturile de bule.

dificilă, necesitînd supraîncălziri critice mai ridicate (impuse de poziția punctului critic N).

Deschiderile mari ale cavităților nu sînt nici ele favorabile activării acestora, datorită, pe de o parte, poziției ramurii LM și, pe de alta, faptului că, în cazul unor astfel de deschideri, lichidul pătrunde mai ușor în profunzimea cavității și, în consecință, raza r a suprafeței de separație dintre lichid și starea gazoasă rămasă în cavitate este foarte mică.

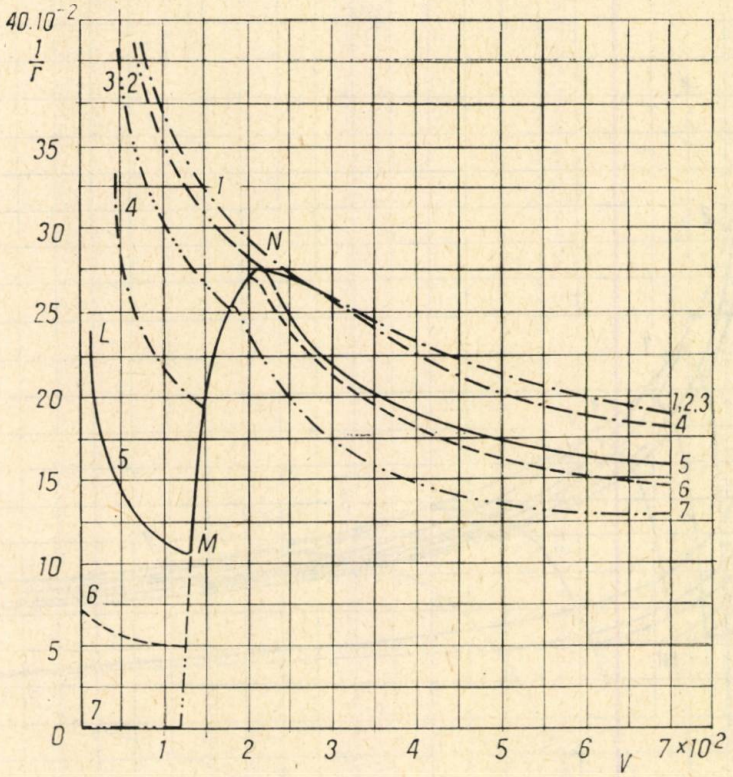


Fig. 12. — Influența unghiului de contact β pentru o cavitate conică (θ = 22,5°): *1* — β = 0; *2* — β = θ; *3* și *4* — θ < β < 90° (*3* — β = 2θ; *4* — β = 90 − θ); *5* — β = 90°; *6* — 90 < β < 90 + θ; *7* — β = 90 + θ.

Activarea unor cavități cu deschideri foarte mari (peste anumite valori) poate deveni astfel la fel de dificilă, necesitînd supraîncălziri de amorsare la fel de ridicate ca și activarea cavităților cu deschideri foarte mici (sub anumite valori).

Referindu-ne la cavitățile cu aceeași profunzime, există, așadar, o limită inferioară și o limită superioară a unghiurilor de deschidere în interiorul cărora este posibilă activarea centrelor de nucleație. Zona de activare definită de aceste limite este funcție de supraîncălzirea suprafeței purtătoare, lărgindu-se cu atît mai mult în ambele sensuri cu cît supraîncălzirea peretelui este mai ridicată. Este tocmai ceea ce explică creșterea populației centrelor active prin mărirea densității fluxului termic (vezi de exemplu, fig. 3 și 4).

Creşterea populaţiei cavităţilor active prin deformaţia plastică a suprafeţei purtătoare (fig. 2, 3 şi 4) îşi poate găsi de asemenea explicaţie în lumina celor de mai sus. Într-adevăr, ca urmare a deformaţiilor suprafeţei purtătoare prin întindere, deschiderile cavităţilor se măresc (vezi anexa) şi, în consecinţă, o serie de cavităţi iniţial inactive (cu des-

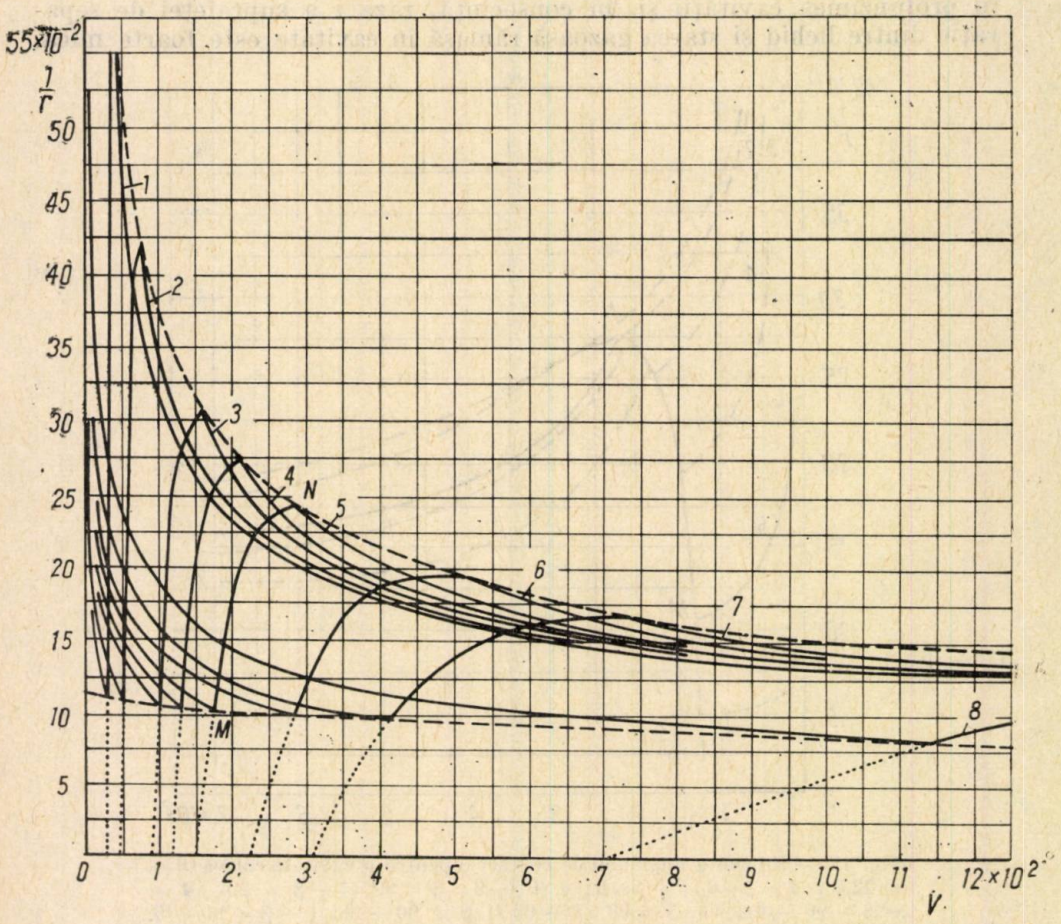


Fig. 13. — Influenţa unghiului de deschidere a cavităţii pentru $\beta = 90°$: *1* — $2\theta = 22{,}5°$; *2* — $2\theta = 30°$; *3* — $2\theta = 40°$; *4* — $2\theta = 45°$; *5* — $2\theta = 50°$; *6* — $2\theta = 60°$; *7* — $2\theta = 66{,}5°$; $2\theta = 90°$.

chideri insuficient de mari) trec în zona de activare, în timp ce altele (cu unghiuri de deschidere devenite prea mari) sînt scoase în afara zonei de activare. Creşterea populaţiei centrelor active de nucleaţie ca rezultat al acestor mutaţii se explică în primul rînd prin faptul că populaţia cavităţilor însăşi este mai densă de partea unghiurilor de deschidere mai mici.

Desigur, o astfel de „zonă de activare" există nu numai în cazul cavităţilor de tip conic sau cu pereţi divergenţi, ci şi în cazul oricărei alte geometrii. Considerînd toate cavităţile existente în ansamblu, zona de activare a acestora este definită prin limitele corespunzătoare dimensiu-

nilor şi microgeometriilor cavităţilor celor mai favorabile, pe de o parte, şi supraîncălzirii suprafeţei purtătoare, pe de alta. Dacă limita inferioară a zonei de activare se poate determina analitic pe baza ecuaţiei (6), de

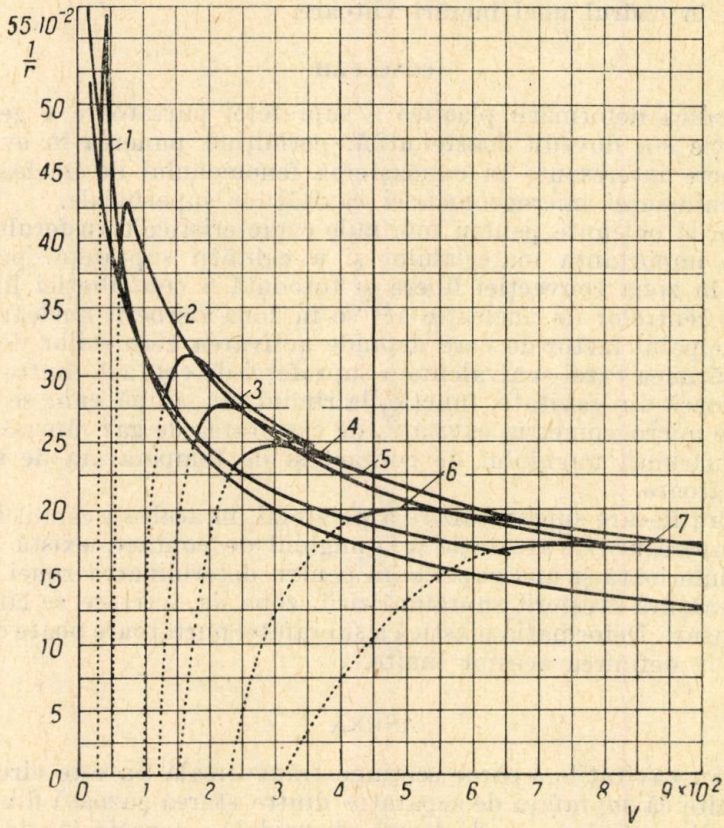


Fig. 14. — Influenţa unghiului de deschidere a cavităţii pentru $\beta = 45°$: *1* — $2\theta = 22{,}5°$; *2* — $2\theta = 30°$; *3* — $2\theta = 40°$; *4* — $2\theta = 45°$; *5* — $2\theta = 50°$; *6* — $2\theta = 60°$; *7* — $2\theta = 66{,}5°$.

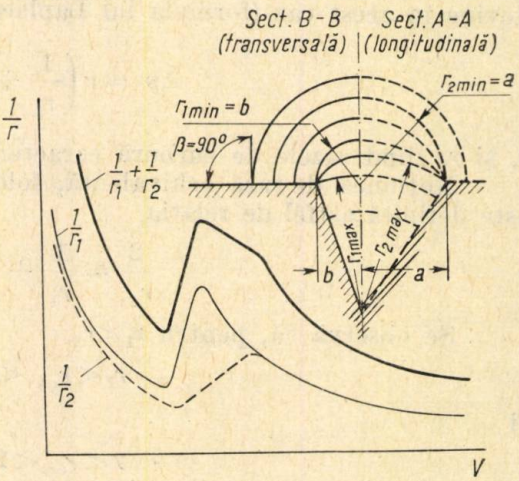


Fig. 15. — Variaţia razelor de curbură ale suprafeţei de separaţie, pentru o cavitate eliptică.

exemplu, fiind vorba de dimensiunea caracteristică a unei cavităţi umplute complet cu gaz sau vapori, limita superioară nu poate fi determinată decît experimental, de exemplu prin deformaţia centrului de nucleaţie respectiv pînă în momentul încetării activării. Este tocmai ceea ce ne propunem în cadrul unei lucrări viitoare.

CONCLUZII

Metodica deformării plastice a suprafeţei purtătoare a germenilor de nucleaţie s-a dovedit foarte utilă, permiţînd punerea în evidenţă a unor aspecte interesante în cunoaşterea fenomenului de nucleaţie şi în special a influenţei microgeometriei cavităţilor superficiale.

Valorile obţinute pentru mărimile caracteristice transferului termic subliniază importanţa materialului şi a calităţii suprafeţei purtătoare îndeosebi în zona convecţiei libere şi totodată a contribuţiei limitate a populaţiei centrelor de nucleaţie active în zona fierberii nucleare.

Principalul factor de care depinde activarea germenilor de nucleaţie este mărimea razei echivalente a suprafeţei de contact dintre lichid şi starea gazoasă din cavitate, funcţie, la rîndul său, după cum se arată în lucrare, de microgeometria cavităţii, de cantitatea de gaz rămasă în cavitate, de mărimea unghiului de contact şi de temperatura de saturaţie corespunzătoare.

Pentru fiecare supraîncălzire a peretelui, în aceleaşi condiţii cu privire la temperatura de saturaţie şi la unghiul de contact, există o valoare-limită inferioară şi una superioară pentru determinarea zonei de activare; pe măsura creşterii supraîncălzirii, zona de activare se lărgeşte în ambele sensuri. Deformaţia plastică a suprafeţei purtătoare poate contribui cu succes la definirea acestor limite.

ANEXĂ

Pentru cavităţile a căror secţiune transversală nu este circulară se poate admite că suprafaţa de separaţie dintre starea gazoasă din cavitate şi lichidul din exterior este de formă elipsoidală; ecuaţia (5) de mai sus devine în acest caz (formula lui Laplace)

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{7}$$

r_1 şi r_2 fiind razele de curbură caracteristice ale suprafeţei.

Noţiunea de rază echivalentă, folosită frecvent în cadrul lucrării, este definită astfel de relaţia

$$\frac{2}{r_{ech}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \tag{8}$$

Se observă că, pentru $r_1 < r_2$,

$$r_1 < r_{ech} < r_2 \tag{9}$$

şi

$$r < r_{ech} < 2r_1 \tag{10}$$

★

Pentru cavitățile în formă de șanțuri sau de zgîrieturi, $\frac{1}{r_2} \ll \frac{1}{r_1}$ și deci

$$\Delta p \simeq \sigma / r_1, \tag{11}$$

r_1 fiind raza de curbură a suprafeței de separație, măsurată în sensul lățimii șanțului. Toate cavitățile de acest fel, dirijate transversal pe firul de lucru (cele mai numeroase), își măresc lățimea prin deformația suprafeței purtătoare și, în consecință, raza r_1 și r^* se măresc.

★

Prin întinderea suprafeței purtătoare, cavitățile de secțiune circulară sînt deformate în cavități cu secțiune eliptică și, în consecință, suprafața de separație va fi aceea a unui elipsoid, cu axa mare dirijată în sensul întinderii.

Evoluția razelor de curbură r_1 și r_2 ale acestei suprafețe pentru un unghi de contact $\beta = 90°$*) se desfășoară astfel (fig. 15) : inițial r_1 și $r_2 > r_1$ cresc încontinuu, pe măsura dezvoltării bulei în cavitate, pînă în momentul în care suprafața de separație ajunge la gura cavității. Este de observat că acest lucru nu se produce simultan pe întreaga periferie a gurii cavității și deci r_1 și r_2 nu trec simultan prin valorile lor maxime (mai întîi r_1 și apoi r_2). În continuare, ambele raze descresc, pentru ca, după trecerea succesivă prin valoarea minimă egală cu semiaxa corespunzătoare a gurii cavității, să crească din nou pînă la valoarea de desprindere. De menționat că, din momentul în care $r_1 = r_{1min} = b$, suprafața de separație depășește marginile cavității de partea semiaxei mici și se apropie tot mai mult de o suprafață sferică ; suprafața devine sferică în momentul în care $r_2 = r_{2min} = a$, cînd și $r_1 = a$ și rămîne sferică în continuare pînă la desprinderea bulei.

Așa cum rezultă din figura 15, suma $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ este maximă și deci supraîncălzirea critică necesară activării unei astfel de cavități este maximă pentru $r_1 = r_{1min} = b$, cînd $r_2 = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ (rezultă geometric), observînd că pentru $r_2 = r_{2min} = a$ suma $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ este mai mică.

Într-adevăr, în primul caz

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{b} + \frac{2b}{a^2 + b^2}, \tag{12}$$

iar în al doilea

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{a}. \tag{13}$$

Se observă ușor că

$$\frac{1}{b} + \frac{2b}{a^2 + b^2} > \frac{2}{a}, \tag{14}$$

*) Similar se petrec lucrurile și pentru $\theta < \beta \leqslant 90°$.

deoarece, înlocuind $\frac{a}{b} = k$, rezultă

$$(k-1)\,(k^2-k+2)>0, \tag{15}$$

inegalitate evidentă pentru $k>1$.

★

Considerînd cavitatea inițială de secțiune circulară cu diametrul gurii $2\,r_0$, cavitatea deformată prin întinderea suprafeței purtătoare activează la o supraîncălzire mai redusă a peretelui dacă

$$\frac{1}{b}+\frac{2\,b}{a^2+b^2}<\frac{2}{r_0} \tag{16}$$

(vezi mai sus).

Cu

$$b = r_0\,(1-\varepsilon_q) \tag{17}$$

și

$$a = r_0\,(1+\varepsilon_l),$$

ε_q și ε_l fiind contracția specifică transversală și, respectiv, alungirea specifică longitudinală, relația de mai sus poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1+2\varepsilon_1+\varepsilon_l^2}{1-2\varepsilon_q+\varepsilon_q^2}>\frac{1+2\varepsilon_q}{1-2\varepsilon_l}, \tag{18}$$

inegalitate evidentă pentru $\varepsilon_l>\varepsilon_q$.

În concluzie, deformația cavităților prin întinderea suprafeței purtătoare reduce supraîncălzirea critică de activare a acestora, și aceasta, desigur, nu numai în cazurile considerate mai sus pentru motive de simplicitate, ci și în cazurile cele mai generale.

BIBLIOGRAFIE

1. J. W. Westwater, *American Scientist*, **47**, 427–446 (1959).
2. J. W. Westwater, *ASME Symposion Heat Transfer, ASME Anual Meet.*, New York, decembrie, 1960.
3. S. G. Bankoff, *AIChE J.*, **4**, 25–26 (1958).
4. H. B. Clark, P. S. Strange, J. W. Westwater, *Chem. Eng. Progr.*, Sympos. Ser., **55**, 103–110 (1959).
5. P. Griffith, J. D. Wallis, *Chem. Eng. Progr.*, Sympos. Series, Heat Transfer-Storrs, *30*, 56, p. 49–63 (1960).
6. V. Barbu, *Hydro-Turbo*, 21–23 Sept. 1967, Marianské-Lázné, ČSSR.
7. M. A. Miheev, *Osnovî teploperedaci*, Gosenergoizdat, 1956.
8. W. H. Mc. Adams, *Heat Transmission*, McGraw-Hill Book Comp., Inc., 1954.
9. S. Nukiyama, *J. Soc. Mech. Engrs. (Japan)*, **37**, 367–374, 53–54 (1934).
10. W. H. Mc Adams, J. N. Addams, P. M. Rinaldo, R. s. Day, Chem. Eng. Progr., **44**, 639–646 (1948).
11. C. F. Bonilla, C. H. Perry, *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, **37**, 685–705 (1941).
12. S. M. Beecher, Norman, *Thesis in Chemical Eggineering*, Massachusetts Institute of Tehnology, 1948.
13. R. Semeria, Compt. Rend. Acad. des Sciences, **252**, *5*, 675 (1961).
14. F. E. Fox, K. Herzfeld, Jr. of the Acoustical Soc. Amer, **26**, 984 (1954).
15. N. Harvey, Mc Elroy, A. Whiteley, Jr. of Appl. Physics, *2* (1947).

INFLUENȚA UNOR ELEMENTE GEOMETRICE ALE PULVERIZATORULUI ASUPRA PROCESELOR DIN MOTOR *)

DE

L. TEODORESCU

621.43.038

Sînt prezentate rezultatele de sinteză ale cercetărilor experimentale privind influența geometriei secțiunii de curgere la acul pulverizatorului asupra caracteristicilor jetului, procesului de ardere, performanțelor motorului și economicității funcționării acestuia.

Se prezintă influența jocului în zona cilindrică a știftului și a unghiului conului final al știftului, precum și parametrii care s-au dovedit a fi cei mai influenți, punîndu-se totodată în evidență condițiile care determină plaja optimă de valori ale acestora pentru o construcție de motor dată.

1. INTRODUCERE

Analiza teoretică a proceselor care au loc la pulverizator a permis [1] să se pună în evidență rolul pe care îl are geometria secțiunii de curgere la pulverizator asupra stabilității acestor procese și să se reliefeze faptul că o parte dintre parametrii caracteristici ai secțiunii amintite pot condiționa în mod esențial acest aspect.

Cercetările experimentale prezentate în lucrare [2] caută să pună în evidență modul în care variația acestor parametri influențează atît caracteristicile jetului de combustibili injectat, cît și calitățile energetice ale motorului.

Caracteristicile jetului de combustibil au fost determinate atît pe baza distribuției statistice a dimensiunilor picăturilor în diferite momente ale evoluției jetului de combustibil pulverizat, cît și pe baza fotoînregistrărilor formei jetului în diferite etape ale dezvoltării acesteia.

Structura jetului de combustibil pulverizat a fost determinată cu ajutorul unei instalații special amenajate pentru secționarea jetului în

*) Extras din teza de doctorat prezentată la Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", în noiembrie 1967.

diferite etape; secțiunile de jet preluate corespund unui grad de rotație al axului, decalajul dintre secțiuni fiind de 1°36′. Pentru a permite aprecieri statistice au fost preluate 5—10 secționări din același moment al evoluției jetului, din mai multe injectări la același regim de funcționare.

În figura 1 sînt prezentate ilustrativ imagini ale structurii jetului de combustibil din 1°36′ în 1°36′ pentru trei turații diferite la același regim de sarcină.

Dintre parametrii geometriei secțiunii de curgere cercetați (fig. 2) s-au dovedit ca fiind cei mai influenți jocul în zona cilindrică a știftului ($\Delta\delta = \frac{d_d - d_{ac}}{2}$) și unghiul conului final al știftului ($2\alpha_3$).

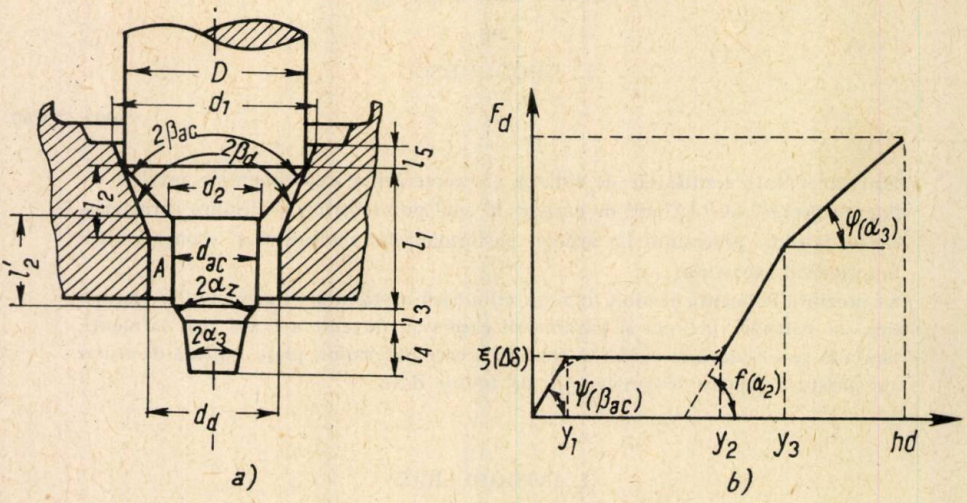


Fig. 2. — Parametrii caracteristici ai secțiunii de curgere (*a*) și variația secțiunii teoretice de curgere la pulverizator funcție de cursa acului (*b*).

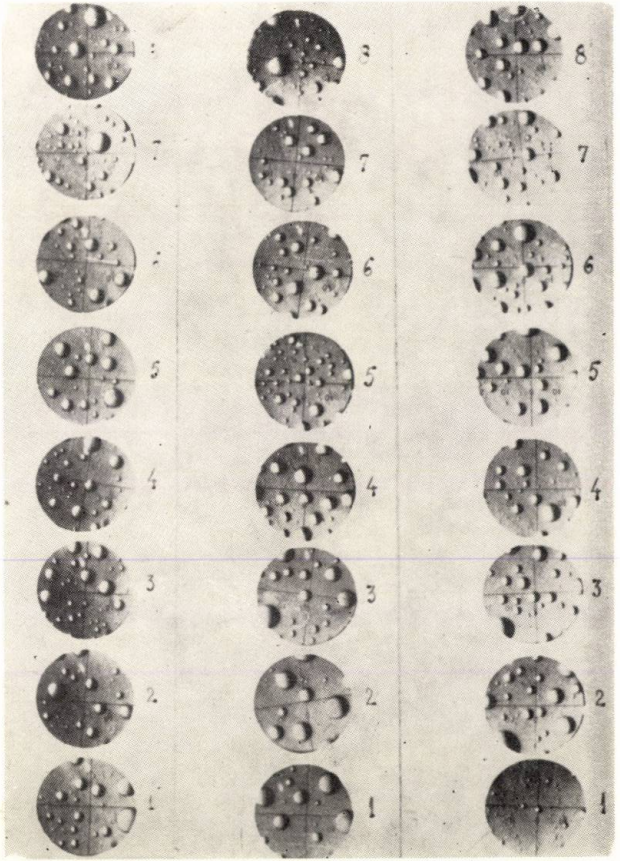
2. INFLUENȚA JOCULUI ÎN ZONA CILINDRICĂ A ȘTIFTULUI ASUPRA CARACTERISTICILOR JETULUI ȘI CALITĂȚILOR ENERGETICE ALE MOTORULUI

Pe baza reprezentării distribuției picăturilor în diagrama dublu logaritmică, considerînd că dimensiunile acestora se încadrează într-o lege de repartiție Gauss de speța a doua, pentru fiecare secțiune de jet s-a determinat diametrul mediu caracteristic.

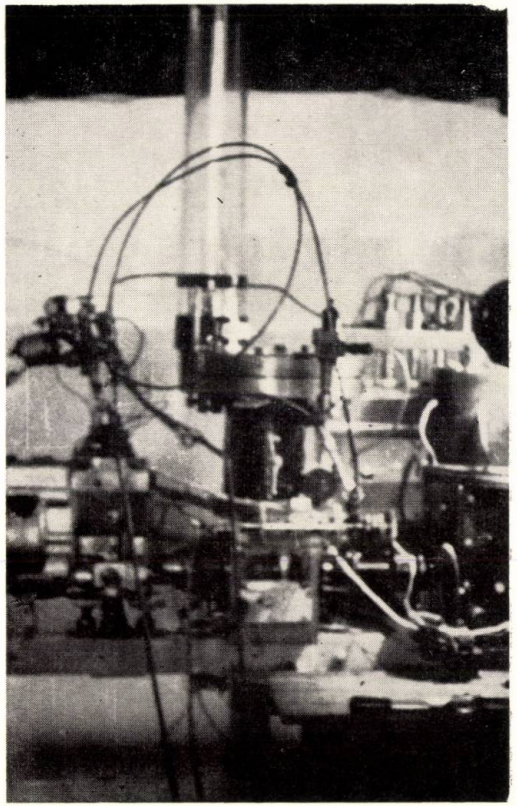
În figura 3 se prezintă variația diametrului mediu statistic al structurii picăturilor în timpul injecției, exemplificativ pentru trei jocuri diferite în zona cilindrică a știftului.

Se constată că, în general, mărirea jocului în zona cilindrică a știftului atrage după sine o scădere generală a valorilor diametrelor medii statistice ale picăturilor, urmată de o creștere sensibilă a acestora, fapt care evident va influența hotărîtor asupra performanțelor motorului.

De asemenea se constată că, la un anumit joc, valoarea diametrului mediu la începutul și la sfîrșitul injecției atinge un minim; creșterea sau scăderea valorii acestui joc atrage o creștere a diametrului mediu al pică-



a



b

Fig. 1. — Imagini ale structurii jetului de combustibil din 1°36′ în 1°36′ rotație arbore pompă pentru trei turații diferite (*a*) și instalația de secționare (*b*).

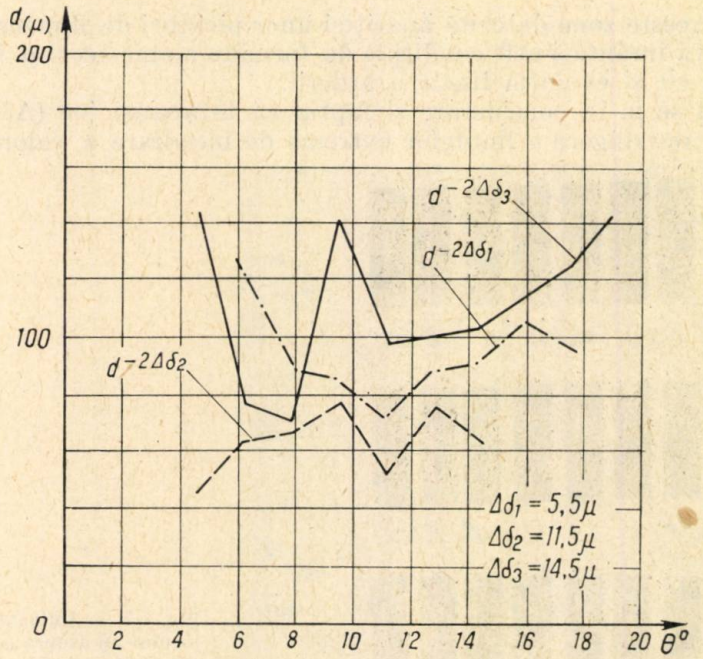


Fig. 3. — Variația diametrului mediu statistic al structurii picăturilor în timpul injecției, pentru valori diferite ale jocului în zona cilindrică a știftului.

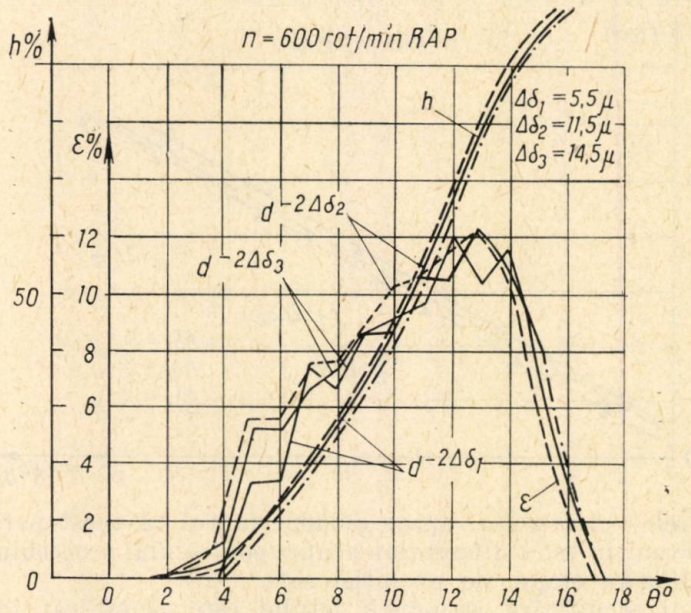


Fig. 4. — Legea de debit la pulverizator pentru trei valori ale jocului $\Delta\delta$ la turația $n = 600$ rot/min ($\varepsilon\%$ — cantitate injectată pe grad; $h\%$ — cantitate total injectată).

turilor în aceste zone datorită apariţiei unor picături de dimensiuni mari, fapt care va înrăutăţi atît condiţiile de formare a amestecului înainte de aprindere, cît şi evoluţia finală a arderii.

Dacă se ia în considerare şi faptul că la acelaşi joc ($\Delta\delta$) se realizează şi o restrîngere a limitelor extreme de încadrare a valorilor medii

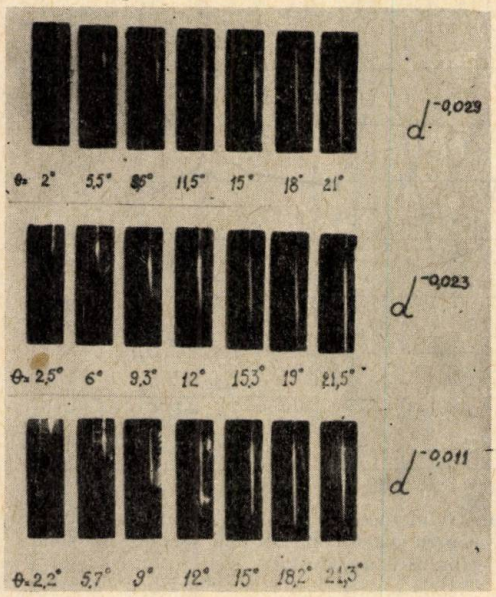
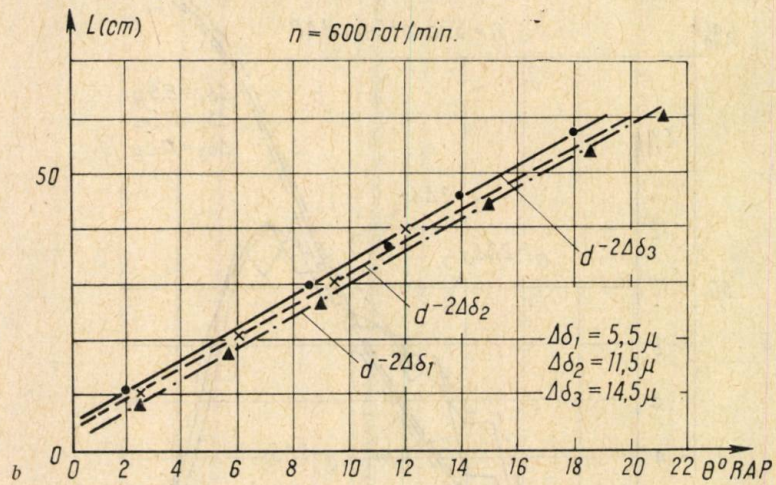


Fig. 5. — Influenţa jocului $\Delta\delta$ asupra penetraţiei jetului de combustibil pulverizat (fig. 5 *b*) şi formei acestuia (fig. 5 *a*).



ale diametrelor picăturilor, apare evident faptul că acest parametru va putea interveni în mod diferenţiat asupra controlului procesului de pulverizare în diferite etape ale evoluţiei sale.

Efectul modificării structurii jetului este amplificat în parte de modul în care se modifică şi legea de debit o dată cu creşterea jocului ($\Delta\delta$).

Ca urmare a creşterii jocului $\Delta\delta$ creşte mai întîi cantitatea injectată în perioada de întîrziere la autoaprindere, ca apoi să scadă (fig. 4).

Se mai poate sublinia și faptul că injecția cantității totale de combustibil se realizează mai devreme, o dată cu creșterea jocului $\Delta\delta$, ca apoi să marcheze o tendință de revenire.

Cercetările efectuate asupra formei jetului de combustibil pun în evidență faptul că mărirea jocului $\Delta\delta$ atrage după sine o ușoară creștere a penetrației jetului, fapt mult mai evident spre sfîrșitul injecției la valori mai mari ale jocului (fig. 5).

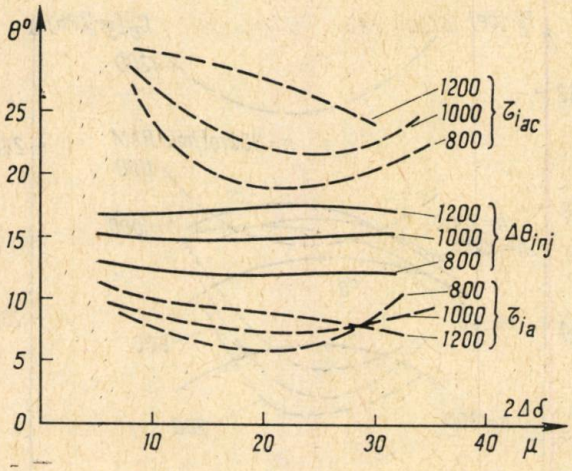


Fig. 6. — Influența jocului $\Delta\delta$ asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere τ_{ia} asupra duratei injecției τ_{iac} și asupra decalajului între începutul refulării la pompă și începutul creșterii presiunii la injector $\Delta\theta$ *inj*.

Acest aspect este explicabil prin faptul că jetul devine mai compact, asigurînd în acest fel o penetrație mărită.

Pentru punerea în evidență a influenței exercitate de geometria secțiunii de curgere la acul pulverizatorului asupra caracteristicilor și economicității funcționării motorului, a fost folosită instalația de motor monocilindric M-6002.

Cercetările pe monocilindru au permis să se pună în evidență faptul că o dată cu creșterea jocului valoarea întîrzierii la autoaprindere (τ_{ia}) marchează în general o scădere mai accentuată la turațiile mici (fig. 6), ca apoi cu creșterea jocului $\Delta\delta$ valoarea întîrzierii la aprindere să crească. Acest fapt se poate explica prin modul în care este influențată structura jetului în primele momente ale injecției de către variația jocului $\Delta\delta$, influență care se traduce prin scăderea inițială a diametrului mediu al picăturilor, iar apoi în creșterea acestuia.

Acest fapt pune în evidență posibilitatea controlului duratei întîrzierii la aprindere prin intermediul controlării structurii inițiale a jetului, determinată în mare măsură de valoarea jocului $\Delta\delta$.

Creșterea jocului $\Delta\delta$ condiționează, pe de altă parte, o valoare minimă pentru durata injecției (τ_{iac}) (măsurată din diagramele indicate prin durata ridicării acului).

De subliniat faptul că valoarea minimului duratei injecției și minimului întîrzierii la aprindere se deplasează cu creșterea turației spre valorile ridicate ale jocului $\Delta\delta$.

Ca urmare a acestor influențe, puterea motorului și consumul specific al acestuia (fig. 7) vor avea condiționate valori optime.

Corelînd datele experimentale asupra caracteristicilor motorului cu cele referitoare la legea de injecție, se poate explica de ce valorile mari

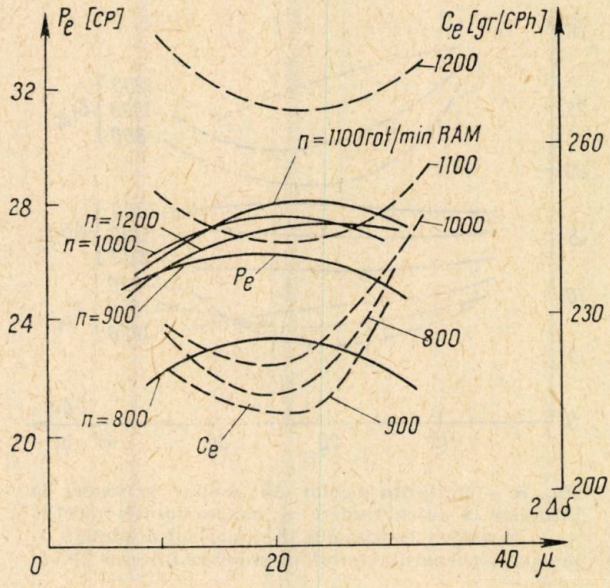


Fig. 7. — Variația puterii motorului și consumului specific de combustibil o dată cu creșterea jocului $\Delta\delta$.

ale jocului $\Delta\delta$ afectează evident înrăutățirea economicității motorului; cu creșterea jocului (la valorile relativ mici), durata întîrzierii la aprindere, scăzînd, atenuează efectul de creștere a cantității totale de combustibil injectate în această perioadă (cantitatea care crește cu creșterea jocului $\Delta\delta$). Jocul $\Delta\delta$, crescînd în continuare peste o anumită valoare, determină o creștere a cantității injectate în această perioadă, înrăutățind sensibil condițiile de formare și de ardere a amestecului combustibil în camera separată de ardere.

3. INFLUENȚA UNGHIULUI CONULUI FINAL AL ȘTIFTULUI ASUPRA CARACTERISTICILOR JETULUI ȘI CALITĂȚILOR ENERGETICE ALE MOTORULUI

Tot ca un factor deosebit de influent al geometriei știftului pulverizatorului se dovedește a fi și unghiul conului final al știftului.

Cercetările pun în evidență faptul că, o dată cu micșorarea unghiului conului final (α_3) al știftului pulverizatorului, valoarea diametrului mediu al picăturilor scade în general, mai ales în perioada centrală a injecției (fig. 8).

Pentru același sens de variație al parametrului α_3 se remarcă o restrîngere a limitelor de variație ale diametrului mediu al picăturilor pînă la un minim, ca apoi să crească cu scăderea unghiului α_3 (o dată cu trecerea la valori negative ale lui α_3 care condiționează o funcționare în regim foarte apropiat de regimul critic de stabilitate a proceselor de lucru la pulverizator).

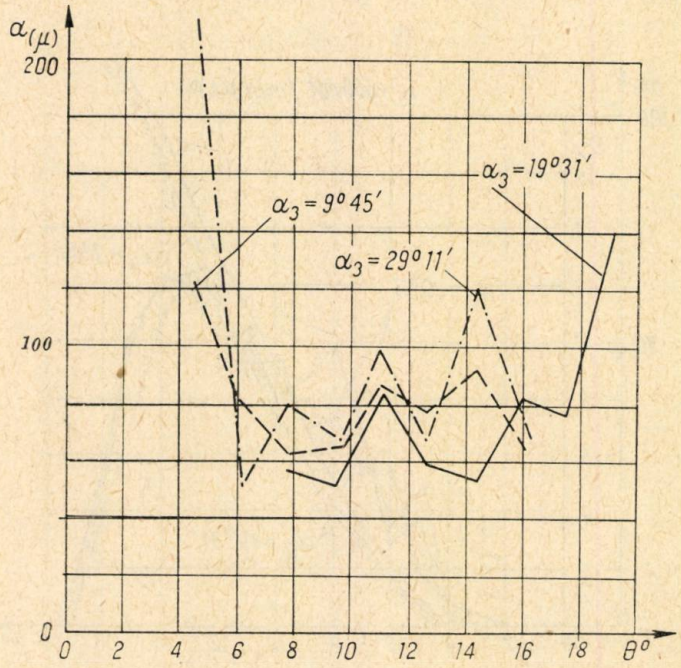


Fig. 8. — Variația diametrului mediu statistic al structurii picăturilor în timpul injecției în funcție de valorile unghiului conului final al știftului pulverizatorului.

La trecerea la unghiuri negative, sfîrșitul injecției este caracterizat prin creșterea diametrului mediu al picăturilor, fapt care va înrăutăți evoluția procesului de ardere, mai ales în partea sa finală.

Trecerea de la regimul instabil de funcționare (pentru valorile mari ale lui α_3) la regimurile stabile (în special pentru valorile negative ale lui α_3) este subliniată și de variația legii de debit o dată cu modificarea unghiului α_3 (fig. 9); amplitudinea oscilațiilor scade în mod evident cu scăderea unghiului α_3.

De asemenea cantitatea totală injectată în perioada de întîrziere la aprindere este decalată mai întîi spre sfîrșitul injecției, pentru ca la unghiuri negative să revină spre începutul injecției.

Cercetările efectuate asupra formei jetului pun în evidență faptul că unghiul conului final α_3 al știftului exercită o influență hotărîtoare asupra acestuia.

O dată cu scăderea unghiului α_3, forma jetului se alungește (fig. 10), atingînd aproape o alură filiformă, ca apoi, o dată cu trecerea la valori

negative al unghiului α_3, lungimea jetului să scadă sensibil, iar forma sa să se apropie mai mult de forma unei pere.

Pentru același sens de variație al unghiului α_3, lungimea jetului se modifică în mod diferit la începutul injecției față de sfîrșitul acesteia.

Cu creșterea unghiului α_3, lungimea jetului în porțiunea inițială a injecției mai întîi scade, ca apoi să crească, în timp ce spre sfîrșitul injecției lungimea jetului mai întîi crește, ca apoi să scadă foarte rapid.

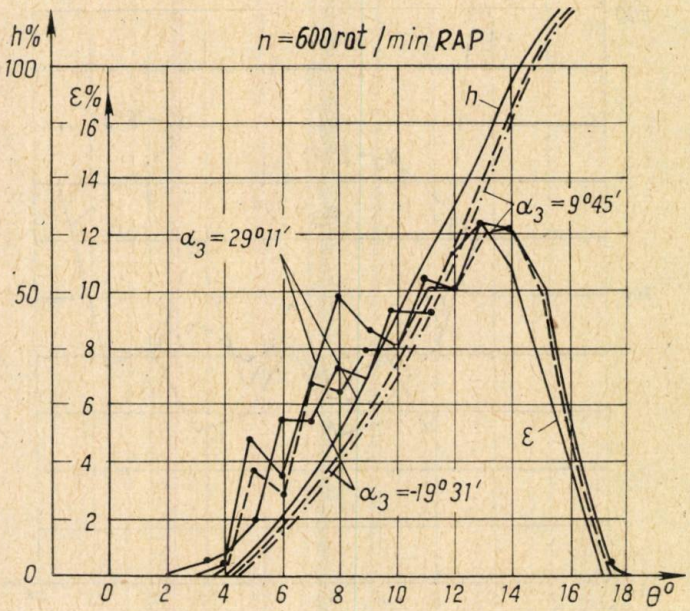


Fig. 9. — Legea de debit la pulverizator pentru trei variante ale unghiului α_3.

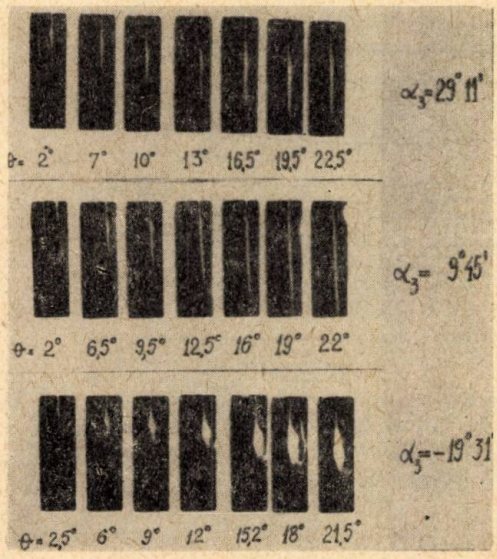
Dacă prima influență poate condiționa un optim al lungimii jetului corespunzător arhitecturii camerei de ardere, influența secundă este în general defavorabilă, scurtarea lungimii jetului în etapa finală a arderii presupunînd viteze mici de deplasare, deci o dinamicitate redusă a jetului, fapt care va atenua ieșirea combustibilului din camera separată de ardere în camera principală a motorului și arderea sa.

Este important de subliniat și influența secțiunii de curgere din zona conului final al știftului asupra caracteristicilor și economicității funcționării motorului.

Cercetările efectuate pun în evidență faptul că influența unghiului conului final al știftului α_3 asupra întîrzierii la aprindere (fig. 11) poate fi practic neglijată.

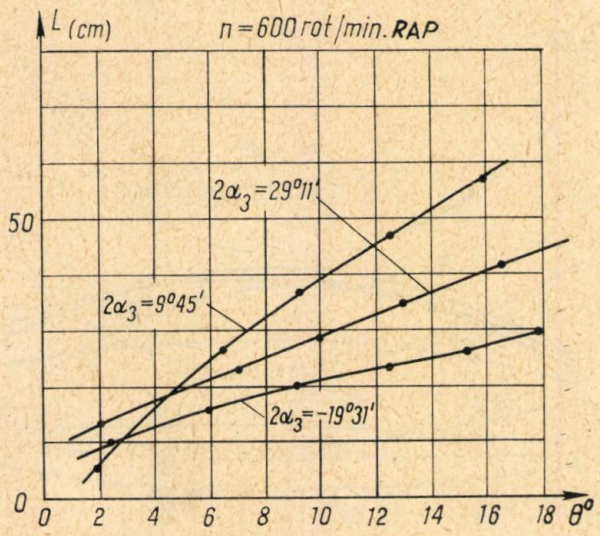
Durata injecției (τ_{iac}) marchează în mod evident un maximum, valoare care coincide în general la diferite turații și cu valoarea minimă a decalajului $\Delta\theta_{inj}$ între începutul refulării la pompă și începutul creșterii

de presiune la injector. Acest minim se explică prin descărcarea mai redusă la pulverizator, fapt care determină o presiune remanentă mai ridicată în conductă. Acest efect se combină cu cel exercitat de unghiul



a

Fig. 10. — Influența unghiului conului final α_3 asupra penetrației (fig. 10 *b*) și formei jetului de combustibil pulverizat (fig. 10 *a*).



b

α_3 asupra penetrației, valorile mari ale presiunii de injecție condiționînd viteze mai mari și penetrație mai mare a jetului.

Aceste influențe cumulate au ca efect condiționarea unei valori optime pentru puterea motorului și, respectiv, pentru consumul specific de combustibil (fig. 12).

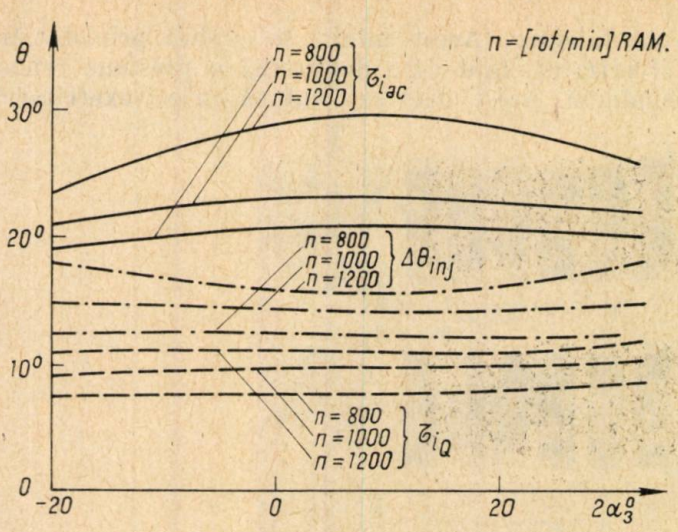


Fig. 11. — Influența unghiului α_3 asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere τ_{ia}, asupra duratei injecției $\tau_{i_{ac}}$ și asupra decalajului dintre începutul refulării la pompă și începutul creșterii presiunii la injector $\Delta\theta_{inj}$.

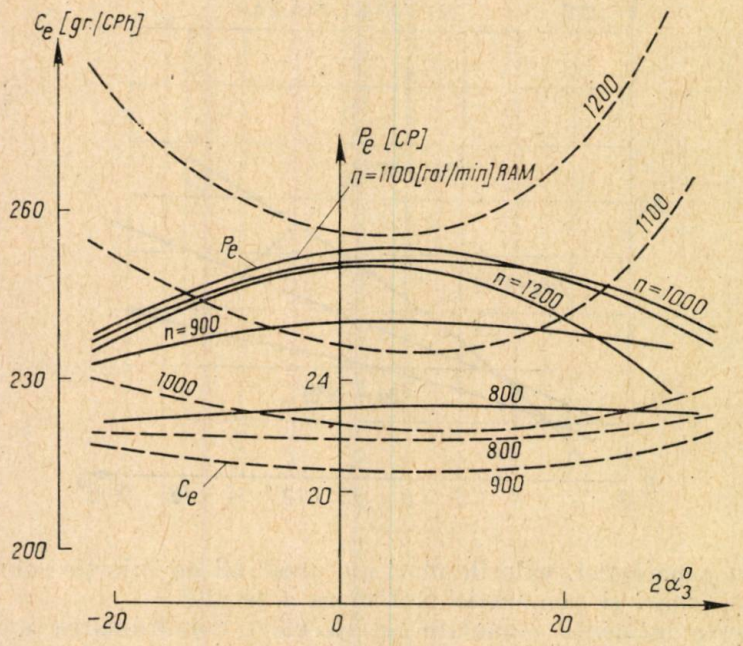


Fig. 12. — Variația puterii motorului și consumului specific de combustibil o dată cu creșterea unghiului α_3.

4. CONCLUZII

Cercetările experimentale efectuate pe un monocilindru de tipul M-6002 au permis să se pună în evidență rolul pe care îl au parametrii geometriei de curgere la pulverizator asupra caracteristicilor jetului de combustibil pulverizat și calităților energetice ale motorului.

Dintre parametrii analizați, cei a căror influență se dovedește a fi semnificativă sînt jocul în zona cilindrică a știftului și unghiul conului final.

Cercetarea influenței jocului în zona cilindrică a știftului, în afara condiționării stabilității proceselor la pulverizator, în anumite domenii pune în evidență și faptul că o dată cu creșterea acestui joc se modifică începutul și sfîrșitul legii de injecție, factori care afectează întîrzierea la aprindere și, respectiv, evoluția procesului de ardere în etapa sa finală. Aceste condiții contradictorii combinate cu efectul exercitat asupra modificării structurii jetului, determinat de modificarea presiunii de injecție ca urmare a creșterii secțiunii de curgere, condiționează valori optime ale jocului în zona cilindrică.

Cercetările au pus de asemenea în evidență rolul influent complex exercitat de unghiul conului final. Ele au confirmat concluziile analizei teoretice referitoare la influența unghiului α_3 asupra stabilității proceselor la pulverizator, reliefînd totodată faptul că unghiul conului final α_3 poate constitui unul dintre cei mai eficienți factori de control al proceselor la pulverizator.

Ținînd seama de faptul că modificarea structurii jetului și distribuția în timp a combustibilului sînt influențate în mod contradictoriu de variația unghiului conului final, este de așteptat ca, pentru o anumită soluție constructivă dată a motorului, variația acestui unghi să condiționeze un optim al caracteristicilor. Acest efect este accentuat de influența exercitată de unghiul conului final asupra desfășurării procesului de ardere prin intermediul modificării penetrației jetului.

Trebuie remarcat de asemenea faptul că valorile optime sînt afectate în mod sensibil și de turația motorului, fără a modifica însă plaja valorilor optime ale parametrilor geometriei secțiunii de curgere.

Cercetările efectuate au permis să se pună în evidență posibilitatea îmbunătățirii proceselor de lucru din motor prin intermediul realizării unei geometrii corecte a secțiunii de curgere la pulverizator și totodată să se stabilească cerințele impuse în diferite etape ale procesului de aprindere și ardere pentru evoluția optimă a structurii jetului de combustibil pulverizat.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Teodorescu, *Influența geometriei secțiunii de curgere la pulverizator asupra stabilității proceselor de la injector*, St. cerc. energ. electr., **18**, *2*, 313–324 (1968).

2. L. Teodorescu, *Teză de doctorat*, Institutul politehnic București, 1967.

CALCULUL FUNCȚIONAL AL SEGMENȚILOR DE PISTON CU CONSIDERAREA PULSAȚIEI

DE

R. DELCESCU

621.432

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a presiunii în lungul segmenţilor pe durata unui ciclu motor şi a mişcării pe care segmenţii o execută în canale sub acţiunea forţelor aplicate asupra lor.

Se tratează cazul mai general al unui set de segmenţi aflat într-un moment oarecare al duratei lor de serviciu cînd presiunea radială şi uzura diferă de la un segment la altul.

1. INTRODUCERE

Calculul funcţional al segmenţilor motoarelor cu ardere internă urmăreşte stabilirea modului cum aceştia răspund cerinţei de a etanşa cilindrul motor.

Scăpările de fluid între cilindru şi carter sînt determinate de contactul dintre segment şi cilindru, de poziţia segmentului în canalul din piston şi de mărimea jocului dintre capetele sale libere.

Dacă presiunea radială pe care segmentul o exercită asupra cilindrului este pozitivă în fiecare secţiune şi dacă această presiune rămîne pozitivă pe toată durata de serviciu a segmentului, nu au loc, în general, scăpări de fluid printre segment şi cilindru.

Pierderile de fluid prin spatele segmentului au loc numai atunci cînd el pulsează, deplasîndu-se între suprafeţele frontale ale canalului din piston; în consecinţă, pentru a elimina aceste pierderi, este de dorit ca segmentul să fie în permanenţă aplicat pe una şi aceeaşi suprafaţă frontală a canalului.

Jocul dintre capetele libere ale segmentului determină în mod inevitabil scurgerea spre carter a unei fracţiuni din fluidul motor; totodată însă destinderea succesivă a acestei fracţiuni după fiecare segment măreşte diferenţa de presiune dintre amontele şi avalul său, ceea ce evită desprinderea segmentului de pe planul pe care este aşezat.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 367-384, 1970

În cele ce urmează se prezintă o metodă de calcul a presiunii în lungul segmenţilor pe durata unui ciclu motor şi a mişcării pe care segmenţii o execută în canale sub acţiunea forţelor aplicate asupra lor.

Se tratează cazul mai general al unui set de segmenţi aflat într-un moment oarecare al duratei lor de serviciu cînd presiunea radială şi uzura diferă de la un segment la altul.

2. STABILIREA ECUAŢIILOR CARE DESCRIU PROCESELE DE CURGERE ŞI MIŞCAREA SEGMENŢILOR

2.1. ECUAŢIILE CARE CARACTERIZEAZĂ CURGEREA GAZELOR ÎN LUNGUL SEGMENŢILOR

Regimul de curgere a fluidului printre segmenţi este un proces periodic, deoarece o parte din mărimile care îl condiţionează sînt periodic variabile.

În cele ce urmează se denumeşte „treaptă de segment" spaţiul pe care îl ocupă gazele între doi segmenţi alăturaţi, între primul segment şi cilindru, între ultimul segment şi carter; se numerotează treptele şi segmenţii dinspre cilindru spre carter, cilindrul reprezentînd treapta 0, iar segmentul de compresie superior purtînd numărul unu.

Se folosesc următoarele notaţii principale:

p^* — presiunea fluidului (N/m^2);
p — presiunea elastică a segmentului (N/m^2);
$\mathcal{T}$ — temperatura absolută (°K);
R — constanta gazului (kgf.m/kgf.°K);
U — energia internă (kcal);
i — entalpia specifică (kcal/kgf);
G — cantitatea de fluid (kgf);
$\mathcal{V}$ — volum (m^3);
v — volumul specific al fluidului (m^3/kgf);
f — secţiune (m^3);
ε — coeficientul de contracţie al venei de fluid;
α — coeficient de convecţie (kcal/m^2hgrd);
λ — coeficient de conductibilitate al materialului cilindrului (kcal/mhgrd);
δ — grosimea peretelui cilindrului (m);
N — turaţia motorului (rot/min);
θ — unghiul descris de arborele motor;
g — acceleraţia gravitaţiei (m/s^2);
V — viteza pistonului (m/s);
j — acceleraţia pistonului (m/s^2);
a — grosimea radială a segmentului nou (m);
τ — uzura radială (m).

Pentru a referi notaţiile precedente la diferitele elemente care condiţionează curgerea se folosesc indicii m, $m-1$, $m+1$ pentru mărimile ce se referă la treptele m, $m-1$, $m+1$, indicii $(m-1)m$ şi $(m+1)m$ pentru mărimile ce caracterizează procesul de curgere din treapta $m-1$

și, respectiv, $m + 1$ spre treapta m și indicii P pentru piston, P_m pentru piston în treapta m, q pentru fluidul răcitor al cilindrului, *cil* pentru cilindru și ψ pentru o secțiune oarecare a segmentului raportată la axa ce trece prin deschidere.

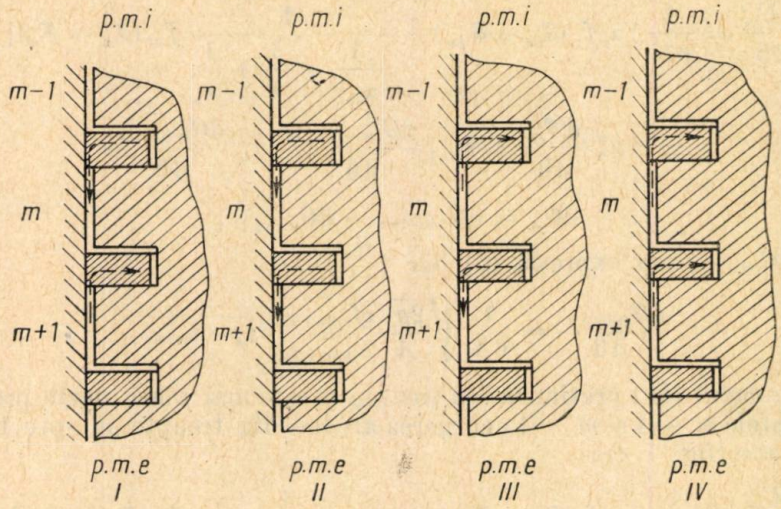


Fig. 1. — Cazurile posibile de curgere a gazelor prin treptele de segmenți

Pentru o treaptă oarecare m, în funcție de valoarea presiunii gazelor din treptele $m - 1$ și $m + 1$ în raport cu presiunea din treapta m, se pot prezenta patru cazuri posibile de curgere (fig. 1)[1]. Exprimînd variația energiei interne și a cantității de fluid din treapta m, datorită aportului treptelor alăturate și a schimbului energetic cu cilindrul și pistonul, rezultă pentru cazurile posibile de curgere următoarele ecuații :

— cazul I : presiunea din treapta m este mai mică decît presiunea din treptele $m - 1$ și $m + 1$; curgerea se produce din treptele învecinate spre treapta m (fig. 1 *a*) :

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{6N}\left[\alpha_p f_p (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_{pm}) + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{gaz}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_q}} f_{cil} (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_q)\right] -$$

$$- Ap_m^* \frac{d\mathcal{V}_m}{d\theta} + i_{m-1} \frac{dG_{(m-1)m}}{d\theta} + i_{m+1} \frac{dG_{(m+1)m}}{d\theta}, \tag{1}$$

$$dG_m = dG_{(m-1)m} + dG_{(m+1)m}, \tag{2}$$

unde $dG_{(m-1)m}$ și $dG_{(m+1)m}$ sînt date de expresiile

$$\frac{dG_{(m-1)m}}{d\theta} = \frac{1}{6N}\sqrt{\frac{2g}{A}}\,\frac{\varepsilon f_{(m-1)m}}{\mathcal{V}_{(m-1)m}}\sqrt{i_{m-1} - i_{(m-1)m}}, \tag{3}$$

$$\frac{dG_{(m+1)m}}{d\theta} = \frac{1}{6N}\sqrt{\frac{2g}{A}}\,\frac{\varepsilon f_{(m+1)m}}{\mathcal{V}_{(m+1)m}}\sqrt{i_{m+1} - i_{(m+1)m}}; \tag{4}$$

— cazul II : presiunea din treapta m este mai mică decît presiunea din treapta $m-1$ și mai mare decît presiunea din treapta $m+1$; curgerea se produce din treapta $m-1$ în treapta m și din treapta m în treapta $m+1$ (fig. 1 *b*) :

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{6N}\left[\alpha_p f_p (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_{pm}) + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{gaz}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_q}} f_{cil} (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_q)\right] -$$

$$- Ap_m^* \frac{d\varphi_m}{d\theta} + i_{m-1} \frac{dG_{(m-1)m}}{d\theta} - i_m \frac{dG_{m(m+1)}}{d\theta}, \tag{5}$$

$$dG_m = dG_{(m-1)m} - dG_{m(m+1)}, \tag{6}$$

unde $dG_{(m-1)m}$ are expresia (3), iar

$$\frac{dG_{m(m+1)}}{d\theta} = \frac{1}{6N}\sqrt{\frac{2g}{A}}\frac{\varepsilon f_{m(m+1)}}{\varphi_{m(m+1)}}\sqrt{i_m - i_{m(m+1)}}\,; \tag{7}$$

— cazul III : presiunea din treapta m este mai mare decît presiunea din treptele $m-1$ și $m+1$; curgerea are loc din treapta m spre treptele învecinate (fig. 1 *c*) :

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{6N}\left[\alpha_p f_p (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_{pm}) + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{gaz}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_q}} f_{cil} (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_q)\right] -$$

$$- Ap_m^* \frac{d\varphi_m}{d\theta} - i_m \frac{dG_{m(m-1)}}{d\theta} - i_m \frac{dG_{m(m+1)}}{d\theta}, \tag{8}$$

$$dG_m = - dG_{m(m-1)} - dG_{m(m+1)}. \tag{9}$$

Debitul $dG_{m(m-1)}$ are expresia

$$\frac{dG_{m(m-1)}}{d\theta} = \frac{1}{6N}\sqrt{\frac{2g}{A}}\frac{\varepsilon f_{m(m-1)}}{\varphi_{m(m-1)}}\sqrt{i_m - i_{m(m-1)}}, \tag{10}$$

iar $dG_{m(m+1)}$ este dat de expresia (7) ;

— cazul IV : presiunea din treapta m este mai mare decît presiunea din treapta $m-1$ și mai mică decît presiunea din treapta $m+1$; curgerea are loc din treapta $m+1$ spre treapta m și din treapta m spre treapta $m-1$ (fig. 1 *d*) :

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{6N}\left[\alpha_p f_p (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_{pm}) + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{gaz}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_q}} f_{cil} (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_q)\right] -$$

$$- Ap_m^* \frac{d\varphi_m}{d\theta} - i_m \frac{dG_{m(m-1)}}{d\theta} + i_{m+1} \frac{dG_{(m+1)m}}{d\theta}, \tag{11}$$

$$dG_m = - dG_{m(m-1)} + dG_{(m+1)m}. \tag{12}$$

Debitele elementare $dG_{m(m-1)}$ și $dG_{(m+1)m}$ sînt precizate de (4) și (10).

2.2. FORȚELE CARE CONDIȚIONEAZĂ MIȘCAREA SEGMENTULUI DE PISTON ÎN CANALUL SĂU

Forțele care acționează segmentul, determinînd poziția sa pe una dintre suprafețele canalului din piston sau mișcarea sa între aceste suprafețe, sînt :

— forțele produse de presiunea gazelor din treptele alăturate ;
— forța de inerție a segmentului ;
— forța de frecare.

În cele ce urmează, aceste forțe vor fi considerate pe unitatea de lungime a segmentului perpendiculară pe planul de mișcare al mecanismului motor.

2.2.1. *Forțele produse de presiunea gazelor din treptele alăturate*

Pentru segmentul m aplicat pe suprafața frontală inferioară a canalului din piston, aceste forțe sînt cele arătate în figura 2 *a*.

$$F_{m-1} = p^*_{m-1}(a - \tau_m), \tag{13}$$

$$F_m = Kp^*_m(a - \tau_m), \tag{14}$$

unde

$$K = \frac{\frac{\Delta D}{2}}{a - \tau_m},$$

este un coeficient de reducere care ia în considerație faptul că una dintre forțe acționează pe o suprafață a cărei lățime este egală cu grosimea

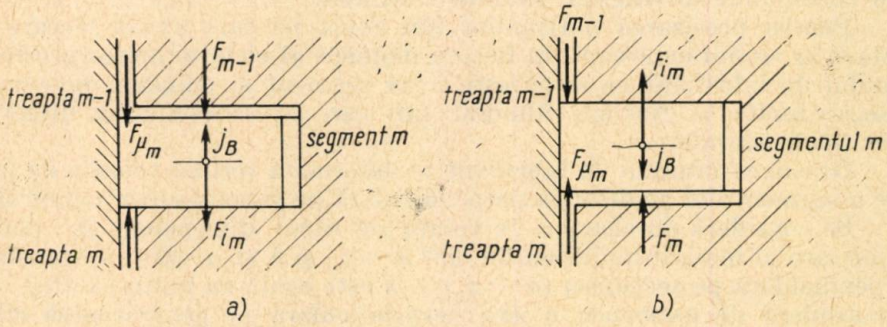


Fig. 2. — Forțele care determină poziția segmentului pe suprafețele frontale ale canalului din piston.

radială $(a - \tau_m)$ a segmentului la un moment dat, în timp ce pentru cealaltă forță lățimea suprafeței este numai mărimea jocului radial $\frac{\Delta D}{2}$ dintre piston și cilindru.

Dacă segmentul este aplicat pe suprafața frontală superioară (fig. 2*b*), forțele au expresia

$$F_{m-1} = Kp^*_{m-1}(a - \tau_m), \tag{15}$$

$$F_m = p^*_{\equiv}(a - \tau_m). \tag{16}$$

Coeficientul K evidenţiază acţiunea diferenţială a segmentului în raport cu forţele care condiţionează poziţia sa pe una dintre suprafeţele canalului din piston. Într-adevăr, presiunea care lucrează în sensul desprinderii segmentului de pe flancul pe care acesta se găseşte la un moment dat este aplicată pe o suprafaţă de K ori mai mică decît suprafaţa pe care este aplicată presiunea care acţionează în sensul aplicării segmentului pe flanc. Din expresia coeficientului K rezultă $K \ll 1$, deci această acţiune diferenţială este deosebit de însemnată.

2.2.2. *Forţa de inerţie a segmentului*

Pentru segmentul m care se găseşte pe unul dintre flancurile canalului din piston, forţa de inerţie este

$$F_{i_m} = -h(a - \tau_m)\rho j, \tag{17}$$

unde j este acceleraţia pistonului şi ρ masa specifică a materialului segmentului.

2.2.3. *Forţa de frecare dintre segment şi cilindru*

Sub influenţa condiţiilor cinematice şi de lubrificaţie, între segment şi cilindru se formează un film de lubrifiant de grosimea variabilă, a cărui prezenţă întrerupe temporar contactul direct dintre cele două suprafeţe. În consecinţă, frecarea de contact se produce numai atunci cînd grosimea peliculei de lubrifiant este egală sau mai mică decît valoarea care corespunde distrugerii filmului continuu.

Pentru precizarea porţiunilor din cursă pe care există frecare de contact ar trebui cunoscută în fiecare moment al ciclului motor grosimea filmului de lubrifiant ce se găseşte între segment şi cilindru, precum şi valoarea-limită a grosimii filmului sub care apare contactul direct al celor două suprafeţe.

Grosimea filmului de lubrifiant se determină scriind ecuaţia de mişcare a segmentului pe direcţia perpendiculară pe generatoarea cilindrului.

Se consideră un element de volum ale cărui dimensiuni în planul de mişcare al mecanismului motor sînt $a - \tau_m$ şi h şi a cărui dimensiune perpendiculară pe secţiunea $(a - \tau_m) \times h$ este egală cu unitatea (fig. 3); se consideră de asemenea o axă perpendiculară pe generatoarea cilindrului, orientată spre centrul de curbură al segmentului şi a cărei origine O este în centrul de greutate al elementului de volum în poziţia pentru care grosimea filmului de lubrifiant este nulă.

Ecuaţia de echilibru dinamic este

$$h(a - \tau_m)\rho \frac{d^2\delta_2}{dt^2} - F + P_\infty = 0, \tag{18}$$

unde F este rezultanta forţelor exterioare care lucrează asupra segmentului în sensul aplicării sale pe cilindru, iar P_∞ forţa portantă ce apare în filmul de lubrifiant cînd segmentul se deplasează cu viteza V; această forţă lucrează asupra segmentului în sensul desprinderii sale de pe generatoarea cilindrului.

Forța F și deci echilibrul dinamic depind de secțiunea ψ; într-adevăr, F este suma algebrică dintre forța produsă de presiunea elastică a segmentului $p(\psi)$, și presiunea gazelor din spatele segmentului; prin urmare, filmul de lubrifiant se va distruge întîi în secțiunea unde $p(\psi)$ este maxim și apoi pe rînd în celelalte secțiuni. Pentru calcul se poate considera însă că regimul hidrodinamic de ungere se distruge concomi-

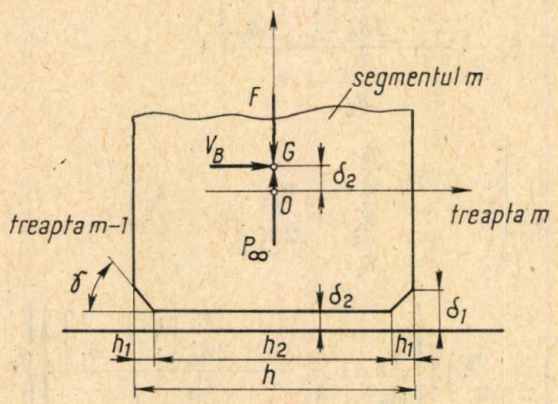


Fig. 3. — Forțele care determină echilibrul hidrodinamic al segmentului.

tent pe întreaga periferie în momentul în care s-a realizat contactul direct într-o secțiune; aceasta revine la a considera în expresia forței F valoarea $p(\psi)_{max}$. Forța datorită presiunii gazelor din spatele segmentului este dată de p^*_{m-1} sau p^*_m, după cum segmentul este aplicat pe suprafața frontală inferioară sau superioară.

Forța P_∞ este determinată din ecuațiile de lubrificație [3] aplicate segmentului cu un profil ca cel din figura 3 și care se deplasează față de cilindru cu viteza V; la extremitățile profilului, presiunile în lubrifiant sînt egale cu presiunile p^*_{m-1} și, respectiv, p_m.

Deoarece în ecuația (18) forțele de inerție ale segmentului ce se apropie și se depărtează de cilindru sînt foarte mici, ele se pot neglija în raport cu forțele exterioare, astfel încît ecuația (18) se poate scrie cu suficientă aproximație sub forma

$$P_\infty = F$$

sau, dacă se exprimă cele două forțe, egalitatea devine

$$\mathcal{C}_1(t)\,p^*_{m-1} + \mathcal{C}_2\,p^*_m + \mathcal{C}_3(t)\,[p^*_m - p^*_{m-1}] + \mathcal{C}_4(t)V = h[p(\psi)_{max} + p^*_{m-1}],$$

adică

$$p(\psi)_{max} = \frac{1}{h}\,[\mathcal{C}_1(t)\,p^*_{m-1} + \mathcal{C}_2\,p^*_m + \mathcal{C}_3(t)\,[p^*_m - p^*_{m-1}] + \mathcal{C}_4(t)V] - p^*_{m-1}, \qquad (19)$$

unde

$$\mathcal{C}_1(t) = -\delta_1\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right),$$

$$\mathcal{C}_2 = h_1 + h_2,$$

$$\mathcal{C}_3(t) = h_2 - \delta_2 \frac{h_1}{\delta_1} \frac{1 - \frac{\delta_{01}}{2\delta_2}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\frac{\delta_{01}}{\delta_2} - 1},$$

$$\mathcal{C}_4(t) = 6\mu \frac{h_1}{\delta_1}\left\{1 - \frac{\ln \frac{\delta_1}{\delta_2}}{1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}} + \frac{\delta_{01}}{2\delta_2}\left(2 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) + \left[1 - \frac{\delta_{01}}{2\delta_2}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\right]\left[\frac{h_2}{\delta_2} - \frac{h_1}{\delta_1} \frac{1 - \frac{\delta_{01}}{2\delta_2}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\frac{\delta_{01}}{\delta_2} - 1}\right]\right\},$$

$$\delta_{01} = \frac{\frac{p^*_{m-1} - p^*_m}{6\mu V} \frac{\delta_2^2}{h_1} + 2\frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{h_2}{h_1}}{\frac{\delta_2}{\delta_1}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) + \frac{h_2}{h_1}},$$

$$\delta_1 = \delta_2 + h_1 \operatorname{tg} \gamma. \tag{20}$$

În expresiile precedente, mărimile h_1, h_2, γ, δ_1, δ_2 au semnificaţiile din figura 3, iar δ_{01} reprezintă grosimea filmului de lubrifiant în secţiunea în care presiunea portantă are valoarea maximă.

Rezolvarea ecuaţiei (19) presupune stabilirea, pentru fiecare valoare a vitezei V, a grosimii δ_2 care satisface ecuaţia, ceea ce este deosebit de dificil avînd în vedere complexitatea expresiilor (20).

Pentru necesităţile calculului funcţional al segmenţilor, ecuaţia (19) poate fi însă tratată mai simplu folosind următoarele observaţii:

— în punctele moarte, grosimea filmului de lubrifiant este minimă,

— între două poziţii extreme succesive ale mecanismului motor; grosimea δ_2 are o variaţie continuă, crescînd o dată cu viteza V spre valoarea δ_{2max} şi apoi scăzînd spre valoarea minimă în a doua parte a cursei;

— grosimea-limită δ_2, care corespunde distrugerii filmului continuu de lubrifiant, depinde de o serie de mărimi, ca natura şi starea suprafeţelor, calităţile lubrifiantului, regimul termic etc. Dacă pentru un motor aceste mărimi sînt cunoscute, din datele oferite de literatura de specialitate se poate stabili valoarea-limită δ_2 corespunzătoare; ea se realizează cu siguranţă de două ori pe intervalul unei curse şi în aceste poziţii viteza V şi coeficienţii (20) satisfac ecuaţia (19).

Cu aceste observații, modul de determinare a condițiilor de lubrificație din ecuația (19) se face după cum urmează :

— folosind valoarea cunoscută pentru grosimea — limită a filmului de lubrifiant, se calculează din relațiile (20) coeficienții ecuației (19) ;

— se reprezintă membrul stîng, MS (constant pe ciclu pentru unul dintre segmenții setului), și membrul drept, MD, pentru o valoare oarecare a unghiului θ, deci a vitezei V (fig. 4) ; dacă $MD < MS$, filmul de

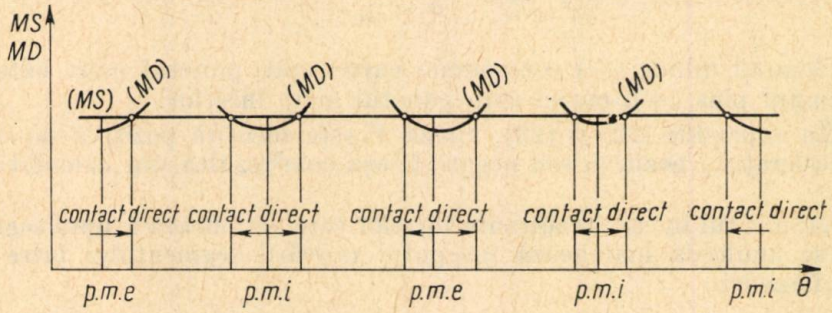


Fig. 4. — Diagramă de calcul.

lubrifiant este întrerupt și deci există contact direct între suprafețe, iar dacă $MD > MS$, segmentul și cilindrul sînt separați printr-un film continuu.

Între extremitățile unei curse unde $MD < MS$ și secțiunile unde se realizează egalitatea $MS = MD$, segmentul este în contact direct cu cilindrul ; pe aceste zone există forță de frecare de mărime

$$F_{\eta_m} = \eta V, \tag{21}$$

unde η este coeficientul frecării de alunecare.

★

Rezultanta forțelor care acționează segmentul, precizate de relațiile (13)—(17) și (21), este variabilă în mărime și sens, deoarece forțele care o determină sînt variabile în cursul ciclului motor.

Considerînd aceste forțe aplicate în centrul de greutate al segmentului, mărimea și sensul rezultantei sînt suma algebrică a forțelor componente ; se admite că rezultanta este pozitivă atunci cînd este îndreptată spre carter.

Cu aceste convenții, condiția ca segmentul să fie aplicat pe flancul inferior al canalului său este

$$F_{m-1} - F_m + F_{i_m} \mp F_{\eta_m} \geqslant 0.$$

Semnul minus (—) se referă la cursa spre punctul mort exterior, cînd forța de frecare are sens contrar sensului pozitiv ales, iar semnul plus(+) corespunde cursei spre punctul mort interior.

Dacă se înlocuiesc forțele cu expresiile stabilite anterior, condiția devine

$$p^*_{m-1} - Kp^*_m \mp \frac{\eta V}{a - \tau_m} - h\varrho j \geqslant 0. \tag{22}$$

Segmentul este aplicat pe flancul superior atunci cînd

$$F_{m-1} - F_m + F_{i_m} \mp F_{\eta_m} \leqslant 0,$$

adică

$$Kp^*_{m-1} - p^*_m \mp \frac{\eta V}{a - \tau_m} - h\varrho j \leqslant 0. \tag{23}$$

Semnul minus (—) corespunde cursei spre punctul mort exterior, iar semnul plus (+), cursei spre punctul mort interior.

În expresiile (22) și (23), viteza V este socotită pozitivă pe cursă, iar accelerația j pozitivă sau negativă, așa cum rezultă din calculul cinematic.

Momentul în care rezultanta forțelor care acționează asupra segmentului se anulează marchează începutul mișcării segmentului între cele două flancuri.

2.3. ECUAȚIILE CARE DESCRIU PULSAȚIA SEGMENTULUI

Fie segmentul situat pe una dintre suprafețele canalului său în momentul în care rezultanta forțelor care îl acționează devine egală cu zero. În acest moment, segmentul se desprinde de pe flanc, iar mișcarea decurge în continuare sub acțiunea forțelor care lucrează asupra sa, pînă cînd segmentul parcurge în canalul său o distanță egală cu jocul axial și se aplică pe flancul opus.

În momentul declanșării mișcării, acțiunea diferențială a segmentului încetează. Cele două suprafețe pe care lucrează presiunea gazelor din treptele $m-1$ și m devin egale; forța care acționează segmentul în sensul deplasării crește brusc de $\frac{1}{K}$ ori; notînd această forță cu F'_m sau F'_{m-1} după cum mișcarea segmentului începe de pe flancul inferior sau de pe cel superior, expresia ei este

$$F'_m = p^*_m(a - \tau_m)$$

sau

$$F'_{m-1} = p^*_{m-1}(a - \tau_m).$$

Această situație determină creșterea vitezei de deplasare a segmentului între flancuri, deci scurtarea duratei de pulsație.

Față de un sistem fix de coordonate, cu originea în punctul de intersecție dintre axa paralelă cu generatoarea cilindrului și planul ce trece prin extremitatea dinspre chiulasă a cilindrului, viteza și accelerația absolută a segmentului care pulsează sînt

$$\frac{dx_m}{dt} + V \text{ și, respectiv, } \frac{d^2x_m}{dt^2} + j, \text{ unde } \frac{dx_m}{dt} \text{ și } \frac{d^2x_m}{dt^2}$$

sînt viteza și accelerația relativă a segmentului în raport cu un sistem solidar cu pistonul, cu originea în centrul de greutate al segmentului din poziția corespunzătoare declanșării mișcării de pe flancul inferior, iar V și j viteza și accelerația de transport a sistemului mobil față de cel fix.

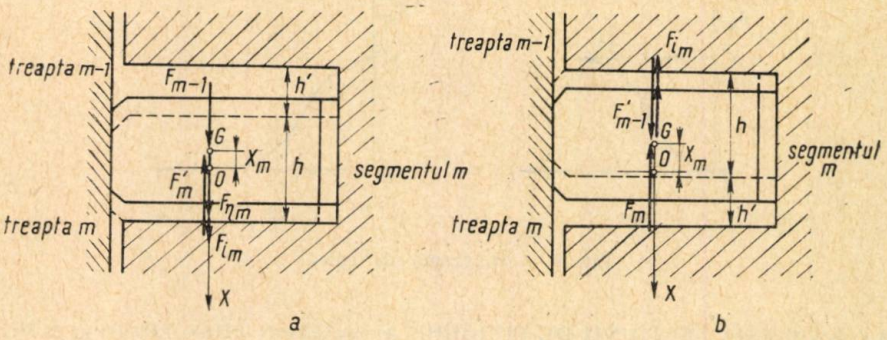


Fig. 5. — Forțele care acționează segmentul în timpul pulsației.

Ecuația de mișcare a segmentului m ce se deplasează spre flancul superior este (fig. 5*a*)

$$F_{i_m} + F_{\eta_m} + F_{m-1} - F'_m = 0,$$

sau

$$h\rho\left(\frac{\mathrm{d}^2x_m}{\mathrm{d}t^2} + j\right) + \frac{\eta}{a - \tau_m}\left(\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} + V\right) + (p^*_{m-1} - p^*_m) = 0 \qquad (24)$$

Pentru segmentul ce se deplasează spre flancul inferior (fig. 5*b*), ecuația de mișcare este

$$-F_{i_m} - F_{\eta_m} - F_m + F'_{m-1} = 0$$

sau

$$h\rho\left(\frac{\mathrm{d}^2x_m}{\mathrm{d}t^2} + j\right) + \frac{\eta}{a - \tau_m}\left(\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} + V\right) + (p^*_m - p^*_{m-1}) = 0 \qquad (25)$$

Ecuațiile precedente sînt valabile pentru $x_m \in [0, h']$, unde h' este mărimea jocului axial al segmentului în canalul său. Constantele de integrare pentru ecuația (24) precizează că în momentul inițial al mișcării ($t = 0$) $x_m = 0$ și $\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} = 0$; ecuația se integrează pînă cînd $x_m = h'$

(fig. 6*a*). Pentru ecuația (25), constantele de integrare se determină din condiția ca în momentul inițial $x_m = h'$ și $\frac{dx_m}{dt} = 0$; ecuația se integrează pînă cînd $x_m = 0$ (fig. 6*b*).

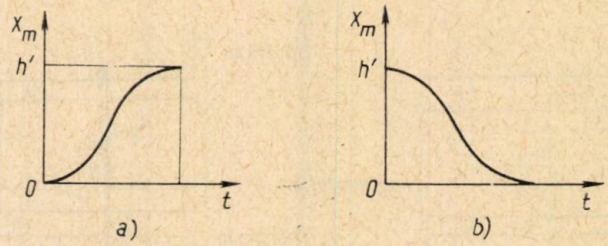


Fig. 6. — Diagramă de calcul.

2.4. EXPRESIA SECȚIUNII DE CURGERE A GAZELOR PRIN TREPTELE DE SEGMENȚI

Presiunea gazelor într-o treaptă oarecare depinde de secțiunile prin care gazele sînt vehiculate între treapta considerată și treptele alăturate ei; aceste secțiuni sînt în general diferite.

Într-adevăr, dacă segmenții nu pulsează, gazele pătrund dintr-o treaptă în cealaltă numai prin secțiunea determinată de distanța dintre capetele libere; dacă la motorul nou aceste secțiuni sînt egale pentru toți segmenții, după un timp oarecare, datorită faptului că segmenții se uzează inegal, secțiunile de trecere vor diferi sensibil de la o treaptă la alta. Mai mult decît atît: dacă unii segmenți pulsează, secțiunile de trecere pe care le oferă curgerii gazelor între treptele din amontele și avalul lor cresc considerabil; gazele se scurg atît prin secțiunea dintre capetele libere, cît și prin secțiunea dintre segmentul în mișcare și canalul său, secțiune variabilă atîta timp cît durează pulsația.

În cazul cel mai general, secțiunile de curgere a gazelor între treptele $m-1$, $m+1$ și treapta m au expresiile

$$f_{(m-1)\,m,\ m\,(m-1)} = f_0 + f(\tau_m) + f(x_m), \tag{26}$$

$$f_{(m+1)\,m,\ m\,(m+1)} = f_0 + f(\tau_{m+1}) + f(x_{m+1}), \tag{27}$$

unde

f_0 este secțiunea dintre capetele libere ale segmentului nou,
$f(\tau_m)$ — creșterea de secțiune dintre capetele libere datorită uzurii radiale a segmentului m,
$f(x_m)$ — secțiunea de curgere determinată între segment și canalul său la un moment dat în timpul pulsației.

Stabilirea secțiunii de curgere $f(\tau_m)$ se face în modul următor. Fie $dl = \frac{1}{2}(D - a)d\psi$ lungimea elementului de arc al segmentului nou, adus la forma circulară de diametru exterior D. Pentru segmentul care a suferi

o uzură radială τ_m, lungimea dl subîntinde un unghi la centru mai mic, deoarece prin uzură raza fibrei medii a crescut de la $\frac{1}{2}(D-a)$ la $\frac{1}{2}(D-a)+\tau_m$; dacă se notează cu $d\zeta$ scăderea unghiului la centru pentru arcul dl, din egalitatea

$$\frac{1}{2}(D-a)\,d\psi=\left[\frac{1}{2}(D-a)+\tau_m\right](d\psi-d\zeta)$$

rezultă

$$d\zeta=\frac{\tau_m}{\frac{1}{2}(D-a)+\tau_m}\,d\psi.$$

Pentru întreg segmentul, mărimea arcului dintre capetele libere determinat de uzura radială τ_m se obține prin sumarea elementelor $d\zeta$:

$$\zeta=2\int_0^{\pi}\frac{\tau_m}{\frac{1}{2}(D-a)+\tau_m}\,d\psi.$$

Secțiunea $f(\tau_m)$ este astfel

$$f(\tau_m)=\zeta\left[\frac{1}{2}(D-a)+\tau_m\right]\frac{\Delta D}{2}. \tag{28}$$

Secțiunile suplimentare prin care gazele curg din treptele $m-1$ și $m+1$ în treapta m în timpul pulsației segmenților m și $m+1$ sînt, respectiv (fig. 7),

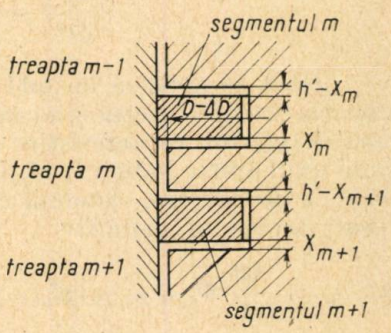


Fig. 7. — Secțiunile de curgere în timpul pulsației segmenților.

$$f(x_m)=\pi(D-\Delta D)\,(h'-x_m), \tag{29}$$

$$f(x_{m+1})=\pi(D-\Delta D)x_{m+1} \tag{30}$$

sau, dacă curgerea are loc din treapta m spre treptele $m-1$ și $m+1$

$$f(x_m)=\pi(D-\Delta D)x_m, \tag{29'}$$

$$f(x_{m+1})=\pi(D-\Delta D)(h'-x_{m+1}). \tag{30'}$$

3. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII CARE DESCRIE PROCESUL DE CURGERE ȘI MIȘCAREA SEGMENȚILOR

La rezolvarea sistemului de ecuații (1)—(12), (19), (22)—(30) din treptele de segmenți pe durata unui ciclu motor, se consideră drept date ale problemei : variația presiunii și temperaturii în treptele extreme de segmenți (cilindru și carter), variația mărimilor cinematice ale mecanismului motor, toate dimensiunile caracteristice treptelor de segmenți pentru ciclul considerat (dimensiunile tuturor segmenților și canalelor lor, jocul radial dintre piston și cilindru în fiecare treaptă), toate mărimile care caracterizează schimbul de căldură între gazele din trepte, cilindru și piston.

Rezolvarea sistemului de ecuații se face cel mai comod pe cale numerică, transformînd ecuațiile diferențiale în ecuații cu diferențe finite ; în acest scop se împarte durata ciclului motor în intervale θ corespunzătoare unui unghi de rotație al manivelei de un grad ; se numerotează intervalele în ordine crescătoare, primul interval purtînd numărul zero. Pentru un interval oarecare k, diferențialele din ecuațiile sistemului precedent au expresiile

$$\frac{\mathrm{d}U_{m,k}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\Delta U_{m,k}}{\Delta\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}G_{m,k}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\Delta G_{m,k}}{\Delta\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}x_{m,k}}{\mathrm{d}t} = \frac{6N(x_{m,k+1} - x_{m,k-1})}{2\Delta\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{m,k}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{6N(x_{m,k+1} - 2x_{m,k} + x_{m,k-1})}{(\Delta\theta)^2}.$$

Dacă se notează în mod simbolic cu Φ și Ω funcțiile prin care variația energiei interne și a cantității de fluid din treapta m depind de principalele mărimi caracteristice ale treptei și dacă se atribuie acestor funcțiuni unul dintre indicii I, II, III, IV pentru a le referi la cele patru cazuri posibile de curgere, sistemul care descrie procesele din treapta m de segment devine în definitiv

$$\Delta U_{m,k} = \frac{\Delta\theta}{6N}\Phi_{\mathrm{I,\,II,\,III,\,IV}}(p^*_{m,k},\ p^*_{(m-1),k},\ p^*_{(m+1),k},\ \mathcal{T}_{m,k},\ \mathcal{T}_{m-1,k},\ \mathcal{T}_{m+1,k},\ f_{(m-1)m,k},\ f_{(m+1)m,k}), \tag{31}$$

$$\Delta G_{m,k} = \frac{\Delta\theta}{6N}\Omega_{\mathrm{I,\,II,\,III,\,IV}}(p_{m,k},\ p_{(m-1),k},\ p_{(m+1),k},\ \mathcal{T}_{m,k},\ \mathcal{T}_{m-1,k},\ \mathcal{T}_{m+1,k},\ f_{(m-1)m,k},\ f_{(m+1)m,k}), \tag{32}$$

$$U_{m,k} + \Delta U_{m,k} = U_{m,k+1}, \tag{33}$$

$$G_{m,k} + \Delta G_{m,k} = G_{m,k+1}, \tag{34}$$

$$u_{m,k+1} = \frac{U_{m,k+1}}{G_{m,k+1}}, \tag{35}$$

$$\mathcal{T}_{m,k+1} = \mathcal{T}(u_{m,k+1}), \tag{36}$$

$$p^*_{m,k+1} = \frac{G_{m,k+1}\,\mathcal{R}\,\mathcal{T}_{m,k+1}}{\mathcal{V}_{m,k}}, \tag{37}$$

$$p(\psi)_{max} = \frac{1}{h}\{\mathcal{C}_{1m}p^*_{m-1,k} + \mathcal{C}_2 p^*_{m,k} + \mathcal{C}_{3m}[p^*_{m-1,k} - p^*_{m,k}] + \mathcal{C}_{4m}V_k\} - p^*_{m-1,k}, \tag{38}$$

$$(p^*_{m-1,k} - Kp^*_{m,k}) \mp \frac{\eta V_k}{a - \tau_m} - h\rho j_k \geqslant 0, \tag{39}$$

$$\left[1 + \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\eta}{h\rho(a-\tau_m)}\right]x_{m,k+1} - 2x_{m,k} + \left[1 - \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\eta}{h\rho(a-\tau_m)}\right]x_{m,k-1} + \\ + \frac{(\Delta\theta)^2}{6N}\left[j_k + \frac{\eta V_k}{h\rho(a-\tau_m)} + \frac{p^*_{m-1,k} - p^*_{m,k}}{h\rho}\right] = 0, \tag{40}$$

$$(Kp^*_{m-1,k} - p^*_{m,k}) \pm \frac{\eta V_k}{a - \tau_m} - h\rho j_k \leqslant 0, \tag{41}$$

$$\left[1 + \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\eta}{h\rho(a-\tau_m)}\right]x_{m,k+1} - 2x_{m,k} + \left[1 - \frac{\Delta\theta}{2}\frac{\eta}{h\rho(a-\tau_m)}\right]x_{m,k-1} + \\ + \frac{(\Delta\theta)^2}{6N}\left[j_k + \frac{\eta V_k}{h\rho(a-\tau_m)} + \frac{p^*_{m,k} - p^*_{m-1,k}}{h\rho}\right] = 0, \tag{42}$$

$$f_{(m-1)m,k} = f_0 + f(\tau_m) + f(x_{m,k}), \tag{43}$$

$$f_{(m+1)m,k} = f_0 + f(\tau_m) + f(x_{m+1,k}), \tag{44}$$

$$f(\tau_m) = \Delta D\left[\frac{1}{2}(D-a) + \tau_m\right]\int_0^\pi \frac{\tau_m}{\frac{1}{2}(D-a) - \tau_m}\,\mathrm{d}\psi, \tag{45}$$

$$f(x_{m,k}) = \pi(D - \Delta D)(h' - x_{m,k}), \tag{46}$$

$$f(x_{m+1,k}) = \pi(D - \Delta D)x_{m+1,k}, \tag{47}$$

$$f(x_{m,k}) = \pi(D - \Delta D)x_{m,k}, \tag{46'}$$

$$f(x_{m+1,k}) = \pi(D - \Delta D)(h' - x_{m+1,k}). \tag{47'}$$

Fie cunoscută starea de presiune și de temperatură în toate treptele de segmenți într-un moment oarecare al ciclului considerat drept moment

de declanşare a calculelor ($k = 0$); fie de asemenea presupus că în acest moment nici unul dintre segmenţi nu pulsează, toţi fiind aplicaţi pe flancul inferior al canalului din piston.

1. Se consideră primele trei trepte consecutive (0, 1, 2) între care se află primii doi segmenţi de compresie; în funcţie de valoarea presiunii în treapta *1* în raport cu presiunea din treptele *0* şi *2* se va folosi la calculul variaţiei energiei interne şi cantităţii de fluid din treapta întîi, pentru primul interval de integrare, unul dintre grupurile de ecuaţii stabilite pentru cele patru cazuri posibile de curgere; se determină pentru cazul corespunzător, în urma unui calcul de curgere a fluidului perfect [2], [4], variaţia cantităţii de fluid şi variaţia $\Delta U_{1,0}$ a energiei interne în treapta *1* pentru primul interval; adunînd aceste variaţii la valorile iniţiale $G_{1,0}$ $U_{1,0}$ ale mărimilor respective, se determină cu ajutorul ecuaţiilor (33) şi (34) valorile $G_{1,1}$ şi $U_{1,1}$ corespunzătoare sfîrşitului primului interval. Din ecuaţia (35) şi (36) se determină apoi energia internă specifică şi temperatura fluidului la sfîrşitul intervalului şi, în sfîrşit, presiunea sa din ecuaţia de stare (37).

Se consideră următoarele trei trepte consecutive (1, 2, 3) şi, în funcţie de valorile relative ale presiunii în aceste trepte, se continuă calculul în scopul determinării presiunii în treapta doua la sfîrşitul primului interval. Se consideră alte trei trepte consecutive şi se continuă calculele în acelaşi mod pînă cînd se ajunge la ultima treaptă, care este carterul motorului. *La finele acestei etape este cunoscută temperatura şi presiunea în toate treptele de segmenţi la sfîrşitul primului interval.*

2. Se determină dacă ansamblul forţelor care lucrează asupra fiecărui segment provoacă sau nu pulsaţia acestuia. În prealabil trebuie însă determinat dacă în poziţia mecanismului motor corespunzător sfîrşitului primului interval de integrare are loc sau nu contactul direct dintre segment şi cilindru; în primul caz există forţă de frecare, în cel de-al doilea existenţa unui film continuu de lubrifiant între segment şi cilindru anulează frecarea de contact. În acest scop, se calculează membrul drept al ecuaţiei (38) pentru valorile cunoscute ale presiunii din amontele şi avalul fiecărui segment; pentru calculul coeficienţilor $\mathcal{C}_{1m}$, $\mathcal{C}_{3m}$ şi $\mathcal{C}_{4m}$ se va considera grosimea δ_2 care corespunde întreruperii filmului continuu de lubrifiant. Se compară membrul drept astfel calculat cu membrul stîng (constant pentru fiecare segment pe toate intervalele; dacă $MS > MD$, rezultă că regimul de lubrificaţie nu este hidrodinamic şi deci există forţă de frecare, a cărei expresie este dată de formula (21); dacă $MS < MD$, nu există forţă de frecare.

3. Se calculează pentru fiecare segment forţele care îl acţionează conform relaţiilor (13)—(17) şi (21), precum şi sensul rezultantei; se verifică dacă aceasta satisface inecuaţia (39) şi, în caz afirmativ, rezultă că segmentul respectiv nu pulsează. Dacă acest lucru se întîmplă pentru toţi segmenţii, se trece la calculul presiunii şi temperaturii în trepte pentru cel de-al doilea interval, conform celor arătate la punctul 1.

4. Dacă sînt segmenţi care pulsează, calculul se conduce în modul următor. Pentru segmenţii care pulsează, concomitent cu ecuaţia energiei interne şi a cantităţii de gaze se integrează şi una dintre ecuaţiile (40)

sau (42), după cum mișcarea segmentului începe de pe flancul inferior sau superior. Să presupunem că mișcarea începe de pe flancul inferior, deci ecuația (40) este cea care se integrează; la sfîrșitul fiecăruia dintre intervalele următoare se determină din ecuația de mișcare poziția segmentului care pulsează în canalul său; pentru calculul presiunilor în trepte în aceste intervale se ține seama că, dacă segmentul m pulsează secțiunile de trecere, $f_{(m-1)m}$ și $f_{m(m-1)}$ au expresiile (46) sau (46').

Cînd din integrarea ecuației de mișcare rezultă $x_m = h'$, mișcarea segmentului între flancuri a încetat; segmentul este aplicat pe flancul superior, de aceea la sfîrșitul fiecăruia dintre intervalele ce vor urma trebuie verificată inecuația (41); cînd ea nu mai este satisfăcută, o nouă pulsație începe, de data aceasta însă ea este descrisă de ecuația (42).

Cînd segmentul m a ajuns pe flancul superior, secțiunea de scurgere $f_{(m-1)m}$ se reduce din nou doar la valoarea determinată între capetele segmentului.

Se parcurg, după procedeul descris mai sus, toate intervalele ciclului motor, determinîndu-se la sfîrșitul ultimului interval o stare de presiuni în trepte, care diferă, în general, de starea inițială considerată la declanșarea calculului; este posibil de asemenea ca în această stare ipoteza făcută cu privire la poziția segmenților în canalele din piston în momentul declanșării calculelor să nu fie confirmată.

Se rezolvă din nou sistemul, considerînd de data aceasta noile valori ale presiunii și noua poziție a segmenților în canale drept stare inițială. După cîteva iterații se ajunge la o stare finală care diferă neglijabil de cea inițială; variația de presiune din trepte și mișcarea segmenților determinate în cursul acestei ultime iterații descriu *adevăratele procese care au loc în treptele de segmenți pentru datele problemei.*

4. STABILIREA MOMENTULUI DE DECLANȘARE A CALCULELOR

Drept moment de declanșare a calculelor se alege începutul cursei de destindere, deoarece pentru acest moment se pot formula cu mai multă siguranță ipoteze asupra presiunii din trepte și poziției segmenților în canale.

Într-adevăr, în jurul punctului mort interior corespunzător cursei de destindere, presiunea în cilindru atinge valorile maxime, iar gradientul de presiune este de asemenea foarte mare; în această situație, presiunea în treptele următoare este cu siguranță mai mică decît cea din cilindru și se poate presupune cu destulă certitudine că ea este cu atît mai mică cu cît treapta este mai departe de cilindru, căci în fiecare treaptă variația de presiune se transmite cu o oarecare întîrziere față de variația din treapta precedentă.

Se poate deci aproxima regimul de presiuni existent în treptele de segmenți cu procesul de curgere în regim permanent ce s-ar stabili în niște trepte de labirinți identice ca număr și dimensiuni cu treptele de segmenți și în care presiunile extreme ar fi presiunea din cilindru și, respectiv, cea din carter în momentul declanșării calculelor.

5. CONCLUZII

Calculul funcţional prezentat are un caracter de generalitate; el descrie cu un grad de precizie deosebit regimul de curgere prin treptele de segmenţi, poziţia segmenţilor în canalele din piston şi cantitatea de gaze care pătrund în carter în fiecare moment al ciclului motor.

Sistemul de ecuaţii stabilit permite rezolvarea prin iteraţii succesive cu ajutorul maşinilor electronice de calcul, ceea ce facilitează studiul optimizării funcţionale a segmenţilor.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bărănescu, *Calculul funcţional al segmenţilor*, Rev. tehn. militară, **II**, 2. (1954).
2. G. Bărănescu, *O metodă generală de calcul a parametrilor termodinamici în procesele de scurgere a gazelor în regim variabil*, St. cerc. energ., *1—2* (1955).
3. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1957.
4. * * * *Manualul inginerului termotehnician*, vol. 2, Bucureşti, Edit. tehnică, 1961.

REGIMURILE TRANZITORII PELICULARE ALE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE

(partea I-a problema planparalelă)

DE

C. I. MOCANU

538. 542 : 621.3.001

Autorul elaborează o teorie unitară a regimurilor tranzitorii peliculare ale cîmpului electromagnetic în conductoarele cu suprafețe regulate și fundamentează conceptele de refulare local normală și total normală, local netă și total netă. În aceste regimuri variațiile spațiotemporale ale mărimilor de stare a cîmpului electromagnetic se pot urmări în lungul normalelor interioare pînă în centrele de curbură, iar vectorul lui Poynting e normal pe suprafața conductorului.

Se integrează ecuațiile de difuzie pentru problema bidimensională și în două cazuri particulare ale problemei tridimensionale.

Intensitățile $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{H}$ și inducțiile $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{B}$ ale cîmpurilor electric și magnetic, precum și densitatea curentului electric de conducție $\boldsymbol{I}$, sînt în conductoarele liniare, izotrope, omogene și imobile în regim cuasistaționar, soluții ale unei ecuații liniare cu derivate parțiale de tip parabolic

$$\Delta \boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{r}_M, t) = \mu\sigma \frac{\delta \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)}{\delta t}, \tag{1}$$

în care $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$ este $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t)$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t)$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_M, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_M, t)$ sau $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}_M, t)$, μ — permeabilitatea, σ — conductivitatea și $\boldsymbol{r}_M$ raza vectoare.

Dacă intensitățile $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{H}$, inducțiile $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{B}$ și densitatea de curent $\boldsymbol{I}$ variază sinusoidal în timp cu pulsația ω și cu fazele inițiale α_k.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t) = \sum_1^3 G_{Kmax}\,(\boldsymbol{r}_M)\ \sin\,[\omega t + \alpha_K(\boldsymbol{r}_M)]\boldsymbol{e}_K, \tag{2}$$

ecuația care descrie regimul cuasistaționar armonic permanent este de tip Helmholtz :

$$\Delta \underline{\boldsymbol{G}}\,(\boldsymbol{r}_M, \omega) = \gamma_0^2\, \underline{\boldsymbol{G}}\,(\boldsymbol{r}_M, \omega), \tag{3}$$

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 385—413, 1970

în care $\underline{G}(\boldsymbol{r}_M, \omega)$ este reprezentarea în complex a vectorului $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t)$:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{Kmax}(\boldsymbol{r}_M) e^{j\alpha_k(\boldsymbol{r}_M)},$$

e_K ($k = 1, 2, 3$), fiind versorii sistemului de coordonate,

$$\gamma_0 = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j)\frac{1}{\delta_0}, \tag{4}$$

δ_0 fiind adîncimea de pătrundere a cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor :

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \tag{5}$$

Integrarea exactă a ecuațiilor (1) și (3) în interiorul domeniului $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ al conductorului este posibilă numai pentru cîteva forme geometrice simple ale suprafeței acestuia (cilindru plin sau cav, sferă etc.). Datorită în principal condițiilor inițiale și pe frontieră, se preferă sistemul de coordonate în care suprafața conductorului $\Sigma^{(0)}$ este suprafață de coordonate. Din cauza numărului redus al sistemelor de coordonate în care se pot rezolva ecuațiile (1) și (3) și al condițiilor inițiale și pe frontieră extrem de variate, numărul problemelor pentru care se pot determina soluțiile în fiecare punct și în fiecare moment este mic.

În anumite condiții, cîmpul electromagnetic este localizat în conductoare, în subdomenii $d_j \subset \mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$, adică în condiții inițiale și pe frontieră date, intensitățile și inducțiile cîmpurilor electric și magnetic și densitatea de curent sînt neglijabile în subdomeniile $C_{\mathcal{D}}d_j$ (domeniu complementar al lui d_j în raport cu $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$) (fig. 1) :

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t) = \sim 0.$$
$$M \in C_{\mathcal{D}}d_j$$

Localizări frecvente ale cîmpului electromagnetic sînt la suprafața domeniului $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ și fenomenele se numesc de *refulare superficială*.

Ecuațiile (1) și (3), care descriu repartiția de volum a intensităților, inducțiilor și densității de curent, sînt nepotrivite pentru studiul fenomenelor de refulare superficială. Astfel, la stabilirea cîmpului electromagnetic în conductoare și în regimul armonic permanent al refulării nete, intensitățile și inducțiile cîmpurilor electric și magnetic și densitatea de curent sînt nule în interiorul conductoarelor, cu excepția unei pelicule periferice de grosime egală cu adîncimea de pătrundere a cîmpului electromagnetic în semispațiu.

Se demonstrează în literatură că, la refulare netă a curentului alternativ, cîmpul magnetic este peste tot tangențial la suprafața de formă oarecare a conductoarelor, dar nu se demonstrează dacă este sau nu este valabilă reciproca : regimul în care cîmpul magnetic este tangențial la suprafața de formă oarecare a conductorului (cu excepția conductorului circular) este de refulare netă a curentului electric.

În această lucrare, autorul elaborează o teorie unitară a regimurilor tranzitorii peliculare ale cîmpului electromagnetic în conductorul de orice formă a suprafeței, dar fără muchii sau vîrfuri, și fundamentează conceptele de *refulare local normală* și *total normală*, precum și de *refulare local netă* și *total netă*; se demonstrează prin analiza calitativă a ecuațiilor(1) și (3), exprimate în sistemul de coordonate intrinsec, că regimul tranzitoriu al refulării superficiale în conductoarele mărginite de suprafețe regulate $\Sigma^{(0)}$ este descris de ecuația liniară cu derivate parțiale de tip parabolic

$$\Delta \boldsymbol{G}(x,\ t) = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{G}(x,\ t)}{\partial t}, \qquad (6)$$

în care funcțiunea vectorială $\boldsymbol{G}(x, t)$ depinde spațial numai de coordonata $x_3 = x$, după normală. Dacă mărimea $\boldsymbol{G}(x, t)$ variază sinusoidal în timp (2), ecuația care descrie regimul cvasistaționar armonic permanent al refulării normale este de tip Helmholtz:

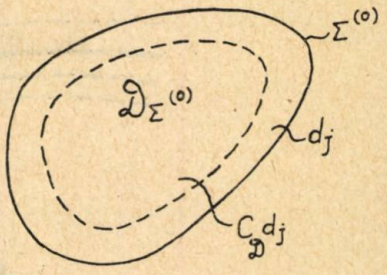


Fig. 1. — Refularea cîmpului electromagnetic la suprafața domeniului $D_{\Sigma^{(0)}}$.

$$\Delta \boldsymbol{G}\ (x,\ \omega) = \gamma_0^2 \boldsymbol{G}\ (x,\ \omega). \qquad (6')$$

În regimurile numite în această lucrare de refulare normală sau superficială, se demonstrează că mărimile $\boldsymbol{G}(x, t)$, ale căror variații spațiotemporale se pot urmări în lungul normalelor interioare pînă în centrul de curbură, nu depind de coordonatele tangențiale x_1 și x_2 ale sistemului de coordonate intrinsec, iar dependența de coordonata x_3 se examinează în problema plan-paralelă, într-un sistem de coordonate cilindric local cu axa în axa de curbură, și în problema tridimensională, dacă razele principale de curbură sînt egale, într-un sistem de coordonate sferic local cu centrul în centrul de curbură; mărimile $\boldsymbol{G}(x, t)$ au pe suprafața conductorului $\Sigma^{(0)}$ și în punctele de intersecție ale normalei interioare cu celelalte suprafețe de coordonate Σ pînă în centrul de curbură numai componente tangențiale. În regimurile de refulare normală vectorul Poynting este normal pe suprafața conductorului.

Se demonstrează în lucrare următoarea reciprocă: regimul în care cîmpul magnetic este peste tot tangențial la suprafața regulată, de forma oarecare a unui conductor, nu este neapărat un regim de refulare netă a curentului, însă este un regim de refulare normală.

Se integrează ecuațiile (1) pentru regimurile tranzitorii de refulare normală și netă în problemele bidimensionale și în două cazuri particulare ale problemei tridimensionale.

1. ECUAȚIILE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN SISTEMUL DE COORDONATE INTRINSEC

Fie $\mathcal{D}_{\Sigma^{(0)}}$ domeniul mărginit de suprafața regulată $\Sigma^{(0)}$ (cu normala peste tot continuă), liniar, izotrop și omogen, în care permeabilitatea μ și conductivitatea σ sînt constante. Sistemul de coordonate intrinsec sau

atașat suprafeței conductorului, în care suprafața acestuia $\Sigma^{(0)}$ este una dintre suprafețele de coordonate ale sistemului, se definește, conform unei teoreme a lui Dupin [1], după cum urmează : o suprafață $\Sigma^{(0)}$ aparține unui sistem de coordonate format de suprafețele Σ paralele cu $\Sigma^{(0)}$ și de două familii de suprafețe desfășurate de normalele x_3 la $\Sigma^{(0)}$ în lungul liniilor principale de curbură $\Gamma_1^{(0)}$ și $\Gamma_2^{(0)}$ ale acesteia. În figura 2 s-au

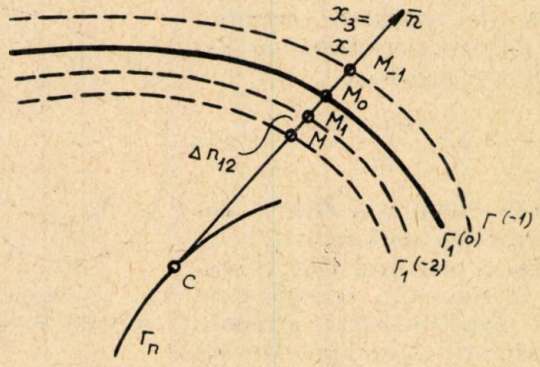


Fig. 2. — Sistemul de coordonare intrinsec atașat unei suprafețe regulate $\Sigma^{(0)}$.

reprezentat linia de curbură $\Gamma_1^{(0)}$ (presupusă în plan) a suprafeței $\Sigma^{(0)}$ și evoluta Γ_r. Desfășurînd tangenta $\overline{CM}$ la evoluta Γ_n, punctul M_0 descrie linia de curbură $\Gamma_1^{(0)}$ a suprafeței $\Sigma^{(0)}$ a domeniului, iar punctele M_q și M_{-q} $(q = 1, 2, \ldots)$ descriu liniile de curbură $\Gamma_1^{(q)}$ și $\Gamma_1^{(-q)}$, atașate liniei de curbură $\Gamma_1^{(0)}$. Tangentele $\overline{CM}_q$ și $\overline{CM}_{-q}$ sînt normale la liniile principale de curbură $\Gamma_1^{(q)}$ și $\Gamma_1^{(-q)}$, iar segmentul $\Delta r_{q,q+1}$, determinat de două linii principale de curbură $\Gamma_1^{(q)}$ și $\Gamma_1^{(q+1)}$, este egal cu diferența razelor principale de curbură $\rho_1^{(q)}$ și $\rho_1^{(q+1)}$:

$$\Delta r_{q,q+1} = \rho_1^{(q)} - \rho_1^{(q+1)}. \tag{7}$$

Dacă se alege originea pentru coordonata x_3 în centrul de curbură C_1, rezultă din relația (7)

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}\rho_1, \tag{8}$$

iar pentru originea în centrul de curbură C_2 rezultă

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}\rho_2, \tag{9}$$

în care s-a notat cu $\mathrm{d}n$ și cu $\mathrm{d}\rho_1$, $\mathrm{d}\rho_2$ creșterile elementare ale normalei și ale razelor principale de curbură, menținînd fixe centrele de curbură C_1 și C_2. Versorii $\boldsymbol{e}_1(x_1, x_2, x_3)$ și $\boldsymbol{e}_2(x_1, x_2, x_3)$ ai tangentelor la liniile principale de curbură Γ_1 și Γ_2 conținute în suprafața atașată Σ împreună cu versorul normal $\boldsymbol{e}_3(x_1, x_3, x_3) = \boldsymbol{n}(x_1, x_2, x_3)$ fiind triortogonali, sistemul de coordonate intrinsec (x_1, x_2, x_3) este triortogonal, cu elementele de linie $\mathrm{d}s_1$, $\mathrm{d}s_2$ și $\mathrm{d}s_3 = \mathrm{d}n$:

$$\mathrm{d}s_1 = h_1\mathrm{d}x_1\,;\ \mathrm{d}s_2 = h_2\mathrm{d}x_2\,;\ \mathrm{d}s_3 = h_3\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}n, \tag{10}$$

în care h_1, h_2, $h_3 = 1$ sînt coeficienții lui Lamé.

În regim cvasistaționar, ecuațiile cîmpului electromagnetic:

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{G}} = 0, \tag{11}$$

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \lambda \boldsymbol{F}, \tag{12}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{14}$$

în care $\boldsymbol{G}$ este inducția magnetică $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_M, t)$ sau densitatea de curent $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_M, t)$, împreună cu ecuațiile de ordinul doi pe care le satisfac intensitățile cîmpurilor electric $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t)$ și magnetic $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t)$.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}, \tag{15}$$

în care $\boldsymbol{F}$ este $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t)$ sau $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t)$, au în sistemul de coordonate intrinsec următoarele forme:

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) G_3(\boldsymbol{r}_M, t) + \frac{\partial G_3(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n} + \mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_M, t) = 0, \tag{11'}$$

$$\left[\frac{E_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_1} + \frac{\partial E_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right] \boldsymbol{e}_2 - \left[\frac{E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_2} + \frac{\partial E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right] \boldsymbol{e}_1 + \\ + \boldsymbol{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t) = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial t}, \tag{13'}$$

$$\left[\frac{H_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_1} + \frac{\partial H_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right] \boldsymbol{e}_2 - \left[\frac{E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_2} + \frac{\partial E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right] \boldsymbol{e}_1 + \\ + \boldsymbol{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t), \tag{14'}$$

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \frac{\partial F_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n} + \left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial n}\right) F_1(\boldsymbol{r}_M, t)\right] \boldsymbol{e}_1 + \\ + \left[\frac{\partial^2 F_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \frac{\partial F_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n} + \left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} - \frac{1}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial n}\right) F_2(\boldsymbol{r}_M, t)\right] \boldsymbol{e}_2 + \\ + \boldsymbol{rr}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M, t) = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial t}. \tag{15'}$$

În ecuațiile (11′) — (15′) s-au utilizat expresiile div $\boldsymbol{F}$, rot $\boldsymbol{F}$ și rotrot $\boldsymbol{F}$ în sistemul de coordonate intrinsec (anexă 119—123, 127).

2. REGIMUL TRANZITORIU AL REFULĂRII SUPERFICIALE A CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE

În condiții inițiale de repaus, intensitățile cîmpurilor sînt nule în conductor și au valori nenule și continue pe suprafața $\Sigma^{(0)}$. Suprafața conductorului fiind regulată, rezultă că la începutul regimului tranzitoriu cîmpul electromagnetic pătrunde în lungul normalei interioare după aceeași lege de variație ca și în semispațiu conductor. Deoarece la pătrunderea în semispațiu cîmpul tangent la suprafață și uniform în dielectric nu depinde decît de coordonata după normală, urmează că în intervalul de timp t_p, în care fenomenele se aproximează ca în semispațiu, mărimile nu depind de coordonatele x_1, și x_2, prin urmare în ecuațiile (11′)—(15′) termenii în care intervin derivatele parțiale în raport cu aceste coordonate :

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{F}=0\,;\; \boldsymbol{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{F}=0, \boldsymbol{rr}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\boldsymbol{F}=0, \tag{16}$$

sînt nuli și ecuațiile (11′—15′) se simplifică cum urmează :

$$\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)G_3(\boldsymbol{r}_M, t)+\frac{\partial G_3(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}=0, \tag{17}$$

$$\left[\frac{E_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_1}+\frac{\partial E_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_2}+\frac{\partial E_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right]\boldsymbol{e}_1=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial t} \tag{18}$$

$$\left[\frac{H_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_1}+\frac{\partial H_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{H_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\rho_2}+\frac{\partial H_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}\right]\boldsymbol{e}_1=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_M, t)\,; \tag{19}$$

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}+\left(\frac{1}{d_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_1^2}\right)F_1(\boldsymbol{r}_M, t)\right]\boldsymbol{e}_1+$$

$$+\left[\frac{[\partial^2 F_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_2(\boldsymbol{r}_M, t)}{\partial n}+\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_2^2}\right)F_2\boldsymbol{r}_M, t)\right]\boldsymbol{e}_2=$$

$$=-\mu\sigma\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} \tag{20}$$

Notînd cu $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M, P)$ transformata Laplace a funcției $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M, t)$, formele operaționale ale ecuațiilor (15′) și (20), după împărțirea cu γ_p^2, sînt următoarele :

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(\boldsymbol{r}_M p)}{\partial(\gamma_p n)^2}+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1}+\frac{1}{\gamma_p\rho_2}\right)\frac{\partial F_1(\boldsymbol{r}_M, p)}{\partial(\gamma_p n)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1\cdot\gamma_p\rho_2}-\frac{1}{\gamma_p^2\rho_1^2}\right)F_1(\boldsymbol{r}_M, p)\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{\partial^2 F_2(\boldsymbol{r}_M, p)}{\partial(\gamma_p n)^2}+\right.$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1}+\frac{1}{\gamma_p\rho_2}\right)\frac{\partial F_2(\boldsymbol{r}_M,p)}{\partial(\gamma_p n)}+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1\cdot\gamma_p\rho_2}-\frac{1}{\gamma_p^2\rho_2^2}\right)F_2(\boldsymbol{r}_M,p)\Big]\boldsymbol{e}_2+$$

$$+\frac{1}{\mu\sigma p}\boldsymbol{rr}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial^2}{\partial x_2},\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\right),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p)=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p),\quad(21)$$

$$\left[\frac{\partial^2F_1(\boldsymbol{r}_M,p}{\partial(\gamma_p n)^2}+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1}+\frac{1}{\gamma_p\rho_2}\right)\frac{\partial F_1(\boldsymbol{r}_M,p)}{\partial(\gamma_p n)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1\cdot\gamma_p\rho_2}-\frac{1}{\gamma_p^2\rho_1^2}\right)F_1(\boldsymbol{r}_M,p)\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{\partial^2F_2(\boldsymbol{r}_M,p)}{\partial(\gamma_p n)^2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1}+\frac{1}{\gamma_p\rho_2}\right)\frac{\partial F_2(\boldsymbol{r}_M,p)}{\partial(\gamma_p n)}+\left(\frac{1}{\gamma_p\rho_1\cdot\gamma_p\rho_2}-\frac{1}{\gamma_p^2\rho_2^2}\right)F_2(\boldsymbol{r}_M,p)\right]\boldsymbol{e}_2=$$

$$=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p).\quad(22)$$

Fiindcă între funcţiile original $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,t)$ şi imaginea sa Laplace $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p)$ există relaţia valorilor iniţiale [2]:

$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,t)=\lim_{p\to\infty}p\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p),\quad(23)$$

care permite aproximarea funcţiei original la începutul regimului tranzitoriu dacă se cunoaşte expresia imaginii Laplace, şi, deoarece prima şi a doua derivată după normală a funcţiei imagine $\frac{\partial F_k}{\partial n}$, $\frac{\partial^2F_k}{\partial n^2}$ sînt finite, rezultă că în ecuaţia (21) termenul

$$\frac{1}{\mu\sigma p}\boldsymbol{rr}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M p)=\sim 0\quad(24)$$

este neglijabil în raport cu ceilalţi termeni pentru $p\to\infty$, în punctele în care razele principale de curbură $\rho_1^{(0)}$ şi $\rho_2^{(0)}$ sînt mici şi deci ecuaţia (21) se poate aproxima cu ecuaţia (22).

În ecuaţiile (20) şi (22), intensităţile cîmpurilor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,t)$ şi imaginile lor Laplace $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_M,p)$ depind spaţial numai de coordonata x_3 după normală. Intervalul de timp t_ρ, în care fenomenele se pot aproxima local ca în semispaţiu, depinde de curbura locală şi este mai mare pentru curbura mică (raza de curbură mare) şi este mai mic pentru curbura mare (raza de curbură mică). Dacă $\rho_2^{(0)}>\rho_1^{(0)}$ şi deci şi $\rho_2>\rho_1$, legea de variaţie a mărimii $\boldsymbol{F}(x_3t)$ în lungul normalei interioare x_3 se poate aproxima cu legea de variaţie a mărimii $\boldsymbol{F}$ în semispaţiu, în intervalul de timp t_ρ care depinde de raza minimă de curbură $\rho_1^{(0)}$.

Alegînd originea 0 pentru coordonata după normală $x_3=x$ în centrul de curbură C_1 al razei minime de curbură $\rho_1^{(0)}$ (fig. 3) şi fiindcă

$$\rho_2^{(0)}-\rho_1^{(0)}=\rho_2-\rho_1=x_0,\quad(25)$$

ecuaţiile (20) şi (22) se transformă cum urmează :

$$\frac{\partial^2 F_1(x,\,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\partial F_1(x,\,t)}{\partial x}+\left(\frac{1}{x(x+x_0)}-\frac{1}{x^2}\right)F_1(x,\,t)\Big]\boldsymbol{e}_1+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F_2(x,\,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\partial F_2(x,\,t)}{\partial x}+\left(\frac{1}{x(x+x_0)}-\frac{1}{(x+x_0)^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times F_2(x,\,t)\right]\boldsymbol{e}_2=\mu\sigma\left(\frac{\partial F_1(x,\,t)}{\partial t}\,\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial F_2(x,\,t)}{\partial t}\,\boldsymbol{e}_2\right), \tag{26}$$

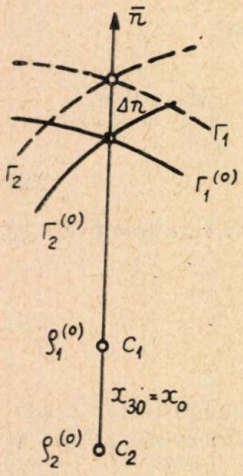


Fig. 3. — Stabilirea ecuaţiei difuziei superficiale a cîmpului electromagnetic.

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(x,p)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\partial F_1(x,\,p)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{x(x+x_0)}-\frac{1}{x^2}\right)F_1(x,\,p)\right]\boldsymbol{e}_1+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F_2(x,\,p)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+x_0}\right)\frac{\partial F_2(x,\,p)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{x(x+x_0)}-\frac{1}{(x+x_0)^2}\right)F_2(x,\,p)\right]\boldsymbol{e}_2=$$

$$\gamma_p^2(F_1(x,\,p)\boldsymbol{e}_1+F_2(x,p)\,\boldsymbol{e}_2). \tag{27}$$

În ecuaţiile (26) şi (27) intervin numai componentele tangenţiale F_1 şi F_2 ale intensităţilor cîmpurilor, respectiv imaginile lor Lapalace, de unde rezultă că la începutul pătrunderii cîmpului electromagnetic într-un conductor componentele normale F_3 sînt neglijabile în raport cu componentele tangenţiale

$$\boldsymbol{F}(x,\,t)=\sim F_1(x,\,t)\boldsymbol{e}_1+F_1(x,\,t)\boldsymbol{e}_2;\quad F_3(x,\,t)=0 \tag{28}$$

Anularea componentelor normale ale intensităţilor cîmpurilor rezultă şi din ecuaţiile (18) şi (19) ale legilor inducţiei electromagnetice şi circuitului magnetic :

$$\left[\frac{E_1(x,t)}{x}+\frac{\partial E_1(x,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{E_2(x,\,t)}{x+x_0}+\frac{\partial E_2(x,\,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1=-\mu\,\frac{\partial \boldsymbol{H}(x,\,t)}{\partial t}, \tag{29}$$

$$\left[\frac{H_1(x,\,t)}{x}+\frac{\partial H_1(x,\,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{H_2(x,\,t)}{x+x_0}+\frac{\partial H_2(x,\,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1=\sigma\boldsymbol{E}(x,\,t), \tag{30}$$

respectiv din următoarele forme operaţionale ale acestor ecuaţii,

$$\frac{E_1(x,\,p)}{x}+\frac{\partial E_1(x,\,p)}{\partial x}\Big]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{E_2(x,\,t)}{x+x_0}+\frac{\partial E_2(x,\,p)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1=-\mu p\boldsymbol{H}(x,p), \tag{31}$$

$$\left[\frac{H_1(x,p)}{x}+\frac{\partial H_1(x,\,p)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{H_2(x,p)}{x+x_0}+\frac{\partial H_2(x,p)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1=\sigma\boldsymbol{E}(x,\,p) \tag{32}$$

De asemenea, anularea componentelor normale ale cîmpurilor F şi deci în baza ecuaţiei (12) şi a mărimilor G, şi independenţa acestora de coordonatele tangenţiale x_1 şi x_2 asigură verificarea ecuaţiilor (17) ale legilor fluxului magnetic şi conservării sarcinii electrice.

Se observă că, eliminînd între ecuaţiile (29) şi (30) componentele intensităţilor cîmpurilor, respectiv între ecuaţiile (31) şi (32), imaginile lor Laplace, se obţin ecuaţiie de ordinul doi (26) şi (27) pe care le satisfac fiecare dintre intensităţile cîmpurilor.

Ecuaţiile (26), (29) şi (30), împreună cu formele lor operaţionale(27), (31) şi (32), descriu regimul de *refulare normală*, caracterizat astfel: pe durata t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, cîmpul electromagnetic pătrunde parţial prin suprafaţa conductorului în lungul normalei interioare, pe o adîncime de ordinul celei mai mici din razele principale de curbură; durata t_ρ este o mărime locală şi depinde de curbura suprafeţei conductorului şi caracterizează refularea normală *locală*; intensităţile cîmpurilor electric şi magnetic nu depind decît de coordonata după normala interioară x şi au numai componente tangenţiale la suprafaţa conductorului $\Sigma^{(0)}$ şi la celelalte suprafeţe de coordonate Σ ataşate acesteia.

Dacă pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic are loc într-un punct sau o parte din suprafaţa conductorului, regimul se numeşte de refulare normală locală; dacă $\rho^{(0)}_{min}$ este cea mai mică dintre razele principale de curbură ale suprafeţei $\Sigma^{(0)}$, regulată şi peste tot concavă, căreia îi corespunde durata $t_{\rho min}$ a pătrunderii normale, refularea este normală pe întreaga suprafaţă a conductorului. În acest regim, numit de refulare *normală totală*, liniile de cîmp electric şi magnetic sînt cuprinse în suprafaţa conductorului.

Anularea componentei normale a cîmpului electric la suprafaţa conductorului este în concordanţă cu ipoteza regimului cvasistaţionar, linia de cîmp electric fiind în orice moment, deci şi la $t > t_\rho$, cuprinsă în suprafaţa conductorului. Celelalte linii de cîmp electric din interiorul conductorului sînt cuprinse în suprafeţele de coordonate numai pe durata t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu. O dată cu pătrunderea cîmpului electromagnetic în interiorul conductorului la momente $t > t_\rho$, relaţiile (16) nemaifiind satisfăcute, vor interveni şi componente normale ale cîmpului electric, liniile de cîmp electric nu vor mai fi cuprinse în suprafeţele de coordonate şi forma lor va fi variabilă în timp. Condiţia de trecere pentru cîmpul electric pe suprafaţa conductorului este satisfăcută în orice moment, componentele tangenţiale la suprafaţa conductorului E_{ti} şi E_{te} fiind egale:

$$E_{ti} = E_{te}. \tag{33}$$

Analog se interpretează anularea componentei normale a cîmpului magnetic la suprafaţa conductorului, fie cînd acesta e stabilit de un curent de aducţie în conductor, fie cînd conductorul se introduce în cîmp magnetic stabilit din exteriorul lui. În intervalul t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu al stabilirii curentului de aducţie, repartiţia pelicular a curentului asigură ca la suprafaţa conductorului şi la celelalte suprafeţe de coordonate cîmpul magnetic să fie tangenţial. O dată cu pătrunderea cîmpului electromagnetic în interior la momente $t > t_\rho$, relaţiile (16) nemaifiind satisfăcute, vor interveni şi componente normale ale cîmpului mag-

netic atît pe suprafaţa conductorului, cît şi pe celelalte suprafeţe de coordonate, liniile de cîmp magnetic nu vor mai fi cuprinse în aceste suprafeţe şi forma lor va fi variabilă în timp. Condiţia de trecere pentru cîmpul magnetic pe suprafaţa conductorului este satisfăcută în orice moment, componentele tangenţiale H_{ti} şi H_{te} fiind egale :

$$H_{ti} = H_{te} . \tag{34}$$

2.1. PROBLEMA PLAN-PARALELĂ A REFULĂRII SUPERFICIALE

În problema plan-paralelă, conturul $\Gamma^{(0)}$ al secţiunii transversale a conductorului drept este linie principală de curbură (fig. 4) şi sistemul de coordonate intrinsec are proprietăţile

$$\rho_2 = \sim \infty ; \; x_0 = \sim \infty. \tag{35}$$

Cu relaţiile (35), ecuaţiile legilor inducţiei electromagnetice (29), ale circuitului magnetic (30)şi cele de ordinul doi (26) pe care le satisfac intensităţile instantanee ale cîmpurilor au în regim de refulare normală expresiile

$$\left[\frac{E_1(x,\ t)}{x} + \frac{\partial E_1(x,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2 - \left[\frac{E_2(x,\ t)}{x} + \frac{\partial E_2(x,\ t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1 = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}(x,\ t)}{\partial t}, \tag{36}$$

$$\left[\frac{H_1(x,\ t)}{x} + \frac{\partial H_1(x,\ t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2 - \left[\frac{H_2(x,\ t)}{x} + \frac{\partial H_2(x,\ t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1 = \sigma\boldsymbol{E}(x,\ t), \tag{37}$$

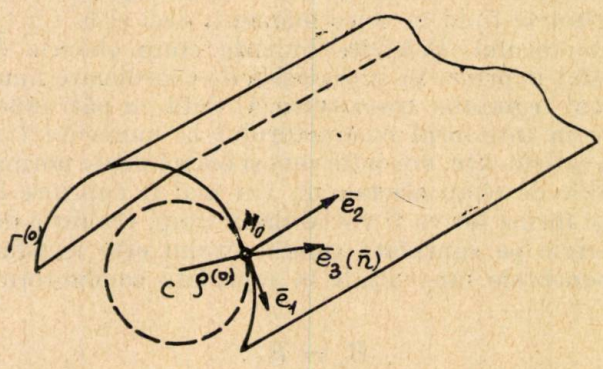


Fig. 4. — Conturul $\Gamma^{(0)}$ al seţiei transversale a unui conductor drept.

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial F_1(x,\ t)}{\partial x} - \frac{1}{x^2}F_1(x,\ t)\right]\boldsymbol{e}_1 + \left[\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x}\frac{\partial F_2(x,\ t)}{\partial x}\right] = \mu\sigma\left[\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial F_2(x,\ t)}{\partial t}\boldsymbol{e}_2\right], \tag{38}$$

cu următoarele forme operaționale :

$$\left[\frac{E_1(x,\ p)}{x}+\frac{\mathrm{d}E_1(x,p)}{\mathrm{d}x}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{E_2(x,\ p)}{x}+\frac{\mathrm{d}E_2(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\right]\boldsymbol{e}_1=-\mu p\boldsymbol{H}(x,p), \tag{39}$$

$$\left[\frac{H_1(x,\ p)}{x}+\frac{\mathrm{d}H_1(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\right]\boldsymbol{e}_2-\left[\frac{H_2(x,\ p)}{x}+\frac{\mathrm{d}H_2(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\right]\boldsymbol{e}_1=\sigma\boldsymbol{E}(x,\ p), \tag{40}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2F_1(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}F_1(x,\ p)}{\mathrm{d}x}-\frac{F_1(x,\ p)}{x^2}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{\mathrm{d}F_2(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}F_2(x,\ p)}{\mathrm{d}x}\right]\boldsymbol{e}_2=\gamma_p^2\left[F_1(x,\ p)\boldsymbol{e}_1+F_2(x,\ p)\,\boldsymbol{e}_2\right]. \tag{41}$$

În problema axială a cîmpului electric (curent de aducție în conductor), intensitatea cîmpului electric $\boldsymbol{E}$ are numai componentă axială, $\boldsymbol{E}=E_2(x,\ t)\boldsymbol{e}_2$, și intensitatea cîmpului magnetic $\boldsymbol{H}$ are numai componentă transversală, tangențială la conturul $\Gamma^{(0)}$ al secțiunii transversale drepte a conductorului, $\boldsymbol{H}=H_1(x,\ t)\boldsymbol{e}_1$.

În problema axială a cîmpului magnetic (curenți turbionari în conductorul situat în cîmp magnetic inductoric axial), intensitatea cîmpului electric are numai componentă transversală, $\boldsymbol{E}=E_2(x,\ t)\boldsymbol{e}_2$, și intensitatea cîmpului magnetic are numai componentă axială, $\boldsymbol{H}=H_1(x,\ t)\boldsymbol{e}_1$.

Dacă se notează cu $\boldsymbol{A}(x,\ t)$ și $\boldsymbol{A}(x,\ p)$ funcțiile original și imagine Laplace ale vectorului cîmp axial $\boldsymbol{A}=A_2\boldsymbol{e}_2$ (egal cu intensitățile $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{H}$ în problema curentului de aducție, respectiv în problema curenților turbionari), vectorii $\boldsymbol{A}(x,\ t)$ și $\boldsymbol{A}(x,\ p)$ sînt soluții ale ecuațiilor (38) și (41) :

$$\frac{\partial^2A(x,\ t)}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial A(x,\ t)}{\partial x}=\mu\sigma\frac{\partial A(x,\ t)}{\partial t}, \tag{42}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2A(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}A(x,\ p)}{\mathrm{d}x}=\gamma_p^2\,A(x,p). \tag{43}$$

Dacă se notează cu $\boldsymbol{T}(x,\ t)$ și $\boldsymbol{T}(x,\ p)$ funcțiile original și imagine Laplace ale vectorului cîmp transversal $\boldsymbol{T}=T_1\,\boldsymbol{e}_1$ (egal cu intensitățile $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{H}$ în problema curenților turbionari, respectiv în problema curentului de aducție), vectorii $\boldsymbol{T}(x,\ t)$ și $\boldsymbol{T}(x,\ p)$ sînt soluții ale ecuațiilor (38) și (41) :

$$\frac{\partial^2T(x,\ t)}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial x}-\frac{T(x,\ t)}{x^2}=\mu\sigma\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial t}, \tag{44}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}T(x,\ p)}{\mathrm{d}x}-\frac{(Tx,\ p)}{x^2}=\gamma_p^2\,T(x,\ p). \tag{45}$$

Soluţiile $A(x, p)$ şi $T(x, p)$ ale ecuaţiilor (43) şi (45), de tip Bessel, sînt următoarele :

$$A(x, p) = M_1 I_0(j\gamma_p x) + M_2 Y_0(j\gamma_p x), \tag{46}$$

$$T(x, p) = N_1 I_1(j\gamma_p x) + N_2 Y_1(j\gamma_p x), \tag{47}$$

în care I_0 şi I_1, respetciv Y_0 şi Y_1 sînt funcţiile Bessel de prima şi a doua speţă, iar M_1, M_2, N_1 şi N_2 constante complexe de integrare.

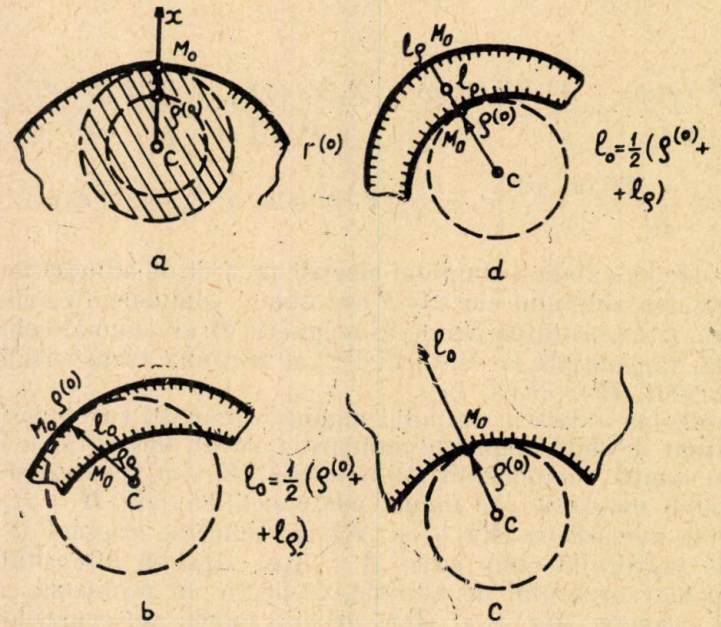


Fig. 5. — Studiul difuziei superficiale într-un conductor drept : *a* — centrul de curbură în conductor ; *b* — centrul curburii concave în exterior ; *c* — centrul curburii convexe în exterior ; *d* — centrul curburii convexe în exterior.

Soluţiile (46), (47) descriu pătrunderea normală a cîmpului electromagnetic în punctele situate pe normala interioară a unui punct M_0 situat pe suprafaţa $\Sigma^{(0)}$ a conductorului. După forma curburii şi poziţia centrului de curbură C a punctului M_0 se disting următoarele cazuri :

a) punctul M_0 este situat pe o concavitate şi centrul de curbură este în conductor (fig. 5*a*) ;

b) punctul M_0 este situat pe o concavitate şi centrul de curbură este în exteriorul conductorului (fig. 5*b*) ; $l\rho < \rho^{(0)}$;

c) punctul M_0 este situat pe o convexitate şi $l\rho \gg \rho^{(0)}$ (fig. 5*c*) ;

d) punctul M_0 este situat pe o convexitate şi $l\rho > \rho^{(0)}$ (fig. 5*d*).

a) În primul caz, constantele M_2 şi N_2 sînt nule, iar constanta M_1 se determină din condiţia ca la momentul iniţial vectorul cîmp axial este egal cu A_0 pe suprafaţa $\Sigma^{(0)}$

$$A(x, t)\Big|_{\substack{x=\rho^{(0)} \\ t=0}} = A_0 , \tag{48}$$

cu următoarea imagine Laplace:

$$A(x,\ p)\,|_{x=\rho^{(0)}} = \frac{A_0}{p}, \tag{49}$$

prin urmare

$$M_1 = \frac{A_0}{pI_0\,(j\gamma_p\ \rho^{(0)})}, \tag{50}$$

respectiv

$$A(x,\ p) = A_0\,\frac{I_0(j\gamma_p\ x)}{I_0(j\gamma_p\ \rho^{(0)})}. \tag{51}$$

Aplicînd formula de inversiune Mellin-Fourier, se obţine soluţia intensităţii relative a vectorului cîmp axial:

$$\mathcal{A}(x,\ t) = \frac{A(x,\ t)}{A_0} = 1 - 2\sum_1^{\infty} \frac{I_0\left(\alpha_n \dfrac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n\, I_1(\alpha_n)}\, e^{-\alpha_n^2 t/\tau}, \tag{52}$$

în care α_n sînt rădăcinile ecuaţiei

$$I_0(\alpha) = 0, \tag{53}$$

iar cu τ s-a notat mărimea

$$\tau = \mu\sigma\rho^{(0)2}. \tag{54}$$

Soluţia (52) în punctele situate pe normala interioară x din punctul M_0 pînă în centrul de curbură C este identică cu soluţia problemei cu simetrie cilindrică, pentru cilindrul circular avînd raza egală cu raza de curbură $\rho^{(0)}$ şi axa în axa de curbură.

Deoarece timpul mediu de difuzie t_r în cilindrul circular de rază r este [3]

$$t_r = \frac{1}{4}\,\mu\sigma r^2, \tag{55}$$

rezultă că intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu în care pătrunderea cîmpului electromagnetic este normală, are ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{1}{4}\,\mu\sigma\rho^{(0)2}. \tag{56}$$

Cu expresiile (52) şi (56) se calculează densităţile de curent tranzitorii $\boldsymbol{J}(x,\ t)$ în punctele situate pe normalele interioare ale punctelor de curbură concavă pînă în centrele de curbură, precum şi duratele t_ρ de pătrundere superficială la stabilirea curentului continuu 1:

$$\boldsymbol{J}(x,\ t) = \frac{I}{S}\left[1 - 2\sum_1^{\infty} \frac{I_0\left(\alpha_n \dfrac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n\, I_1(\alpha_n)}\, e^{-\alpha_n^2 t/\tau}\right], \tag{57}$$

și la întreruperea acestuia :

$$\boldsymbol{I}(x,\ t) = 2\frac{I}{S}\sum_{1}^{\infty}\frac{I_0\left(\alpha_n\dfrac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n I_1(\alpha_n)}\,e^{-\alpha_n^2 t/\tau}, \tag{58}$$

în care s-a notat cu S aria suprafeței transversale drepte a conductorului. Intensitățile cîmpului magnetic se calculează din ecuațiile (36) și (37).

Notînd cu H_0 intensitatea cîmpului magnetic constant în timp și uniform la introducerea conductorului drept în cîmpul axial, cîmpul magnetic are următoarea lege de variație în interiorul conductorului :

$$H(x,\ t) = H_0\left[1 - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{I_0\left(\alpha_n\dfrac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n I_1(\alpha_n)}\,e^{-\alpha_n^2 t/\tau}\right], \tag{59}$$

iar la suprimarea cîmpului magnetic

$$H(x,\ t) = 2H_0\sum_{1}^{\infty}\frac{I_0\left(\alpha_n\dfrac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\alpha_n I_1(\alpha_n)}\,e^{-\alpha_n^2 t/\tau}. \tag{60}$$

Intensitățile cîmpului electric se calculează din ecuațiile (36) și (37).

b) În al doilea caz dacă punctul M_0 este situat pe o concavitate a suprafeței și centrul de curbură este în dielectric (fig. 5*b*), constantele de integrare M_1 și M_2 se determină din condițiile

$$A(x,\ p)_{|x=\rho^{(0)}} = \frac{A_0}{p}\ ;\ A(x,\ p)_{|x=l_0} = 0\ ;\ l_0 = \frac{1}{2}(l_\rho + \rho^{(0)}), \tag{61}$$

adică

$$M_1 I_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)}) + M_2\,Y_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)}) = \frac{A_0}{p},$$

$$M_1 J_0\,(j\gamma_p\,l_0) + M_2 Y_0\,(j\gamma_p\,l_0) = 0,$$

de unde rezultă următoarele valori ale constantelor M_1 și M_2 :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{A_0}{p}\,\frac{Y_0(j\gamma_p\,l_0)}{I_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)})\,Y_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)}) - I_0\,(j\gamma_p\,\rho^{(0)})\,Y_0(j\gamma_p\,l_0)}, \\ M_2 &= \frac{A_0}{p}\,\frac{I_0(j\gamma_p\,l_0)}{J_0(j\gamma_p\,l_0)\,Y_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)}) - I_0(j\,\gamma_p\,\rho^{(0)})\,Y_0(j\gamma_p\,l_0)}. \end{aligned} \tag{62}$$

Cu aceste valori, imaginea Laplace $A(x,\ p)$ are expresia

$$A(x,\ p) = \frac{A_0}{p}\,\frac{I_0(j\gamma_p\,\rho)\,Y_0(j\gamma_p\,l_0) - I_0(j\gamma_p\,l_0)\,Y_0(j\gamma_p\,\rho)}{I_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)})\,Y_0(j\gamma_p\,l_0) - I_0\,(j\gamma_p\,l_0)\,Y_0(j\gamma_p\,\rho^{(0)})}. \tag{63}$$

Dacă

$$l_0 \sim = \rho^{(0)}, \tag{64}$$

în formula (63) funcțiile lui Bessel $I_0(x)$ și $Y_0(x)$ pot fi înlocuite cu aproximațiile lor asimptotice [4]

$$I_0(jx) = \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}; \quad Y_0(jx) = \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \tag{65}$$

și funcția $A(x, p)$ se aproximează astfel:

$$A(x, p) = A_0 \sqrt{\frac{\rho^{(0)}}{x}} \frac{1}{p} e^{-\gamma_p(\rho^{(0)} - x)}, \tag{66}$$

cu funcția original [5]

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{A(x, t)}{A_0} = \sqrt{\frac{\rho^{(0)}}{x}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}\,(\rho^{(0)} - x)}{2\sqrt{t}}, \tag{67}$$

în care s-a notat cu erfc x funcția eroare complementară.

Deoarece timpul mediu de difuzie t_r în cilindrul cav, având razele exterioară r_e și interioară r_i, este

$$t_r = \frac{\mu\sigma}{4}(r_e - r_i)^2, \tag{68}$$

rezultă că intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, în care pătrunderea cîmpului electromagnetic este superficială, are ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{\mu\sigma}{4}(\rho^{(0)} - l_0)^2. \tag{69}$$

Cu expresia (67) se calculează densitatea de curent tranzitorie $J(x, t)$ în punctele situate pe segmentul $\rho^{(0)} - l_0$ al normalei interioare a punctului de curbură concavă la stabilirea curentului continuu I:

$$J(x, t) = \frac{I\sqrt{\rho^{(0)}}}{S\sqrt{x}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}(\rho^{(0)} - x)}{2\sqrt{t}}, \tag{70}$$

și la întreruperea acestuia:

$$J(x, t) = \frac{I}{S}\left(1 - \frac{\sqrt{\rho^{(0)}}}{\sqrt{x}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}\,(\rho^{(0)} - x)}{2\sqrt{t}}\right). \tag{71}$$

La introducerea conductorului în cîmp magnetic axial, legea de variație a cîmpului magnetic este

$$H(x, t) = H_0 \sqrt{\frac{\rho^{(0)}}{x}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}(\rho^{(0)} - x)}{2\sqrt{t}}, \tag{72}$$

iar la suprimarea cîmpului magnetic

$$H(x, t) = H_0\left(1 - \frac{\sqrt{\rho^{(0)}}}{\sqrt{x}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}\,(\rho^{(0)} - x)}{2\sqrt{t}}\right). \tag{73}$$

c) În al treilea caz, dacă punctul M_0 este situat pe o convexitate a suprafeței conductorului (fig. 5*c*), în soluția (46), pusă sub forma

$$A(x, p) = M_1' I_0(\gamma_p x) + M_2' K_0(\gamma_p x), \tag{74}$$

în care I_0 și K_0 sînt funcțiile modificate ale lui Bessel de prima și a doua speță, constanta M_1' este nulă și M_2' se determină din condiția

$$A(x, p)_{|x=\rho^{(0)}} = M_2' K_0(\gamma_p \rho^{(0)}) = \frac{A_0}{p},$$

de unde rezultă

$$M_2' = A_0 \frac{K_0(\gamma_p \rho^{(0)})}{p}. \tag{75}$$

Cu această valoare a constantei M_2', funcția $A(x, p)$ are expresia

$$A(x, p) = A_0 \frac{Y_0(j\gamma_p x)}{Y_0(j\gamma_p \rho^{(0)})}, \tag{76}$$

cu următoarea funcție original $\mathcal{A}(x, t)$:

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{A(x, t)}{A_0} = \left[1 - 2\sum_1^\infty \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau}\right], \tag{77}$$

în care β_n sînt rădăcinile ecuației

$$Y_1(\beta) = 0 \tag{78}$$

În intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, în care pătrunderea cîmpului electromagnetic este normală:

$$t_\rho = \frac{\mu\sigma}{4}(l_0 - \rho^{(0)})^2 = \sim \frac{\mu\sigma}{4} l_0^2, \tag{79}$$

densitatea tranzitorie de curent $J(x, t)$ în punctele situate pe normala interioară a punctului de curbura convexă, are la stabilirea curentului expresia

$$\boldsymbol{I}(x, t) = \frac{I}{S}\left[1 - 2\sum_1^\infty \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau}\right] \tag{80}$$

și la întrerupere

$$\boldsymbol{I}(x, t) = 2\frac{I}{S}\sum_1^\infty \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n Y_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t/\tau}. \tag{81}$$

De asemenea cîmpul magnetic are in interiorul conductorului la stabilirea acestuia expresia

$$H(x,\ t) = H_0\left[1 - 2\sum_1^{\infty} \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n\, Y_1(\beta_n)}\, e^{-\beta_n^2 t/\tau}\right], \tag{82}$$

iar la suprimarea cîmpului exterior H_0

$$H(x,\ t) = 2H_0 \sum_1^{\infty} \frac{Y_0\left(\beta_n \frac{x}{\rho^{(0)}}\right)}{\beta_n\, Y_1(\beta_n)}\, e^{-\beta_n^2 t/\tau}\,. \tag{83}$$

d) În al patrulea caz, cînd punctul M_0 este situat pe o convexitate a suprafeţei conductorului (fig. 5*d*), se obţin soluţiile cazului examinat la punctul *b* (fig. 5*b*), în care se înlocuieşte $\rho^{(0)}$ cu x şi x cu $\rho^{(0)}$.

S-a examinat pătrunderea normală a cîmpului electromagnetic în punctele situate pe normala interioară (sau pe segmentele $\rho^{(0)} - l_0$, respectiv $l_0 - \rho^{(0)}$ ale acesteia), în intervalul de timp t_ρ care depinde de curbura locală a suprafeţei conductorului în punctul considerat şi de poziţia centrului de curbură. Acest regim este numit în lucrare *local*, deoarece pătrunderea cîmpului în lungul normalei unui punct de pe suprafaţă nu presupune acelaşi regim şi în punctele învecinate. Dacă $\rho^{(0)}_{min}$, $(\rho^{(0)} - l_0)_{min}$ şi $(l_0 - \rho^{(0)})_{min}$ sînt cea mai mică dintre razele principale de curbură, respectiv cel mai mic segment al normalei interioare a unui punct de pe suprafaţa conductorului, cărora le corespunde intervalul de timp $t_{\rho min}$ al pătrunderii superficiale, rezultă că în intervalul $t_{\rho min}$ refularea este superficială pe toată suprafaţa conductorului. Acest regim, în care cîmpul magnetic este tangenţial la suprafaţa conductorului şi intensităţile cîmpurilor electric şi magnetic, precum şi densitatea de curent, sînt diferite de zero pe o adîncime de ordinul razei de curbură, respectiv a segmentului $|l_0 - \rho^{(0)}|$, este de refulare *total normală*.

2.2. REGIMUL TRANZITORIU AL REFULĂRII NETE A CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE

Dacă se examinează fenomenele în primele momente ale regimului tranzitoriu, cînd intensităţile cîmpului difuzează numai pe o adîncime $\Delta x^{(0)}$ mult mai mică decît razele principale de curbură $\rho^{(0)}$ sau decît segmentele $|\rho^{(0)} - l_0|$, se constată că legea de variaţie a difuziei este identică cu legea de variaţie a difuziei cîmpului electromagnetic în semispaţiul conductor. Deoarece pătrunderii pe o adîncime mică $\Delta x^{(0)}$ îi corespunde o valoare foarte mare a argumentului $\gamma_p \rho^{(0)}$, funcţiile lui Bessel pot fi înlocuite în expresiile (51), (76) cu dezvoltările lor asimptotice date de relaţiile (65) şi cu aproximaţia $\rho^{(0)} \sim x$, se obţine pentru punctele în care curbura suprafeţei este concavă următoarea soluţie a imaginei Laplace:

$$A(x,\ p) = A_0 \frac{1}{p}\, e^{-\gamma_p \Delta x^{(0)}};\quad \Delta x^{(0)} = \rho^{(0)} - x, \tag{84}$$

respectiv în punctele în care curbura este convexă

$$A(x,\ p) = A_0 \frac{1}{p} e^{\gamma_p \Delta x^{(0)}}, \tag{85}$$

indiferent de poziția centrului de curbură.

Aplicînd formula de inversiune Mellin-Fourier expresiile (84) și (85), se obțin următoarele soluții:

$$\mathcal{A}(x,\ t) = \frac{A(x,\ t)}{A_0} = \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \Delta x'^{(0)} \tag{86}$$

pentru punctele în care curbura este concavă și

$$\mathcal{A}(x,\ t) = \frac{A(x,\ t)}{A_0} = \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} (x - \rho^{(0)}) \tag{87}$$

pentru punctele în care curbura este convexă.

Soluțiile (86) și (87) în punctele situate pe normala interioară coincid cu soluția problemei pătrunderii cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor pentru o adîncime de pătrundere $\Delta x^{(0)}$.

Dacă $\rho^{(0)}_{min}$ sau $|\rho^{(0)} - l_0|_{min}$ sînt cele mai mici dintre valorile razelor de curbură sau ale segmentelor normalei interioare, cărora le corespund adîncimea $\Delta x^{(0)}_{min}$ de pătrundere a cîmpului electromagnetic cu refulare netă, rezultă că difuzia este netă pe toată suprafața conductorului și regimul se numește de refulare *total netă*.

2.3. APLICAȚIE LA REGIMURILE TRANZITORII DE REFULARE NORMALĂ ȘI NETĂ ÎN CONDUCTORUL CILINDRIC CU SECȚIUNE ELIPTICĂ

Pentru cilindrul eliptic (fig. 6*a*) raza de curbură $\rho^{(0)}$ a unui punct de pe suprafață are în coordonate carteziene $(x',\ y')$ expresia

$$\rho^{(0)} = a^2 b^2 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right)^{3/2} \tag{88}$$

și valorile maximă $\rho^{(0)}_{max}$ și minimă $\rho^{(0)}_{min}$ la extremitățile axei mici și mari

$$\rho^{(0)}_{max} = \rho^{(0)}_B = \frac{a^2}{b}\ ;\ \rho^{(0)}_{min} = \rho^{(0)}_A = \frac{b^2}{a}. \tag{89}$$

La stabilirea curentului I în conductor, densitatea de curent $J(x,\ t)$ variază în modul următor: la începutul regimului tranzitoriu, pe adîncimea $\Delta x^{(0)}$ după normala interioară $\overline{M_0 C}$, pătrunderea are loc ca în semispațiul conductor (fig. 6*b*), și densitatea tranzitorie de curent se calculează cu formula (86)

$$\boldsymbol{I}(x,\ t) = \frac{I}{\pi ab} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} (\rho^{(0)} - x). \tag{90}$$

În continuare, pătrunderea are loc pînă în centrul de curbură C în intervalul de timp t_ρ, calculat cu formula (56):

$$t_\rho = \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{4} a^4 b^4 \left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right)^3, \tag{91}$$

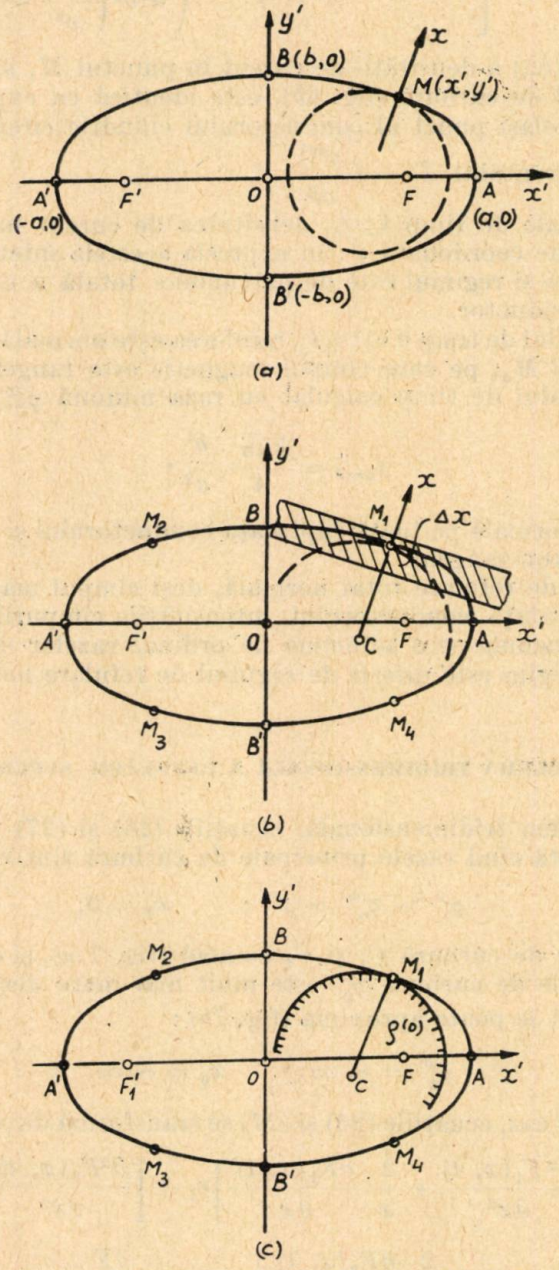


Fig. 6. — Pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic într-un cilindru eliptic.

şi densitatea tranzitorie de curent are următoarea expresie, calculată cu formula (57) :

$$I(x,t) = \frac{I}{\pi ab}\left[1 - 2\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t/\tau}}{\alpha_n I_1(\alpha_n)} I_0\left(\frac{\alpha_n x}{a^2 b^2\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)^{3/2}}\right)\right] \quad (92)$$

Expresia (92) a densităţii de curent în punctul M, situat la distanţa x de centrul de curbură (fig. 6*b*), este identică cu expresia densităţii de curent în acelaşi punct al conductorului cilindric circular de curbură la stabilirea curentului $I' = I\frac{\rho^{(0)^2}}{ab}$.

La intervale de timp $t > t_\rho$, densitatea de curent încetează de a fi funcţie numai de coordonata x; în expresia acesteia intervine şi coordonata tangenţială şi regimul este de pătrundere totală a cîmpului electromagnetic în conductor.

În intervalul de timp $0 < t < t_\rho$, refularea este normală numai pe feţele M_1BM_2 şi $M_3B'M_4$, pe care cîmpul magnetic este tangenţial.

În intervalul de timp calculat cu raza minimă $\rho^{(0)}_{min}$,

$$t_{\rho min} = \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{4}\frac{b^4}{a^2}, \quad (93)$$

refularea este normală pe toată suprafaţa conductorului şi cîmpul magnetic este peste tot tangent.

În regim de refulare total normală, deşi cîmpul magnetic este tangenţial la suprafaţa conductorului, intensităţile cîmpurilor şi densitatea de curent sînt nenule pe o adîncime de ordinul razelor de curbură, prin urmare acest regim este diferit de regimul de refulare netă.

3. PROBLEMA TRIDIMENSIONALĂ A REFULĂRII SUPERFICIALE

În problema tridimensională, ecuaţiile (26) şi (27) pot fi integrate în cazurile-limită cînd razele principale de curbură sînt egale,

$$\rho_1^{(0)} = \rho_2^{(0)} = \rho^{(0)}; \qquad x_0 = 0, \quad (94)$$

şi deci centrele de curbură C_1 şi C_2 coincid (fig. 7 *a*), şi cînd una dintre razele principale de curbură $\rho_2^{(0)}$ este mult mai mare decît cealaltă rază $\rho_1^{(0)}$, $\rho_2^{(0)} \gg \rho_1^{(0)}$ şi se poate aproxima (fig. 7*b*) :

$$\rho_2^{(0)} = \sim\infty; \qquad x_0 = \sim\infty. \quad (95)$$

În primul caz, ecuaţiile (26) şi (27) se transformă după cum urmează :

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1 + \left[\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{x}\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2 = \mu\sigma\frac{\partial \overline{F}}{\partial t}, \quad (96)$$

$$\left[\frac{\partial^2 F_1(x,\ p)}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\,\frac{\partial F_1(x,\ p)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_1 + \left[\frac{\partial^2 F_2(x,\ p)}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{x}\,\frac{\partial F_2(x,\ p)}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_2 = \gamma_p^2\,\overline{F}(x,\ p). \tag{97}$$

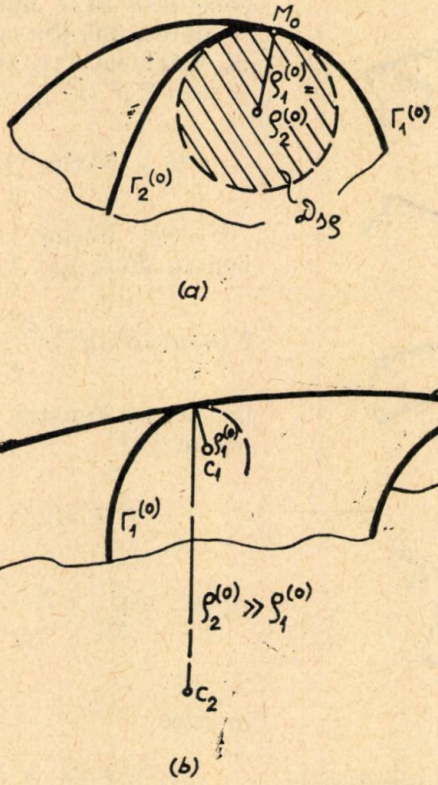


Fig. 7. — Sistemul de coordonate intrinsec ataşat unei suprafeţe $\Sigma^{(0)}$: a — punctul M_0 în care $\rho_1^{(0)} = \sim \rho_2^{(0)}$; b — punctul M_0 în care $\rho_2^{(0)} \gg \rho_1^{(0)}$.

În ecuaţiile (96) şi (97), ambele componente satisfac ecuaţii identice :

$$\frac{\partial^2 F(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\,\frac{\partial F(x,\ t)}{\partial x} = \mu\sigma\,\frac{\partial F(x,\ t)}{\partial t}, \tag{96'}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(x,\ p)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\,\frac{\mathrm{d}F(x,\ p)}{\mathrm{d}x} = \gamma_p^2 F(x,\ p). \tag{96''}$$

Soluţia ecuaţiei (96'') este

$$F(x,\ p) = c\,\frac{\sin(\mathrm{j}\gamma_p\,x)}{x} + D\,\frac{\cos(\mathrm{j}\gamma_p\,x)}{x}, \tag{96'''}$$

în care C şi D sînt constante de integrare.

Soluția (97) descrie pătrunderea superficială a intensităților cîmpurilor electric și magnetic în punctele situate pe normala interioară a unui punct situat pe suprafața conductorului. După forma curburii și poziția centrului de curbură se disting aceleași cazuri examinate la paragraful 2.1.

a) Dacă punctul M_0 este situat pe concavitate și centrul de curbură e în conductor (fig. 8*a*), soluția $F(x, p)$ fiind finită în central de curbură, constanta D e nulă, iar constanta C se determină din condiția ca în punctul M_0 mărimea $F(x, t)$ este egală cu $F(\rho^{(0)})$ și deci $\mathfrak{L}\{F(\rho^{(0)})\} = F(\rho^{(0)})/p$:

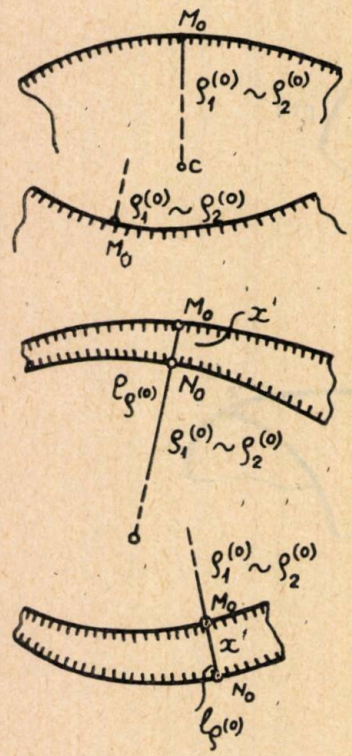


Fig. 8. — Studiul difuziei superficiale în problema tridimensională : *a* — centrul de curbură în conductor; *b* — centrul de curbură convexă în exterior; *c* — centrul de curbură concavă în exterior și $\rho^{(0)} = \sim l_0$; *d* — centrul de curbură convexă în exterior $l_{(0)} = \sim \rho^{(0)}$.

$$C = \rho^{(0)} F(\rho^{(0)}) \frac{1}{p \sin(j\gamma_p \rho^{(0)})}. \quad (98)$$

Se obține următoarea soluție pentru $F(x, p)$:

$$F(x, p) = F(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \frac{\sin(j\gamma_p x)}{p \sin(j\gamma_p \rho^{(0)})}, \quad (99)$$

iar pentru funcția original $F(x, t)$ expresia [2]

$$F(x, t) = \frac{\rho^{(0)}}{x} F(\rho^{(0)}) \times$$

$$\times \left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{\sin \gamma_n x/\rho^{(0)}}{x/\rho^{(0)}}\right], \quad (100)$$

în care

$$\gamma_n = n\pi; \quad n = 1, 2, \ldots, \infty. \quad (101)$$

Soluția (100) în punctele situate pe normala interioară, la distanța x de centrul de curbură, este însă identică cu soluția difuziei mărimii scalare în sfera având raza egală cu raza de curbură $\rho^{(0)}$ și valoarea inițială $F(\rho^{(0)})$ pe suprafață.

Deoarece timpul mediu de difuzie t_r în sfera de rază r este [3]

$$t_r = \frac{\lambda}{6} r^2,$$

în care în locul lui λ intervine $\mu\sigma$, rezultă că în intervalul de timp t_ρ de la începutul regimului tranzitoriu, în care pătrunderea cîmpului electromagnetic este superficială, are ordinul de mărime

$$t_\rho = \frac{1}{4} \mu\sigma \rho^{(0)^2}. \quad (102)$$

Cu expresiile (100) și (102) se calculează densitățile de curent tranzitorii $\boldsymbol{J}(x, t)$ și duratele de pătrundere superficială.

b) Dacă punctul M_0 este situat pe o convexitate a suprafeței și $l_0 \gg \rho^{(0)}$ (fig. 8 *b*), în soluția (97), pusă sub forma

$$F(x, p) = C' \frac{e^{\gamma_p x}}{x} + D' \frac{e^{-\gamma_p x}}{x}, \tag{103}$$

constanta C' e nulă și constanta D' se determină din condiția ca în punctul M_0, mărimea $F(x, t)$ să fie egală cu $F(\rho^{(0)})$, adică

$$D' = \rho^{(0)} F(\rho^{(0)}) \frac{1}{p e^{-\gamma_p \rho^{(0)}}}.$$

Introducînd valoarea acestei constante în (103), se obține

$$F(x, p) = \frac{\rho^{(0)}}{x} F(\rho^{(0)}) \frac{e^{-\gamma_p (x - \rho^{(0)})}}{p}, \tag{104}$$

căreia îi corespunde funcția original

$$F(x, t) = \frac{\rho^{(0)}}{x} F(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{(x - \rho^{(0)}) \sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}. \tag{105}$$

c) Dacă punctul M_0 este situat pe o concavitate și centrul de curbură în dielectric (fig. 8 *c*), constantele de integrare C și D se determină din condițiile

$$F(x, p)\Big|_{x=\rho^{(0)}} = \frac{F(\rho^{(0)})}{p}; \quad F(x, p)\Big|_{x=l_0} = 0, \tag{106}$$

$$l_0 = \frac{1}{2}(l_\rho + \rho^{(0)}),$$

adică

$$C \frac{\sin(j\gamma_p \rho^{(0)})}{\rho^{(0)}} + D \frac{\cos(j\gamma_p \rho^{(0)})}{\rho^{(0)}} = \frac{F(\rho^{(0)})}{p},$$

$$C \frac{\sin(j\gamma_p l_0)}{l_0} + D \frac{\cos(j\gamma_p l_0)}{l_0} = 0,$$

de unde rezultă

$$C = \frac{\rho^{(0)}}{p} F(\rho^{(0)}) \frac{\cos j\gamma_p l_0}{\sin j\gamma_p (\rho^{(0)} - l_0)}, \tag{107}$$

$$D = -\frac{\rho^{(0)}}{p} F(\rho^{(0)}) \frac{\sin j\gamma_p l_0}{\sin j\gamma_p (\rho^{(0)} - l_0)}. \tag{108}$$

Cu aceste valori ale constantelor de integrare se obține următoarea soluție pentru $F(x, p)$:

$$F(x, p) = \frac{F(\rho^{(0)})}{p} \frac{\rho^{(0)}}{x} \frac{\sin j\gamma_p (x - l_0)}{\sin j\gamma_p (\rho^{(0)} - l_0)}, \tag{109}$$

respectiv funcția original

$$F(x, t) = F(\rho^{(0)}) \frac{\rho^{(0)}}{x} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 t/\tau} \frac{\sin \gamma_n \dfrac{x - l_0}{\rho^{(0)} - l_0}}{\dfrac{x - l_0}{\rho^{(0)} - l_0}} \right]. \tag{110}$$

Pentru $l_0 = 0$ se regăsește soluția (100).

d) Dacă punctul M_0 este situat pe o convexitate a suprafeței (fig. 8 *d*), se obțin soluțiile cazului examinat la punctul b, înlocuind $\rho^{(0)}$ cu x și x cu $\rho^{(0)}$.

Dacă în punctul M_0 una dintre razele principale de curbură $\rho_2^{(0)}$ este mult mai mare decît cealaltă rază $\rho_1^{(0)}$, cu aproximațiile (95), ecuațiile (26) și (27) se reduc la ecuațiile (42) — (45), adică local problema este plan-paralelă.

5. PROBLEMA TRIDIMENSIONALĂ A REFULĂRII NETE

În primele momente ale regimului tranzitoriu, cînd intensitățile cîmpurilor difuzează numai pe o adîncime mult mai mică decît razele principale de curbură sau decît segmentele $|\rho^{(0)} - l_0|$, în soluțiile [99], (106) și (109) se aproximează $\operatorname{sh} y = \sim e^y$ și $\rho^{(0)}/x = \sim 1$ și se obține

$$F(x, p) = F(\rho^{(0)}) \frac{1}{p} e^{\gamma_p \Delta x^{(0)}} \quad ; \qquad \Delta x^{(0)} = x - \rho^{(0)},$$

ca formă identică cu (85) și deci cu expresia corespunzătoare a funcției original (86):

$$F(x, t) = F(\rho^{(0)}) \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \Delta x^{(0)}. \tag{111}$$

Deoarece în regim de refulare netă adîncimea de pătrundere este mult mai mică decît razele principale de curbură, cîmpul electromagnetic difuzează într-un conductor de formă oarecare, la fel ca în semispațiul conductor.

Problema tridimensională a difuziei cîmpului electromagnetic pentru orice valoare a lui x se examinează într-o altă lucrare.

4. CONCLUZII

Din punctul de vedere al refulării curentului în regim tranzitoriu, în conductoarele a căror suprafață este regulată se distinge :

— *regimul tranzitoriu al pătrunderii totale a cîmpului electromagnetic*, care se stabilește după un timp $t > t_{min}$, (în care t_{min}, calculat cu formulele (56) și (69), corespunde celei mai mari raze de curbură dacă centrul de curbură este în conductor sau segment $|\rho^{(0)} - l_0|$ al normalei interioare dacă centrul de curbură este în dielectric); în acest regim intensitățile cîmpurilor și densitatea de curent sînt nenule în conductor ;

— *regimul tranzitoriu al refulării normale*, în care intensitățile cîmpurilor și densitatea de curent au difuzat parțial în conductor pe o adîncime de pătrundere de ordinul razei principale de curbură, respectiv al segmentului $|\rho^{(0)} - l_0|$; intensitățile cîmpurilor și densitatea de curent depind numai de coordonata după normală și componentele lor normale la suprafața conductorului sînt nule ; pătrunderea normală este locală dacă are loc numai pe o porțiune a suprafeței conductorului și este totală dacă are loc pe toată suprafața acestuia ;

— *regimul tranzitoriu al refulării nete*, în care difuzia are loc numai pe o adîncime mică Δx la suprafața conductorului după aceeași lege de variație ca în semispațiul conductor ; refularea netă este locală, respectiv totală, după cum are loc parțial sau total pe suprafața conductorului.

ANEXĂ

CALCULUL DIVERGENȚEI, ROTORULUI ȘI LAPLACEANULUI UNEI FUNCȚII VECTORIALE ÎN SISTEMUL DE COORDONATE INTRINSEC

Sistemul de coordonate curbiliniu ortogonal atașat unei suprafețe regulate $\Sigma^{(0)}$ (fără muchii sau vîrfuri ascuțite), numit și sistem intrinsec de coordonate, se definește de trei familii de suprafețe, după cum urmează :

— o familie de suprafețe de coordonate Σ paralele la suprafața de referință $\Sigma^{(0)}$, numite suprafețe atașate ;

— două familii de suprafețe de coordonate desfășurate de normalele x_3 la suprafețele atașate Σ, în lungul liniilor principale de curbură Γ_1 și Γ_2 ale acestora.

Curbele de coordonate ale sistemului sînt : pentru coordonata x_3 normalele la suprafața de referință $\Sigma^{(0)}$ și, prin urmare, la suprafețele atașate Σ ; pentru coordonatele x_1 și x_2 cele două linii principale de curbură Γ_1 și Γ_2 conținute în fiecare dintre suprafețele atașate Σ.

Notînd cu ρ_1 și ρ_2 razele principale de curbură ale liniilor de curbură Γ_1 și Γ_2 care se intersectează în punctul M de pe suprafața Σ, razele principale de curbură ρ_1' și ρ_2' ale liniilor de curbură Γ_1' și Γ_2' ale suprafeței atașate Σ' și care se intersectează în punctul M' la distanța Δn (fig. 9) vor avea expresiile

$$\rho_1' = \rho_1 + \Delta n ; \qquad \rho_2' = \rho_2 + \Delta n. \tag{112}$$

Deplasarea elementară ds_1 a punctului M în lungul liniei Γ_1, căreia îi corespunde o rotație elementară $d\alpha_1$, are expresia

$$ds_1 = \rho_1 \, d\alpha_1 = h_1(x_1, x_2, n)\, dx_1, \tag{112}$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\alpha_1}{h_1(x_1, x_2, n)\, dx_1} \tag{113}$$

și din relația

$$(\rho_1 + \Delta n)\, d\alpha_1 = h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)\, dx_1 \tag{114}$$

urmează

$$\frac{1}{\rho_1 + \Delta n} = \frac{d\alpha_1}{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)\, dx}. \tag{115}$$

Din ultimele două relații se obține

$$\frac{h_1(x_1, x_2, n)}{\rho_1} = \frac{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n)}{\rho_1 + \Delta n} =$$

$$= \frac{h_1(x_1, x_2, n + \Delta n) - h_1(x_1, x_2, n)}{\Delta n}$$

și, la limită,

$$\frac{h_1}{\rho_1} = \frac{dh_1}{dn} = \frac{\partial h_1}{h_3 \partial x_3};$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3}. \tag{116}$$

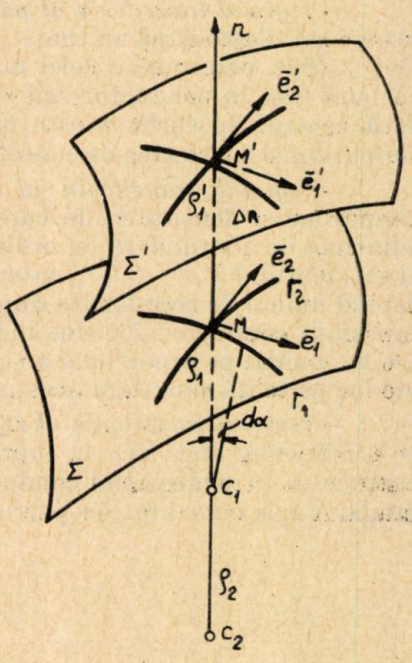


Fig. 9. — Sistemul de coordonate intrinsec.

O demonstrație analogă pentru raza principală de curbură ρ_2 conduce la o relație asemănătoare cu relația (116) :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3}. \tag{117}$$

În expresia divergenței unei funcții vectoriale $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3)$ într-un sistem de coordonate triortogonal :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 F_3)\right], \tag{118}$$

separînd termenii în care intervin derivatele parțiale după coordonata x_3 și ținînd cont de relațiile (116) și (117), se obține următoarea expresie a divergenței vectorului $\boldsymbol{F}$ în sistemul de coordonate intrinsec :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial n} + \operatorname{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{F}, \tag{119}$$

în care s-a notat cu

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 F_2)\right] \tag{120}$$

suma termenilor în care intervin derivatele parțiale în raport cu coordonatele x_1 și x_2. Dacă funcția $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3)$ nu depinde de coordonatele x_1 și x_2, expresia (102) are forma

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial n}. \tag{121'}$$

În expresia rotorului unei funcții vectoriale $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3)$ într-un sistem de coordonate triortogonal:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 F_2)\right]\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 F_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 F_3)\right]\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 F_1)\right]\boldsymbol{e}_3, \tag{122}$$

separînd termenii în care intervin derivatele parțiale după coordonata x_3 și ținînd cont de relațiile (116) și (117), se obține următoarea expresie a rotorului vectorului $\boldsymbol{F}$ în sistemul de coordonate intrinsec:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{F_1}{\rho_1} + \frac{\partial F_1}{\partial n}\right)\boldsymbol{e}_2 - \left(\frac{F_2}{\rho_2} + \frac{\partial F_2}{\partial n}\right)\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{F}, \tag{123}$$

în care s-a notat cu

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 F_3)\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 F_3)\boldsymbol{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 F_1)\right]\boldsymbol{e}_3 \tag{124}$$

suma termenilor în care intervin derivatele parțiale în raport cu coordonatele x_1 și x_2. Dacă funcția $\boldsymbol{F}$ nu depinde de coordonatele x_1 și x_2, expresia (123) are forma

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{F_1}{\rho_1} + \frac{\partial F_1}{\partial n}\right)\boldsymbol{e}_2 - \left(\frac{F_2}{\rho_2} + \frac{\partial F_2}{\partial n}\right)\boldsymbol{e}_1, \tag{125}$$

adică rotorul funcției nu are componentă normală.

În expresia rotrot $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{h_3}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 F_1)\right)\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_2}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 F_3)\right)\right\}\right]\boldsymbol{e}_1 +$$

$$+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{h_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2F_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1F_1)\right]\boldsymbol{e}_2+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{h_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1F_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3F_3)\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right]\boldsymbol{e}_3,\right.\right.$$

separînd termenii în care intervin derivatele parţiale în raport cu x_3, se obţine

$$\text{rotrot}\,\boldsymbol{F}=-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1F_1)\right\}\boldsymbol{e}_1-$$

$$-\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right\}\boldsymbol{e}_2+$$

$$+\boldsymbol{rr}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},\ \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\boldsymbol{F},\qquad(126)$$

în care s-a notat cu $\boldsymbol{rr}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},\ \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\boldsymbol{F}$ suma termenilor în care intervin derivatele parţiale în raport cu coordonatele x_1 şi x_2.

Ţinînd cont de relaţiile (116) şi (117), se obţine

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{F}=-\left[\frac{\partial^2F_1}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial n}+F_1\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_1-$$

$$-\left[\frac{\partial^2F_2}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial n}+F_2\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_2+$$

$$+\boldsymbol{rr}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},\ \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\boldsymbol{F}.\qquad(127)$$

Dacă funcţia nu depinde de coordonatele x_1 şi x_2, rezultă următoarea expresie rot rot $\boldsymbol{F}$:

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{F}=-\left[\frac{\partial^2F_1}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial n}+F_1\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_1-$$

$$-\left[\frac{\partial^2F_2}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial n}+F_2\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_2,\qquad(128)$$

care nu conţine decît componente tangenţiale.

Expresiile (127) şi (128) se pot obţine şi direct din formulele (123) şi (124), după cum urmează :

$$\text{rot rot } \boldsymbol{F} = -\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{F_1}{\rho_1}+\frac{\partial F_1}{\partial n}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{F_1}{\rho_1}+\frac{\partial F_1}{\partial n}\right)\right]\bar{e}_1 -$$

$$-\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{F_2}{\rho_2}+\frac{\partial F_2}{\partial n}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{F_2}{\rho_2}+\frac{\partial F_2}{\partial n}\right)\boldsymbol{e}_2 = -\right.$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial n}+F_1\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_1 -$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial n^2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial n}+F_2\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial \rho_2}{\partial n}\right)\right]\boldsymbol{e}_2 .$$

BIBLIOGRAFIE

1. G. Darboux, — Leçons sur la theorie générale des surfaces, Gauthier Villar, Paris 1941.
2. G. Doetsch, — Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Springer, Berlin, 1937.
3. A. Avramescu — The time constant of transient Phenomena, Rev. d'Electr. et d'en. tome 1, 1956, no. 2, pg. 8—13.
4. C. Jaeger — Conduction of heat in solids, Oxford University Press, 1947.
5. A. Gray şi G. B. Mathews, — Funcţiile Bessel şi aplicaţiile lor în fizică, Ed. Tehnică, Buc., 1958.
6. C. I. Mocanu, Contribuţii la studiul fenomenelor de difuzie superficială, Rev. Studii şi cercetări de Energ. şi Electrot., Tom. nr. 1 /1970.

STUDIUL FORŢELOR ELECTRODINAMICE ÎN CAZUL UNUI SISTEM TRIFAZAT DE CONDUCTOARE PARCURSE DE CURENT SITUATE ÎN INTERIORUL UNUI ECRAN DREPTUNGHIULAR SUBŢIRE, FĂRĂ PEREŢI DESPĂRŢITORI

DE

C. IONESCU

621.3.001 :621.3.018.4 :538.542

În lucrare au fost calculate forţele care se exercită între conductoare şi între conductoare şi ecran la diferite cazuri de scurtcircuit. Compararea rezultatelor obţinute astfel cu valorile forţelor în cazul aceloraşi bare neecranate a permis să se constate avantajul din acest punct de vedere al folosirii ecranelor.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare precedentă [5] s-a studiat cîmpul electromagnetic şi pierderile în ecran în cazul unui sistem trifazat de conductoare situate în interiorul unui ecran dreptunghiular subţire, fără pereţi despărţitori.

Folosind expresiile deduse pentru cîmpul magnetic şi considerînd aceleaşi ipoteze simplificatoare, se pot calcula forţele electrodinamice care se exercită între conductorii parcurşi de curent şi între conductori şi ecran în diferite regimuri de avarie cu metoda tensiunilor maxwelliene.

Se consideră drept suprafaţă de integrare Σ o parte din suprafaţa interioară a ecranului şi suprafaţa de separaţie dintre domeniile *1*, *2*, *3*, urma acestei suprafeţe în planul figurii fiind notată cu Γ. Se calculează forţa pe unitate de lungime.

2. CALCULUL FORŢELOR ASUPRA CONDUCTOARELOR

Forţa asupra conductorului din domeniul *1*.

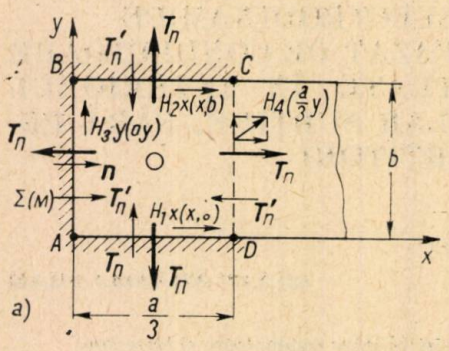
Forţele care acţionează asupra ecranului, tinzînd să-l dilate, au forma

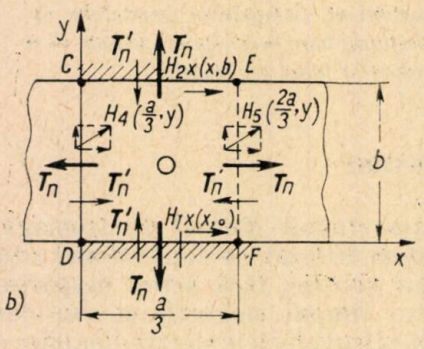
$$T_n = -n \frac{\mu H^2}{2} \text{ pentru } D\,A\,B\,C, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{T}_n = (\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{n}\frac{\mu H^2}{2} \quad \text{pentru } CD. \tag{2}$$

Forţele asupra conductorului vor fi egale şi de sens contrar avînd forma :

$$\boldsymbol{T}'_{nDA} = \boldsymbol{n}\frac{\mu H^2}{2} = \boldsymbol{j}\frac{\mu H_{1x}^2(x,\ 0)}{2}. \tag{3}$$





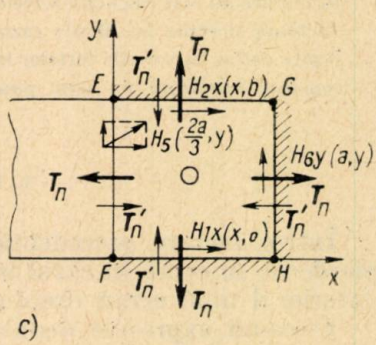


Fig. 1. — Forţele care acţionează asupra celor trei conductori : a — conductorul 1 ; b — conductorul 2 ; c — conductorul 3.

$$\boldsymbol{T}'_{nAB} = \boldsymbol{n}\frac{\mu H^2}{2} = \boldsymbol{i}\frac{\mu H_{3y}^2(0,\ y)}{2}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{T}'_{nBC} = \boldsymbol{n}\frac{\mu H^2}{2} = -\,\boldsymbol{j}\frac{\mu H_{2x}^2(x,\ b)}{2}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{T}'_{nCD} = -\left[(\boldsymbol{Bn})\boldsymbol{H} - \boldsymbol{n}\left(\frac{\boldsymbol{BH}}{2}\right)\right] = -\left\{\left[\boldsymbol{i}\,B_{4x}\left(\frac{a}{3},\ y\right) + \right.\right.$$

$$+\ \boldsymbol{j}\,B_{4y}\left(\frac{a}{3},\ y\right)\Big]\Big[\boldsymbol{i}\,H_{4x}\left(\frac{a}{3},\ y\right) + \boldsymbol{j}H_4y\left(\frac{a}{3},\ y\right)\Big](-\boldsymbol{i}) - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\,B_{4x}\left(\frac{a}{3},\ y\right) +\right.$$

$$\left.\left.+\ \boldsymbol{j}\,B_{4y}\left(\frac{a}{3},\ y\right)\Big]\Big[\boldsymbol{i}\,H_{4x}\left(\frac{a}{3},\ y\right) + \boldsymbol{j}\,H_{4y}\left(\frac{a}{3},\ y\right)\Big](-\boldsymbol{i})\right\} =$$

$$= i\,\frac{1}{2}\,B_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right) - i\,\frac{1}{2}\,B_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right) +$$

$$+\,j\,B_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right). \tag{6}$$

În final, forța F_1, care acționează asupra conductorului *1*, are expresia

$$\boldsymbol{F}_1 = i\,F_x + j\,F_y = i\,\frac{\mu}{2}\int_0^b\left[H_{3y}^2(0,y) + H_{4x}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right) - H_{4y}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right)\right]\mathrm{d}y + \tag{7}$$

$$+\,j\,\frac{\mu}{2}\int_0^{\frac{a}{3}}[H_{1x}^2(x,0) - H_{2x}^2(x,b)]\,\mathrm{d}x + j\int_0^b B_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right)\mathrm{d}y.$$

În mod analog se determină *expresiile forțelor care acționează asupra conductoarelor 2 și 3*:

$$\boldsymbol{T}'_{n_{FD}} = j\,\frac{\mu H_{1x\,(x,\,0)}^2}{2}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{DC}} = i\left[\frac{\mu H_{4y}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right)}{2} - \frac{\mu H_{4x}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right)}{2}\right] - j\,B_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{CE}} = -\,j\,\frac{\mu H_{2x}^2(x,\,b),}{2}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{EF}} = i\left[\frac{\mu H_{5x}^2\left(\frac{2a}{3},\,y\right)}{2} - \frac{\mu H_{5y}^2\left(\frac{2a}{3},\,y\right)}{2}\right] + j\,B_{5x}\left(\frac{2a}{3},\,y\right)H_{5x}\left(\frac{2a}{3},\,y\right). \tag{11}$$

Rezultă

$$\boldsymbol{F}_2 = i\,F_x + j\,F_y =$$

$$= i\,\frac{\mu}{2}\int_0^b\left[H_{4y}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right) - H_{4x}^2\left(\frac{a}{3},\,y\right) + H_{5x}^2\left(\frac{2a}{3},\,y\right) - H_{5y}^2\left(\frac{2a}{3},\,y\right)\right]\mathrm{d}y +$$

$$+\,j\,\frac{\mu}{2}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}[H_{1x\,(x,\,0)}^2 - H_{2x\,(x,\,b)}^2\,\mathrm{d}x] +$$

$$+\,j\int_0^b\left[B_{5x}\left(\frac{2a}{3},\,y\right)H_{5y}\left(\frac{2a}{3},\,y\right) - B_{4x}\left(\frac{a}{3},\,y\right)H_{4y}\left(\frac{a}{3},\,y\right)\right]\mathrm{d}y, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{HF}} = \boldsymbol{j}\frac{\mu H^2_{1x(x,0)}}{2}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{FE}} = -\boldsymbol{i}\frac{\mu H^2_{5x}\left(\frac{2a}{3}, y\right)}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\mu H^2_{5y}\left(\frac{2a}{3}, y\right)}{2} - \boldsymbol{j}B_{5x}\left(\frac{2a}{3}, y\right).H_{5y}\left(\frac{2a}{3}, y\right), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{EG}} = -\boldsymbol{j}\frac{\mu H^2_{2x(x,b)}}{2}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T}'_{n_{GH}} = -\boldsymbol{i}\frac{\mu H^2_{6y(a,y)}}{2}. \tag{16}$$

Rezultă

$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i}F_x + \boldsymbol{j}F_y = \boldsymbol{i}\frac{\mu}{2}\int_0^b \left[H^2_{5y}\left(\frac{2a}{3}, y\right) - H^2_{5x}\left(\frac{2a}{3}, y\right) - H^2_{6y(a,y)}\right]dy +$$

$$+ \boldsymbol{j}\int_{\frac{2a}{3}}^{a}[H^2_{1x(x,0)} - H^2_{2x(x,b)}]\,dx - \boldsymbol{j}\int_0^b B_{5x}\left(\frac{2a}{3}, y\right)H_{5y}\left(\frac{2a}{3}, y\right)dy. \tag{17}$$

Efectuînd calculele şi făcînd uz de anumite identităţi trigonometrice, se obţin următoarele expresii restrînse ale celor trei forţe :

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{i}\frac{\mu}{b}\left\{i_1^2\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{n_i 2\pi c}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{b}} + 2i_1\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{n_i\pi a}{b}}\left[\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}+c\right)}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}-c\right)}{b}\operatorname{ch}\frac{n_i\pi a}{b}\right]\left[i_2\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{b} + i_3\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}-c\right)}{b}\right]\right\}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{i}\frac{\mu}{b}2i_2\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-c\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{n_i\pi a}{b}}\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{2b}\left[1 + \operatorname{ch}\frac{n_i\pi a}{b}\right][i_3 - i_1], \tag{19}$$

$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i}\frac{\mu}{b}\left\{i_3^2\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi(-2c)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{b}} - 2i_3\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{n_i\pi a}{b}}\left[\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}+c\right)}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}-c\right)}{b}\operatorname{ch}\frac{n_i\pi a}{b}\right]\left[i_2\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{2b} + i_1\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}-c\right)}{b}\right]\right\}. \tag{20}$$

a) *Scurtcircuit bifazat*:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2;\ \underline{I}_3 = 0,$$

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}\, I \sin \omega t \\ i_2 = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \pi). \end{cases} \tag{21}$$

Tabela 1

Calculul forței F_1 la scurtcircuit bifazat $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$ pentru diferite valori ale lui (ωt)

ωt	0	$\frac{\pi}{6}$	$2\frac{\pi}{6}$	$3\frac{\pi}{6}$	$4\frac{\pi}{6}$	$5\frac{\pi}{6}$	π
F_1	0	−0,573	−1,72	−2,29	−1,72	−0,573	0

Ținînd seama de condiția $i_3 = 0$, în relațiile (18) și (19) se obține

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\left\{ i_1^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i 2\pi c}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n_i \pi a}{b}} + 2\, i_1 i_2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i \pi a}{2b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n_i \pi a}{b}} \left[\operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\frac{a}{2} + c\right)}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\frac{a}{2} - c\right)}{b} \operatorname{ch} \frac{n_i \pi a}{b} \right] \right\}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\,\boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\, 2 i_1 i_2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i \pi}{b}\left(\frac{a}{2} - c\right)}{\operatorname{sh}^2 \frac{n_i \pi a}{b}} \cdot \operatorname{sh} \frac{n_i \pi a}{2b} \left[1 + \operatorname{ch} \frac{n_i \pi a}{b}\right]. \tag{23}$$

Cu aceste expresii se pot calcula atît valorile medii ale forțelor în regim armonic permanent dacă se efectuează media pe o perioadă, cît și valorile maxime ale acestora dacă se introduc în expresiile astfel obținute amplitudinile curenților. Se obțin următoarele expresii ale forțelor (valori maxime):

$$\boldsymbol{F}_{1max} = \boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\; I_{max}^2 \left\{ \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i 2\pi c}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n_i \pi a}{b}} - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i \pi a}{2b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n_i \pi a}{b}} \left[\operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\frac{a}{2} + c\right)}{b} + \operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\frac{a}{2} - c\right)}{b} \cdot \operatorname{ch} \frac{n_i \pi a}{b} \right] \right\}, \tag{24}$$

$$F_{2\,max} = i\,\frac{\mu}{b}\,2\,I_{max}^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-c\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{n_i\pi a}{b}} \operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{2b}\left[1+\operatorname{ch}\frac{n_i\pi a}{b}\right]. \quad (25)$$

Considerînd cazul concret al unui ecran dreptunghiular cu $a = 3\ m$, $I_{max} = 100$ KA, $\mu = \mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ MKSA raț. și reținînd în sumă numai primii trei termeni, ceilalți fiind neglijabili, s-a obținut

$$F_{1\,max} = -\,i\;2{,}3\left[\frac{\text{kgf}}{m}\right], \quad (24')$$

$$F_{2\,max} = i\;53{,}3\left[\frac{\text{kgf}}{m}\right]. \quad (25')$$

Este interesant de comparat valorile forțelor astfel calculate cu cele din situația fără ecran, conductoarele fiind așezate la aceeași distanță ca în primul caz și parcurse de același curent :

$$F_1 = F_2' = 204\left[\frac{\text{kgf}}{m}\right], \quad (26)$$

comparație din care rezultă net avantajul folosirii barelor ecranate. Ca verificare s-a calculat forța F_1 în diferite momente. Înlocuind relația (21) în relația (22), se obține

$$F_1 = \frac{\mu}{b}\;(\sqrt{2}\,I\sin\omega t)^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{2n_i\pi c}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n_i\pi a}{b}} + $$

$$+\,2\sqrt{2}\,I\sin\omega t\,\sqrt{2}\,I\sin(\omega t-\pi)\left[\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}+c\right)}{b}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}\frac{n_i\pi\left(\frac{a}{2}-c\right)}{b}\cdot\operatorname{ch}\frac{n_i\pi a}{b}\right]\Bigg\}, \quad (27)$$

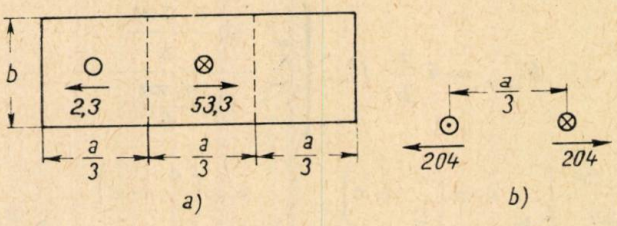


Fig. 2. — Forțele care acționează între conductori la scurt-circuitul bifazat : $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$; a — cu ecran ; b — fără ecran.

$$F_1 = A \sin^2 \omega t + B \sin \omega t \sin (\omega t - \pi) = \frac{A - B}{2} - \frac{A - B}{2} \cos 2\omega t,$$

unde

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mu}{a} 6 I^2 \displaystyle\sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2 n_i \pi}{\operatorname{sh} 3 n_i \pi} = 545, \\ B = \dfrac{\mu}{a} 12 I^2 \displaystyle\sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 3 n_i \dfrac{\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 3 n_i \pi} \left[\operatorname{sh} n_i \frac{5\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{n_i \pi}{2} \cdot \operatorname{ch} 3 n_i \pi \right] = 567{,}5. \end{cases} \tag{28}$$

Pentru diferite valori ale lui ωt s-a obținut pentru F_1 valorile

$$F_1 = (-1{,}145 + 1{,}145 \cos 2\omega t) \left[\frac{\text{kgf}}{m} \right]. \tag{29}$$

Se verifică faptul că $F_{1max} = -2{,}3 \dfrac{\text{kgf}}{\text{m}}$ și are loc pentru $\dfrac{\pi}{2}$.

b) *Scurtcircuit bifazat*

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_3; \quad \underline{I}_2 = 0,$$

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}\, I \sin \omega t, \\ i_3 = \sqrt{2}\, I \sin (\omega t - \pi). \end{cases} \tag{30}$$

Înlocuind condiția $i_2 = 0$ în relațiile (18) și (20), se obține

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{i} \frac{\mu}{b} \left\{ i_1^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{n_i 2\pi c}{b}}{\operatorname{sh} \dfrac{n_i \pi a}{b}} + 2 i_1 i_3 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{n_i \pi}{b} \left(\dfrac{a}{2} - c \right)}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{n_i \pi a}{b}} \left[\operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\dfrac{a}{2} + c \right)}{b} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\dfrac{a}{2} - c \right)}{b} \operatorname{ch} \frac{n_i \pi a}{b} \right] \right\}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i} \frac{\mu}{b} \left\{ i_3^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\dfrac{n_i \pi (-2c)}{b}}{\operatorname{sh} \dfrac{n_i \pi a}{b}} - 2 i_1 i_3 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{n_i \pi}{b} \left(\dfrac{a}{2} - c \right)}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{n_i \pi a}{b}} \left[\operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\dfrac{a}{2} - c \right)}{b} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{sh} \frac{n_i \pi \left(\dfrac{a}{2} - c \right)}{b} \operatorname{ch} \frac{n_i \pi a}{b} \right] \right\}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{F}_{1\,max} = \boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\,I_{max}^2\left\{\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{n_i\,2\pi c}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{n_i\,\pi\,a}{b}} - 2\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}-c\right)}{b}}{\operatorname{sh}^2\dfrac{n_i\,\pi\,a}{b}}\left[\operatorname{sh}\frac{n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}+c\right)}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh}\frac{n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}-c\right)}{b}\operatorname{ch}\frac{n_i\,\pi\,a}{b}\right]\right\}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{F}_{3\,max} = \boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\,I_{max}^2\left\{\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{n_i\,\pi(-2c)}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{n_i\,\pi\,a}{b}} + 2\sum_{n_i=1}^{\infty}\left[\operatorname{sh}\frac{n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}+c\right)}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh}\frac{n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}-c\right)}{b}\cdot\operatorname{ch}\frac{n_i\,\pi\,a}{b}\right]\frac{\operatorname{sh}\,n_i\,\pi\left(\dfrac{a}{2}-c\right)}{\operatorname{sh}^2\dfrac{n_i\,\pi\,a}{b}}\right\}. \tag{34}$$

Calculînd pentru cazul numeric considerat, se obține

$$\boldsymbol{F}_{1\,max} = \boldsymbol{i}\;53\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right];\quad \boldsymbol{F}_{3\,max} = -\,\boldsymbol{i}\;53\left[\frac{\text{kgf}}{m}\right]. \tag{35}$$

În cazul situării conductoarelor în aer la aceeași distanță se obține forța

$$F = \frac{K\,\mu_0}{4\,\pi}\cdot\frac{2\,I^2}{2\,\dfrac{a}{3}} = 102\left[\frac{\text{kg}\,f}{m}\right]. \tag{36}$$

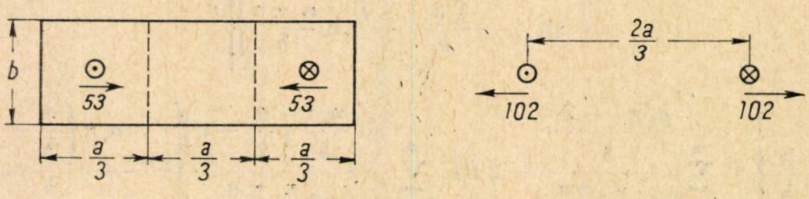


Fig. 3. — Forțele care acționează între conductori la scurtcircuitul bifazat: $\underline{I}_1 = -\underline{I}_3$; $\underline{I}_2 = 0$; a — cu ecran; b — fără ecran.

Este de remarcat faptul că forțele sînt de atracție în cazul barelor situate în ecran la acest scurtcircuit bifazat și nu de respingere, așa cum ar fi fost în absența ecranului. Acest fapt este explicabil dacă se ia în considerare influența curenților induși în ecran.

c) *Scurtcircuit trifazat*:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}, \tag{37}$$

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}\ I \sin \omega t, \\ i_2 = \sqrt{2}\ I \sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right), \\ i_3 = \sqrt{2}\ I \sin\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

În cazul scurtcircuitului trifazat, pentru a evita rezolvarea unei ecuații transcendente este util să se calculeze forța prin punete la diferite momente spre a se stabili valoarea forței maxime și momentul cînd are loc, valoare de care trebuie să se țină seama la dimensionarea sistemului de bare.

Înlocuind în expresiile celor trei forțe (18), (19), (20) relațiile (37) și ținînd seama că $c = b = \dfrac{a}{3}$, se obține

$$F_1 = i\,\frac{\mu}{a}\,6\,I^2\left\{\sin^2 \omega t \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2\,n_i\pi}{\operatorname{sh} 3\,n_i\pi} + 2 \sin \omega t \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 3n_i\pi}\left[\operatorname{sh} n_i \frac{5\pi}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sh} \frac{n_i\pi}{2} \operatorname{ch} 3\,n_i\pi\right]\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sh} 3\,n_i \frac{\pi}{2} + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \operatorname{sh} \frac{n_i\pi}{2}\right]\right\}, \tag{38}$$

$$F_2 = i\,\frac{\mu}{a}\,4\,I^2\left\{\sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{n_i\pi}{b}\left(\dfrac{a}{2} - c\right)}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{n_i\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n_i\pi a}{2b}\left[1 + \operatorname{ch} \frac{n_i\pi a}{b}\right]\right\}\left[\sin\left(\omega t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin \omega t\right], \tag{39}$$

$$F_3 = i\,\frac{\mu}{a}\,6\,I^2\left\{\sin^2\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(-2\,n_i\pi)}{\operatorname{sh} 3n_i\pi} - 2 \sin\left(\omega t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4\pi}{3}\right) \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 3\,n_i\pi}\left[\operatorname{sh} n_i \frac{5\pi}{2} + \operatorname{sh} n_i \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} 3\,n_i\pi\right]\left[\sin\left(\omega t - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sh} 3\,n_i \frac{\pi}{2} + \sin \omega t \operatorname{sh} n_i \frac{\pi}{2}\right]\right\} \tag{40}$$

sau, în funcție de constantele A, B, C,

$$F_1 = \frac{A_1}{2} - \frac{B_1 + C_1}{4} - \cos 2\,\omega t\left[\frac{A_1}{2} - \frac{B_1 + C_1}{4}\right] - \sin 2\,\omega t\,[B_1 - C_1]\,\frac{\sqrt{3}}{4}, \tag{41}$$

$$F_2 = \frac{A_2}{4}\,[-3\cos 2\,\omega t + \sqrt{3}\sin 2\,\omega t], \tag{42}$$

$$F_3 = \frac{A_3}{2} + \frac{B_3 + C_3}{4} + \cos 2\,\omega t\left[\frac{A_3}{4} + \frac{B_3}{2} - \frac{C_3}{4}\right] + \sin 2\,\omega t\,[-A_3 - C_3]\frac{\sqrt{3}}{4}, \tag{43}$$

în care A_1 şi B_1 au expresiile şi valorile (28) de la scurtcircuitul bifazat, iar

$$C_1 = \frac{\mu}{a}\,12\,I^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n_i \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 3\,n_i\,\pi}\left[\operatorname{sh} n_i \frac{5\pi}{2} + \operatorname{sh}\frac{n_i\pi}{2}\operatorname{ch} 3\,n_i\,\pi\right] = 23{,}35, \tag{44}$$

$$A_2 = 12\,\frac{\mu}{a}\,I^2 \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n_i \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 3 n_i\pi}\,[1 + \operatorname{ch} 3\,n_i\pi]\operatorname{sh} n_i \frac{3\pi}{2} = 521{,}5, \tag{45}$$

$$A_3 = -A_1;\quad B_3 = B_1;\quad C_3 = C_1. \tag{46}$$

Rezultă

$$F_1 = 12{,}75 - 12{,}75\cos 2\,\omega t - 24\sin 2\,\omega t, \tag{47}$$

$$F_2 = -40\cos 2\,\omega t + 23\sin 2\,\omega t, \tag{48}$$

$$F_3 = -12{,}75 + 14{,}5\cos 2\,\omega t + 23\sin 2\,\omega t. \tag{49}$$

Pentru diferite valori ale lui ωt se obţin rezultatele din tabela 2. Este interesant de comparat şi în acest caz valorile forţelor, şi în special cele maxime, cu valorile care se obţin în absenţa ecranului (tabela 3).

Observaţii. Valorile cu asterisc din tabela 2 au fost neglijate la reprezentările din tabela 3, ele reprezentînd (0,1 — max 3)% din valoarea forţei maxime în cazul respectiv.

Tabela 2

Forţele care acţionează asupra conductorilor, la scurtcircuit trifazat, pentru diferite valori ale lui ωt — Comparaţie între situaţia cu şi fără ecran

ωt		0	$\frac{\pi}{6}$	$2\frac{\pi}{6}$	$2{,}5\,\frac{\pi}{6}$	$3\,\frac{\pi}{6}$	$4\,\frac{\pi}{6}$	$5\,\frac{\pi}{6}$	$5{,}5\,\frac{\pi}{6}$	π
F_1 $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right]$	cu ecran	0	−14,325	*−1,575	13	25,5	39,82	27	13	0
	fără ecran	0	−76,5	−153	−164	−153	−76,5	0	11,45	0
F_2 $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right]$	cu ecran	−40	*−0,02	40	46,15	40	*0,05	−40	−46,15	−40
	fără ecran	−132	0	132	152,2	132	0	−132	−152,2	−132
F_3 $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right]$	cu ecran	*1,25	14,95	*0,2	−13	−27,25	−40,2	−25,7	−13	1,25
	fără ecran	153	76,35	−0,15	−11,65	0	76,65	153,5	164,65	153

d) *Calculul forțelor la scurtcircuit trifazat în absența ecranului*

$$F_1 = F_1' + F_1'' = \frac{K\,\mu_0}{4\pi}\left[2\,\frac{i_1 i_2}{\frac{a}{3}} + 2\,\frac{i_1 i_3}{2\,\frac{a}{3}}\right] = k\,i_1\left(i_2 + \frac{i_3}{2}\right), \tag{50}$$

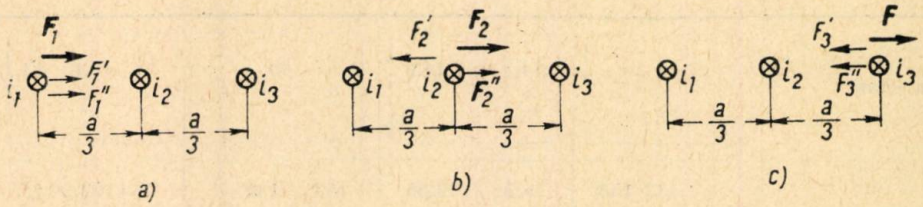


Fig. 4. — Forțele care acționează asupra conductorilor la scurtcircuit trifazat în absența ecranului.

unde

$$k = \frac{2\,K\,\mu_0}{2\,\pi\,a}. \tag{51}$$

Înlocuind relațiile (37) în (50), rezultă

$$F_1 = K_1\left[-1 + \cos 2\,\omega t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\,\omega t\right] = -76{,}5 + 76{,}5\cos 2\,\omega t - 44{,}3\sin 2\,\omega t, \tag{52}$$

unde

$$K_1 = \frac{9}{8}\,\frac{K\,\mu_0}{\pi\,a}\,I^2 = \frac{3}{4}\,k\,I^2. \tag{53}$$

În mod analog se obține

$$F_2 = F_2'' - F_2' = \frac{K\,\mu_0}{4\,\pi}\left[2\,\frac{i_2 i_3}{\frac{a}{3}} - 2\,\frac{i_1 i_3}{\frac{a}{3}}\right] = k\,i_3\,(i_2 - i_1) = -$$

$$= -132\cos 2\,\omega t + 76{,}4\sin 2\,\omega t, \tag{54}$$

$$F_2 = K_2\,(-3\cos 2\,\omega t + \sqrt{3}\sin 2\,\omega t),$$

unde k_2 are expresia

$$K_2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{K\,\mu_0}{\pi\,a}\,I^2, \tag{55}$$

$$F_3 = -(F_1' + F_3'') = -\frac{K\,\mu_0}{4\,\pi}\left[2\,\frac{i_2 i_3}{\frac{a}{3}} + 2\,\frac{i_1 i_3}{2\,\frac{a}{3}}\right] = -k\,i_3\left(i_2 + \frac{i_1}{2}\right). \tag{56}$$

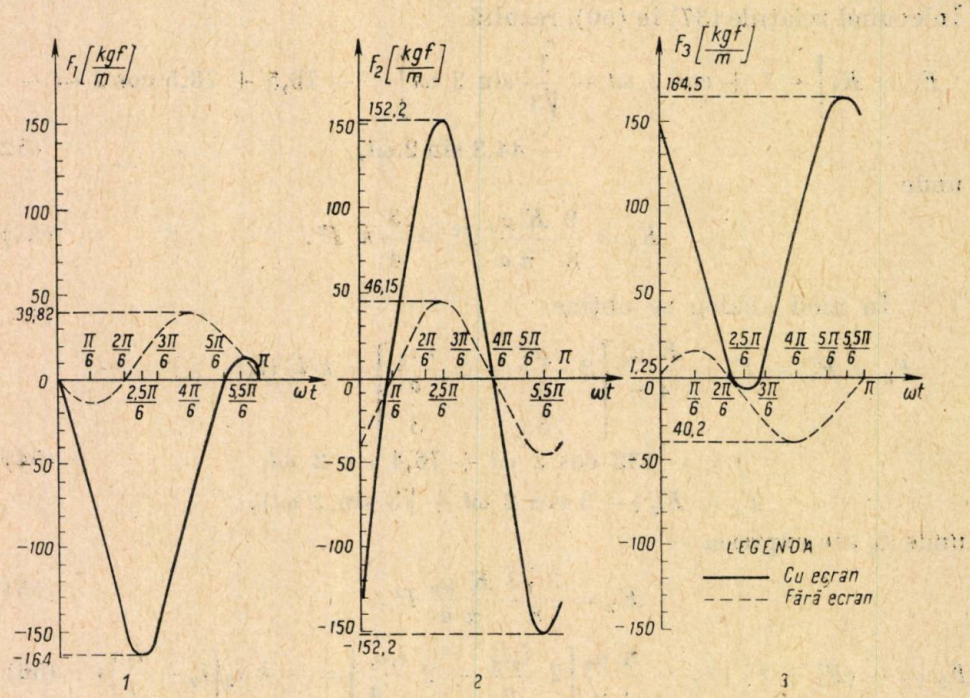
$$F_3 = K_1\left[1 + \cos 2\omega t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\,\omega t\right] = 76{,}5 + 76{,}5\cos 2\,\omega t - 44{,}3\sin 2\,\omega t. \tag{57}$$

Tabela

Comparația între valorile forțelor asupra conductorilor la

ωt	0	$\frac{\pi}{6}$	$2\frac{\pi}{6}$	$2{,}5\frac{\pi}{6}$
cu ecran	40	14,3 14,9	40	13 46,15 13
fără ecran	132 153	76,5 76,35	153 132	164 152,2 11,6

Rezultatele sînt trecute în tabela 2 și reprezentate grafic în diagramele *1*, *2* și *3*. Examinînd tabela și diagramele, se observă atît o micșorare considerabilă a valorilor maxime ale forțelor în cazul barelor ecranate față de barele neecranate, cît și o creștere a stabilității sistemului, asupra



Diagramă

barelor extreme exercitîndu-se forțe egale și de semn contrar (spre deosebire de cazul barelor neecranate, cînd acestea erau în general neegale), iar bara din mijloc fiind supusă alternativ unei forțe care o apropie fie de bara *1*, fie de bara *2*.

3

scurtcircuit trifazat, în prezența și absența ecranului

$3\frac{\pi}{6}$	$4\frac{\pi}{6}$	$5\frac{\pi}{6}$	$5{,}5\frac{\pi}{6}$	π
25,5 40 27,2 o o o → → ←	39,82 40,2 o o o → ←	27 40 25,7 o o o → ← →	13 46,15 13 o o o → ← ←	40 o o o ←
153 132 o o o ← →	76,5 76,6 o o o ← →	132 153 o o o ← →	11,4 152,2 164,65 o o o → ← →	132 153 o o o ← ← →

2. FORȚELE ASUPRA ECRANULUI

Forțele asupra ecranului sînt egale și de semn contrar cu cele asupra firelor :

$$\boldsymbol{T}_{AB} = -\boldsymbol{T}'_{AB} = -\boldsymbol{i}\frac{\mu H^2_{3y}(0, y)}{2}, \tag{58}$$

$$\boldsymbol{T}_{BG} = \boldsymbol{T}_{BC} + \boldsymbol{T}_{CE} + \boldsymbol{T}_{EG} = -[\boldsymbol{T}'_{BC} + \boldsymbol{T}'_{CE} + \boldsymbol{T}'_{EG}] = \boldsymbol{j}\frac{\mu H^2_{2x}(x, b)}{2}, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{T}_{GH} = -\boldsymbol{T}'_{GH} = \boldsymbol{i}\frac{\mu H^2_{6y}(a, y)}{2}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{T}_{HA} = \boldsymbol{T}_{HF} + \boldsymbol{T}_{FD} + \boldsymbol{T}_{DA} = -(\boldsymbol{T}'_{HF} + \boldsymbol{T}'_{FD} + \boldsymbol{T}'_{DA}) = -$$

$$-\boldsymbol{j}\frac{\mu H^2_{1x}(x, 0)}{2} = -\boldsymbol{T}_{BG} \tag{61}$$

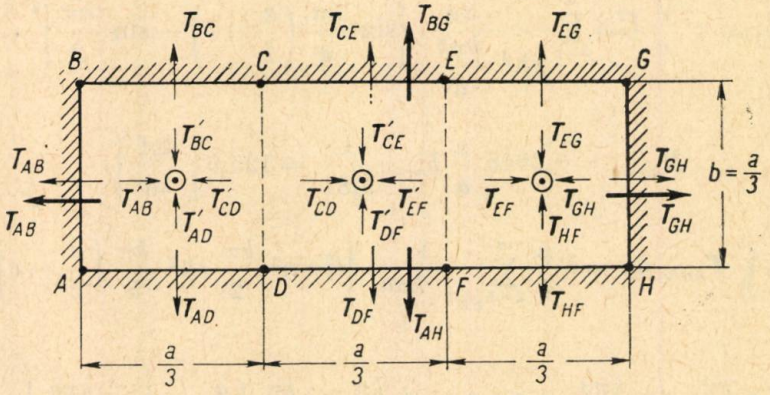


Fig. 5. — Forțele care acționează asupra ecranului.

a) *Scurtcircuit bifazat*:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2; \quad \underline{I}_3 = 0,$$

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \int_0^b \boldsymbol{T}_{AB}(y)\,dy = -\frac{\mu}{b}\,\boldsymbol{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{(2n-1)\pi a}{b}}\left\{i_1\operatorname{sh}^2\frac{(2n-1)\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+c\right)+\right. \tag{62}$$

$$\left.+\,i_2^2\operatorname{sh}^2\frac{(2n-1)\,\pi a}{2b}+2\,i_1\,i_2\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+c\right)\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\right\},$$

$$F_{ABmax} = \frac{\mu}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{max}^2}{\operatorname{sh}^2\dfrac{(2n-1)\pi a}{b}}\left\{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+c\right)-\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\right\}. \tag{63}$$

Pentru cazul numeric considerat rezultă

$$F_{ABmax} = 0{,}04\,\frac{\mu}{b}\,I_{max}^2\,\frac{1}{9{,}81} = 51{,}1\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right]. \tag{64}$$

În mod analog

$$\boldsymbol{F}_{BG} = \int_0^a \boldsymbol{T}_{BG}(x)\,dx = \boldsymbol{j}\,\frac{\mu}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{k\pi b}{a}}\left\{i_1^2\sin^2\frac{k\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-c\right)\operatorname{sh}^2\frac{k\pi b}{2a}+\right.$$

$$\left.+\,i_2^2\sin^2\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}^2\frac{k\pi b}{2a}+2\,i_1\,i_2\sin\frac{k\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-c\right)\operatorname{sh}^2\frac{k\pi b}{2a}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\right\}, \tag{65}$$

$$F_{BGmax} = \frac{\mu}{a}\,I_{max}^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^2\dfrac{k\pi b}{2a}}{\operatorname{sh}^2\dfrac{k\pi b}{a}}\left\{\sin\frac{k\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-c\right)-\sin\frac{k\pi}{2}\right\}^2, \tag{66}$$

$$F_{BGmax} = 0{,}2946\,\frac{\mu}{a}\,I_{max}^2\,\frac{1}{9{,}81} = 125{,}5\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right], \tag{67}$$

$$\boldsymbol{F}_{GH} = \int_0^b \boldsymbol{T}_{GH(y)}\,dy = \boldsymbol{i}\,\frac{\mu}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{k\pi a}{b}}\left\{i_1^2\sin^2\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}^2\frac{k\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-c\right)+\right.$$

$$\left.+\,i_2^2\sin^2\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}^2\frac{k\pi a}{2b}+2\,i_1\,i_2\sin^2\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{k\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-c\right)\operatorname{sh}\frac{k\pi a}{2b}\right\}, \tag{68}$$

$$F_{GHmax} = \frac{\mu}{b} I_{max}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{(2n-1)\pi a}{b}} \left\{ \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} - c \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi a}{2b} \right\}^2, \tag{69}$$

$$F_{GHmax} = 7{,}49 \cdot 10^{-5} \frac{\mu}{a} I_{max}^2 \frac{1}{9{,}81} = 0{,}096 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}} \right]. \tag{70}$$

b) *Scurtcircuit bifazat*:

$$\underline{I}_1 = - \underline{I}_3; \qquad \underline{I}_2 = 0,$$

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \int_0^b \boldsymbol{T}_{AB(y)} \, \mathrm{d}y = -\boldsymbol{i} \frac{\mu}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{(2n-1)\pi a}{b}} \left\{ i_1^2 \operatorname{sh}^2 \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} + c \right) + \right.$$

$$+ i_3^2 \operatorname{sh}^2 \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} - c \right) + 2 i_1 i_3 \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} + c \right) \times$$

$$\left. \cdot \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} - c \right) \right\}, \tag{71}$$

$$F_{ABmax} = \frac{\mu}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{max}^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{(2n-1)\pi a}{b}} \left\{ \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} + c \right) - \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{b} \left(\frac{a}{2} - c \right) \right\}^2,$$

(72)

$$F_{ABmax} = 0{,}043 \frac{\mu}{b} I_{max}^2 \cdot \frac{1}{9{,}81} = 55 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}} \right] = F_{GHmax}. \tag{73}$$

În mod analog rezultă

$$\boldsymbol{F}_{BG} = \int_0^a \boldsymbol{T}_{BG}(x) \, \mathrm{d}x = \boldsymbol{j} \frac{\mu}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{k\pi b}{a}} \left\{ i_1^2 \sin^2 \frac{k\pi}{a} \left(\frac{a}{2} - c \right) \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi b}{2a} + \right.$$

$$+ i_3^2 \sin^2 \frac{k\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + c \right) \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi b}{2a} + 2 i_1 i_3 \sin \frac{k\pi}{a} \left(\frac{a}{2} - c \right) \times$$

$$\left. \times \sin \frac{k\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + c \right) \operatorname{sh}^2 \frac{k\pi b}{2a} \right\}, \tag{74}$$

$$F_{BGmax} = \frac{\mu}{a} I_{max}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \dfrac{k\pi b}{2a}}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{k\pi b}{a}} \left\{ \sin \frac{k\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - c\right) - \sin \frac{k\pi}{a}\left(\frac{a}{2} + c\right) \right\}^2 =$$

$$= 4 \frac{\mu}{a} I_{max}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \dfrac{2n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} 2n \dfrac{\pi b}{a}} \sin^2 \frac{2n\pi}{6}, \tag{75}$$

$$F_{BGmax} = 0{,}0854 \frac{4\mu}{a} I_{max}^2 \frac{1}{9{,}81} = 146 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right] = F_{HAmax}. \tag{76}$$

În concluzie, forţele asupra firelor şi ecranului în cazul scurtcircuitelor bifazate sînt următoarele :

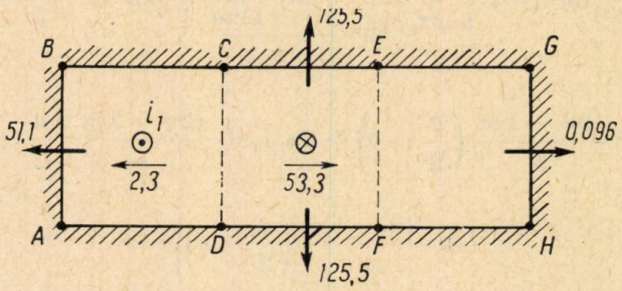


Fig. 6. — Forţele care acţionează asupra ecranului şi conductorilor la scurtcircuitul bifazat : $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$.

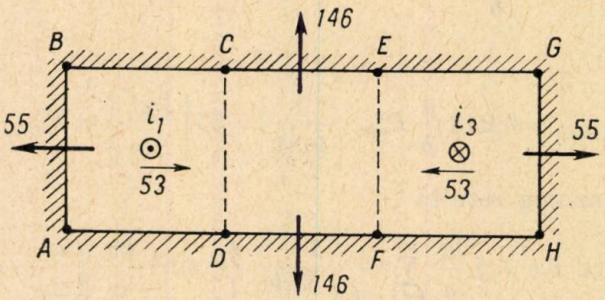


Fig. 7. — Forţele care acţionează asupra ecranului şi conductorilor la scurtcircuit bifazat : $\underline{I}_1 = -\underline{I}_3$; $\underline{I}_2 = 0$.

3. CONCLUZII

În lucrare a fost efectuat calculul forţelor electrodinamice care se exercită între conductoare şi asupra ecranului în diferite cazuri de avarie, utilizînd metoda tensiunilor maxwelliene. Din compararea valorilor obţi-

nute în cazul barelor ecranate cu valorile forțelor, considerînd barele neecranate, rezultă că acestea se micșorează la jumătate în cazul scurtcircuitului bifazat $\underline{I}_1 = -\underline{I}_3$; $\underline{I}_2 = 0$ și la sfert în cazul scurtcircuitului bifazat $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$ și al celui trifazat. De asemenea se constată că situația scurtcircuitului bifazat $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$; $\underline{I}_3 = 0$ este cea mai interesantă, deoarece atît conductorii, cît și pereții ecranului sînt solicitați inegal.

Corecții datorită conductivității finite a ecranului nu au fost necesare, deoarece nu interesează forțele în regim tranzitoriu, iar din lucrările precedente [3] se știe că repartiția de curent în momentul inițial corespunde unei conductivități infinite a ecranului.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Răduleț, *Curs de bazele teoretice ale electrotehnicii*, București, Edit. Energetică de stat, 1954.
2. W. R. Smythe, *Static and dinamic electricity*, New York-Toronto Londra, 1950.
3. R. Răduleț, Al. Timotin, A. Țugulea, *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al unor conductoare paralele parcurse de curent situate în interiorul unui ecran electromagnetic de formă dreptunghiulară*, Rev. roum. sci. tehn. electroteh. energ., **12**, *3*, 437–453 (1967).
4. Al. Timotin, A. Țugulea și C. Fluerașu, *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al unor fire rectilinii parcurse de curent alternativ în prezența unui ecran plan de grosime finită*, St. cerc. energ. electr., **16**, *3*, 481–501 (1966).
5. C. Ionescu, *Cîmpul electromagnetic cvasistaționar al unui sistem trifazat de conductoare situate într-un ecran dreptunghiular subțire, fără pereți despărțitori* (sub tipar).

CALCULUL SUPRATENSIUNILOR DE COMUTAȚIE LA CONECTAREA PRIN REZISTENȚĂ A LINIILOR DE ÎNALTĂ TENSIUNE

DE

EMILIA WAGNER

621.3.015.3 : 538.566

În lucrare se urmărește determinarea valorii optime a rezistențelor folosite la punerea sub tensiune a liniilor de înaltă tensiune. Sînt calculate supratensiunile în etapa conectării liniei cu rezistența în serie și în etapa cînd se scurtcircuitează aceasta. Din condiția ca supratensiunile din cele două etape să fie minime, se determină valoarea optimă a rezistenței, care rezultă întotdeauna mai mică decît impedanța de undă a liniei. Pentru valoarea optimă a rezistenței sînt calculate supratensiunile maxime în funcție de lungimea liniei.

1. INTRODUCERE

La punerea sub tensiune și la reanclanșarea liniilor de transport de înaltă tensiune pot apărea supratensiuni de valoare foarte mare. Astfel se pot obține la reanclanșarea unei linii monofazate supratensiuni pînă la 3 u_m. La liniile trifazate rezultă la conectarea nesimultană a fazelor valori și mai mari pentru supratensiuni. În literatură [1]—[3], [6] sînt prezentate cîteva mijloace pentru limitarea acestor supratensiuni, una dintre acestea fiind folosirea unor rezistențe conectate în paralel cu contactele principale ale întrerupătorului. Punerea sub tensiune se efectuează în două trepte : mai întîi se conectează linia cu rezistența în serie, iar pe urmă se închid contactele principale ale întrerupătorului care scurtcircuitează rezistența. Valoarea rezistenței trebuie astfel determinată, încît supratensiunile din ambele etape ale conectării să fie cît mai mici. În [3], [6] sînt prezentate măsurători pe analizorul tranzitoriu de rețea și determinate curbe care dau valoarea optimă a rezistenței în funcție de lungimea liniei și de puterea de scurtcircuit a sistemului. În [1] sînt determinate valorile optime pentru rezistență cu ajutorul unui calculator numeric.

Scopul prezentei lucrări este determinarea pe cale analitică a rezistenței optime pentru cazul unei linii monofazate. Rezultatele obținute vor putea fi folosite și la linii trifazate, deoarece în [3] se arată experimental

că valorile optime pentru rezistență coincid practic cu cele de la liniile monofazate. Valoarea rezistenței va fi determinată din condiția ca supratensiunile în cele două etape ale conectării să fie cît mai mici.

În prima etapă, cînd se pune sub tensiune linia cu rezistența în serie, rezultă imediat că supratensiunile sînt cu atît mai mici, cu cît rezistența este mai mare, deoarece se repartizează mai mult din tensiune pe rezistență și mai puțin pe linie. În faza de scurtcircuitare a rezistenței rezultă evident că este mai avantajoasă rezistența de valoare mai mică, deoarece tensiunea pe ea este mai mică și prin scurtcircuitarea ei se produce o schimbare mai neînsemnată în regimul de funcționare al liniei. Pentru a satisface cele două cerințe contradictorii se determină o valoare optimă pentru rezistență, la care supratensiunile care apar în cele două etape ale conectării sînt egale.

În lucrare se mai arată că supratensiunea maximă nu apare la prima reflectare a undei de tensiune, adică la timpul de parcurs al liniei, ci mai tîrziu, și este cu atît mai mare cu cît linia este mai lungă. Alegerea corectă a rezistenței în funcție de supratensiunea maximă și nu în funcție de aceea care apare la prima reflectare duce la o reducere a supratensiunilor.

2. PUNEREA SUB TENSIUNE A UNEI LINII CU O REZISTENȚĂ ÎN SERIE

Pentru efectuarea calculelor se consideră că se pune sub tensiune o linie în gol, deoarece în acest caz apar supratensiuni mari la sfîrșitul liniei. Pentru simplificare se neglijează influența pămîntului asupra propagării undelor, iar linia se consideră fără pierderi, adică undele se vor propaga neatenuat pe linie. În prima fază a conectării se închide contactul *1* și rezistența R se leagă în acest fel în serie cu linia (fig. 1).

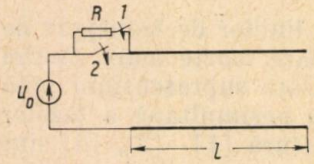


Fig. 1. — Punerea sub tensiune a unei linii prin intermediul unei rezistențe.

Expresia tensiunii pe linie se obține din ecuațiile telegrafiștilor, scrise operațional în forma

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}U(x,\,p)}{\mathrm{d}x} &= Z(p)\,I(x,\,p), \\ -\frac{\mathrm{d}I(x,\,p)}{\mathrm{d}x} &= Y(p)\,I(x,\,p), \end{aligned} \tag{1}$$

unde $U(x,\,p)$ și $I(x,\,p)$ sînt transformatele Laplace ale tensiunii și, respectiv, curentului, $Z(p) = pL$ este impedanța longitudinală lineică, iar $Y(p) = pC$ admitanța transversală lineică.

Prin rezolvarea ecuațiilor (1) se obține

$$U(x,\,p) = \frac{U_0(p)\,\mathrm{ch}\gamma(l-x)}{\mathrm{ch}\gamma l + \dfrac{R}{z_0}\,\mathrm{sh}\gamma l}, \qquad I(x,\,p) = \frac{U_0(p)\,\mathrm{sh}\gamma(l-x)}{z_0\left(\mathrm{ch}\gamma l + \dfrac{R}{z_0}\,\mathrm{sh}\gamma l\right)}, \tag{2}$$

unde $U_0(p)$ este transformata Laplace a tensiunii aplicate liniei, $\gamma = p\sqrt{LC}$ constanta de propagare, iar $z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ impedanța de undă a liniei. Pentru cazul cînd conductorul de întoarcere este pămîntul și conductorul se găsește la înălțimea h și are raza r, se obține, după simplificări, $z_0 = 60 \ln \frac{2h}{r}$.

Valoarea maximă a tensiunii apare la sfîrșitul liniei, adică la $x = l$, și este egală cu

$$U(l, p) = \frac{U_0(p)}{\operatorname{ch}\gamma l + \frac{R}{z_0}\operatorname{sh}\gamma l}. \tag{3}$$

Valoarea momentană a tensiunii se obține din (3) prin determinarea funcției originale corespunzătoare. În continuare se va prezenta calculul pentru cazul cînd se conectează o tensiune constantă la linie și pentru cazul cînd se conectează o tensiune alternativă în momentul cel mai dezavantajos din punctul de vedere al supratensiunilor, adică atunci cînd trece prin maxim.

a) CONECTAREA UNEI TENSIUNI CONSTANTE LA LINIE

Determinarea supratensiunilor pentru acest caz este necesară, deoarece rezultatele obținute vor fi folosite în continuare la conectarea tensiunii alternative și vor putea fi de asemenea aplicate direct la punerea sub tensiune a liniilor relativ scurte (adică cu timpul de parcurs τ al liniei mult mai mic decît perioada tensiunii alternative conectate).

Pentru a obține din (3) valoarea momentană a tensiunii, se poate aplica metoda d'Alembert, care se bazează pe dezvoltarea în serie a expresiei și conduce la

$$U(l, p) = \frac{2U_0(p)}{1 + \frac{R}{z_0}}(e^{-\gamma l} - ae^{-3\gamma l} + a^2e^{-5\gamma l} \dots), \tag{4}$$

unde s-a notat cu a raportul $a = \frac{z_0 - R}{z_0 + R}$.

Înlocuind $\gamma l = p\sqrt{LC}l = p\frac{l}{v_0} = p\tau$ (v_0 fiind viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid), se observă că tensiunea se obține ca o sumă de unde care sosesc la τ, 3τ, 5τ ... Valoarea finală la care tinde această tensiune este chiar tensiunea aplicată U_0 și ea rezultă din

$$u(l) = \frac{2U_0}{1 + \frac{R}{z_0}}(1 - a + a^2 \dots) = U_0.$$

Prima supratensiune apare la reflectarea primei unde de tensiune și este egală cu $\frac{2U_0}{1 + R/z_0}$. Se observă că pentru $R < z_0$ această supra-

tensiune este mai mare decît U_0, iar pentru $R > z_0$ este mai mică. Pentru cazul cînd $R = z_0$ se obține $a = 0$ și tensiunea își obține valoarea finală după $t = \tau$ fără alt fenomen tranzitoriu. Curbele de variație ale tensiunii la sfîrșitul liniei pentru diferite valori ale rezistenței R sînt redate în figura 2.

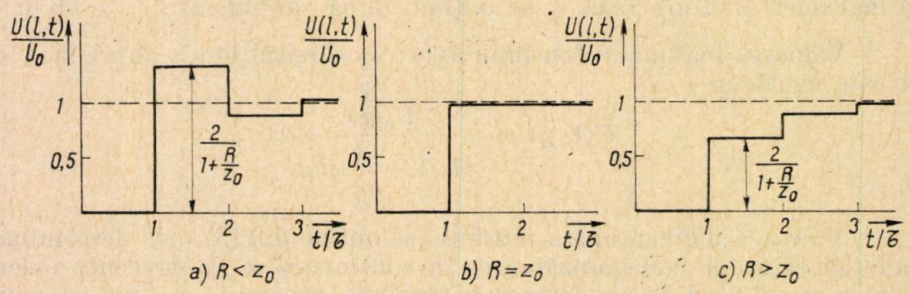


Fig. 2. — Tensiunea la sfîrșitul liniei la conectarea ei la o tensiune constantă cu rezistență în serie.

Pentru calculul ulterior este avantajos să se scrie tensiunea ca suma din tensiunea de regim permanent și o componentă tranzitorie:

$$U(l, p) = U_0(p) + U_{tr}(l, p) = U_0(p) + \left\{ -U_0(p) + \frac{2U_0(p)}{1 + \frac{R}{z_0}} (e^{-\gamma l} - a e^{-3\gamma l} \ldots) \right\}.$$

Variația în timp a componentei tranzitorii pentru $R < z_0$ este reprezentată în figura 3.

Din cele prezentate se observă că, pentru a evita apariția supratensiunilor la conectare, valoarea rezistenței R trebuie luată mai mare decît impedanța de undă a liniei, în care caz tensiunea la sfîrșitul liniei va crește treptat pînă la valoarea finală U_0, ca în figura 2*c*. Valoarea primei supratensiuni în funcție de rezistența R este reprezentată în figura 4.

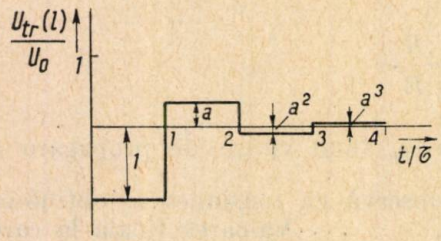


Fig. 3. — Componenta tranzitorie a tensiunii la sfîrșitul liniei.

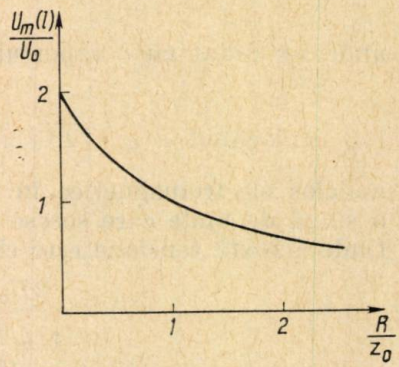


Fig. 4. — Valoarea supratensiunii la sfîrșitul liniei la prima reflectare ($t = \tau$) în funcție de rezistența R.

Valoarea momentană a tensiunii la sfîrșitul liniei poate fi calculată din (3) și cu teorema dezvoltării. Calculele sînt prezentate în anexă și conduc la următoarele expresii:

– pentru $R < z_0$:

$$u(l, t) = U_0 - \frac{4U_0}{1 - \frac{R}{z_0}} a^{\frac{t+\tau}{2\tau}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \sin\left\{\frac{t}{2\tau}(2\nu+1)\pi + \alpha_\nu\right\}}{\sqrt{\ln^2 a + (2\nu+1)^2\pi^2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_\nu = -\frac{(2\nu+1)\pi}{\ln a}; \tag{5}$$

– pentru $R > z_0$:

$$u(l, t) = U_0 + \frac{4U_0}{\frac{R}{z_0} - 1} a^{\frac{t+\tau}{2\tau}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos\left(\frac{t}{\tau}\nu\pi + \alpha\nu\right)}{\sqrt{\ln^2 a + (2\nu\pi)^2}} + \frac{1}{\ln a} \right\};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_\nu = -\frac{2\nu\pi}{\ln a}.$$

Termenul al doilea din relația (5) reprezintă componenta tranzitorie a tensiunii și va fi folosit în continuare și la calculul supratensiunilor la conectarea unei tensiuni alternative la linie.

Tensiunea la începutul liniei poate atinge de asemenea valori mai mari decît U_0. Pentru a determina această tensiune se înlocuiește în (2) $x=0$ și se obține după o dezvoltare în serie

$$U(0, p) = \frac{U_0(p)}{1 + R/z_0} \{1 - (a-1)(e^{-2\gamma l} - a e^{-4\gamma l} + a^2 e^{-6\gamma l} \ldots)\},$$

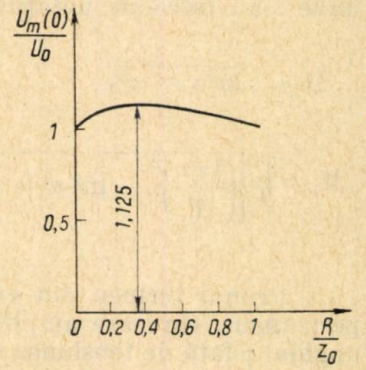


Fig. 5. — Valoarea supratensiunii la începutul liniei în funcție de rezistența R.

care produce o supratensiune numai dacă $0 < a < 1$, adică $0 < R < z_0$. Valoarea supratensiunii este reprezentată în funcție de valoarea rezistenței în figura 5. Supratensiunea maximă apare la $R/z_0 = 1/3$ și este egală cu 1,125 U_0.

b) CONECTAREA LINIEI LA O TENSIUNE ALTERNATIVĂ

Pentru determinarea tensiunii se pornește de asemenea de la relația (3), care poate fi scrisă pentru rezolvare tot sub forma (4), cu precizarea că în acest caz $U_0(p)$ este transformata Laplace a tensiunii alternative. Admițînd că se conectează în momentul cel mai dezavantajos, adică atunci cînd tensiunea este maximă, se obține

$$U_0(p) = \frac{U_0 p}{p^2 + \omega^2}.$$

Tensiunea totală la sfîrşitul liniei se obţine, ca şi mai înainte, prin însumarea undelor, care de data aceasta sînt cosinusoidale şi sosesc la τ, 3τ, 5τ ... Prima supratensiune apare la $t = \tau$ şi se calculează analog ca la conectarea tensiunii constante. S-ar putea însă să apară supratensiuni mai mari decît prima la $t > \tau$, dar valoarea lor poate fi determinată numai grafic, însumînd pe rînd undele care sosesc la capătul liniei. Pentru a obţine analitic valoarea supratensiunii maxime, se foloseşte pentru găsirea funcţiei originale din (3) teorema dezvoltării. Calculele sînt similare cu cele prezentate în anexă şi conduc în cazul $R < z_0$, care interesează la

$$u(l,t) = \frac{U_0 \cos\varphi}{\cos\omega\tau}\cos(\omega t-\varphi) - \frac{4U_0 a}{1-R/z_0}\,\frac{t+\tau}{2\tau}\left\{\frac{M}{M_1}\sin\left(\frac{t}{2\tau}\pi-\alpha_1+\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{M}\sin\left(\frac{t}{2\tau}\pi-\alpha\right)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu \sin\left\{\frac{t}{2\tau}(2\nu+1)\pi+\alpha_\nu\right\}}{\sqrt{\ln^2 a+(2\nu+1)^2\pi^2}}\right\}, \quad (6)$$

unde s-au introdus notaţiile

$$M=\sqrt{\ln^2 a+\pi^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\pi}{\ln a},$$

$$M_1=\sqrt{\left\{\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right)^2+\ln^2 a-\pi^2\right\}^2+(2\pi\ln a)^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{2\pi\ln a}{\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right)^2+\ln^2 a-\pi^2}.$$

Primul termen din expresia (6) dă valoarea tensiunii din regimul permanent, care are amplitudinea $U_0 \cos\varphi/\cos\omega\tau$ şi este defazată cu unghiul φ faţă de tensiunea aplicată liniei. Unghiul de defazare φ se calculează din

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{z_0}\operatorname{tg}\omega\tau.$$

Amplitudinea tensiunii este reprezentată, în funcţie de valoarea rezistenţei, în figura 6 pentru linii de diferite lungimi. Ultimul termen din (6), care conţine suma, este identic cu componenta tranzitorie de la cazul conectării unei tensiuni constante, calculată în relaţia (5) şi reprezentată în figura 3. La linii relativ scurte, unde se poate admite că $\tau << T$, se obţine $M_1 \simeq \ln^2 a + \pi^2$, $\alpha_1 = 2\alpha$ şi ceilalţi doi termeni din paranteză se reduc. Pentru o prezentare mai clară a modului în care se obţine tensiunea rezultantă la sfîrşitul liniei s-au reprezentat în figura 7, pentru o linie de 1 000 km cu $R/z_0 = 0{,}5$, diferiţii termeni din expresia (6). S-a ales pentru ilustrare această lungime deoarece conduce la supratensiuni

mai mari. Se observă că prima supratensiune rezultă de aproximativ 1,33 U_0, adică egală cu valoarea primei supratensiuni calculate din (4) și egală cu $2U_0/(1+R/z_0)$. După timpul corespunzător unghiului de $(\pi+\varphi)$

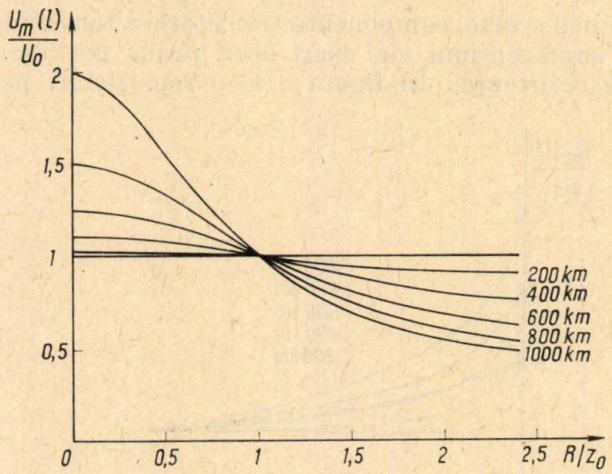


Fig. 6. — Tensiunea la sfîrșitul liniei în regim permanent cu rezistența R în serie.

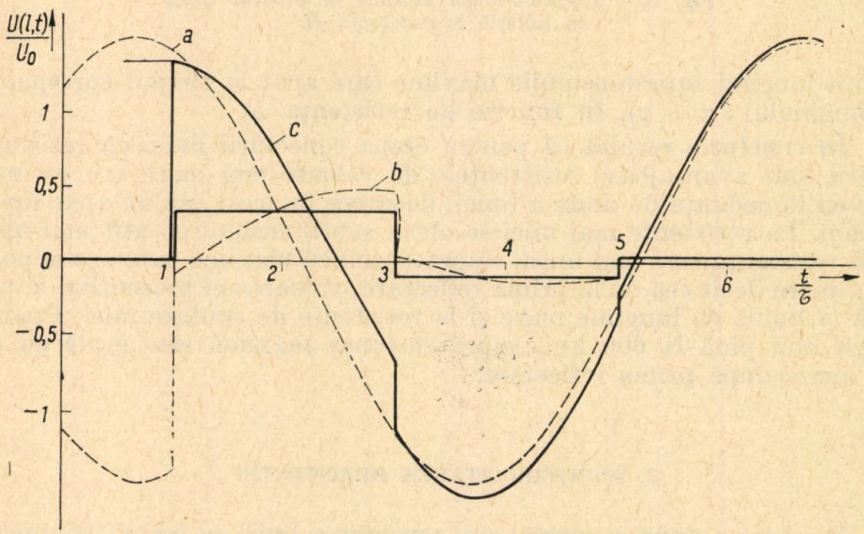


Fig. 7. — Variația în timp a tensiunii la sfîrșitul unei linii de 1 000 km la conectarea printr-o rezistență de 0,5 z_0 la o tensiune alternativă : curba a — componenta permanentă a tensiunii ; curba b — componenta tranzitorie a tensiunii ; curba c — tensiunea totală.

de aproximativ 3,65 τ apare însă o supratensiune mai mare, egală cu 1,6 U_0. Valoarea acestei tensiuni poate fi calculată, neglijînd termenii care conțin M și M_1 ce se atenuează, din expresia

$$u_m^*(l) = U_0\,(1 + a^2).$$

Se observă că această supratensiune este cu atît mai mare, cu cît este mai mare a, adică este mai mică rezistența R. În cazul cînd se conectează linia direct, fără înserierea rezistenței, supratensiunea maximă rezultă egală cu dublul tensiunii din regimul permanent.

La liniile mai scurte, componenta tranzitorie a tensiunii se atenuează mai repede și supratensiuni mai mari decît prima pot apărea numai la valori mici ale rezistenței. În figura 8 s-au reprezentat pentru linii de

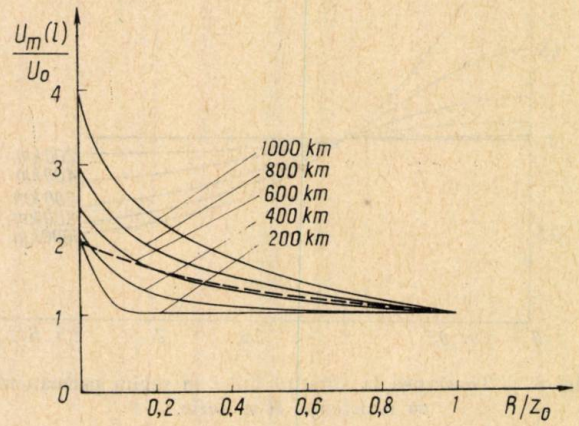


Fig. 8. — Supratensiunea maximă la sfîrșitul liniei în funcție de rezistența R.

diferite lungimi supratensiunile maxime care apar la timpul corespunzător unghiului $(\pi + \varphi)$, în funcție de rezistența R.

În concluzie rezultă că pentru etapa conectării liniei cu rezistența în serie sînt avantajoase rezistențele de valoare mai mare sau cel mult egale cu impedanța de undă a liniei, deoarece în acest caz nu apar supratensiuni. La rezistențe mai mici se obțin supratensiuni cu atît mai mari, cu cît rezistența este mai mică. Supratensiunea maximă care apare poate fi mai mare decît cea de la prima reflectare, valoarea ei prezentînd importanță la liniile de lungime mare și la rezistențe de șuntare mici. Practic, pentru linii pînă la 600 km, supratensiunea maximă este egală cu cea care apare după prima reflectare.

3. SCURTCIRCUITAREA REZISTENȚEI

În etapa a doua a punerii sub tensiune a liniei se închid contactele principale ale întrerupătorului prin care se șuntează rezistența R (fig. 1). Pentru a putea calcula analitic relativ simplu variația în timp a tensiunii, se presupune că timpul cît a fost închis contactul *1* a fost suficient pentru amortizarea fenomenului tranzitoriu și în circuit s-a stabilit regimul permanent. Simplificarea admisă este confirmată de datele din literatură [1], [4], [6] referitoare la valoarea timpului după care se închid contactele *2*. În medie rezultă un timp de (8—20) ms, care este suficient pentru a ajunge la regimul permanent, deoarece prezența rezistenței duce la amor-

tizarea mai rapidă a fenomenului tranzitoriu. Pentru a obține supratensiunile maxime se consideră că rezistența este scurtcircuitată în momentul cel mai dezavantajos, adică atunci cînd tensiunea este maximă pe ea, deci curentul pe linie trece prin maxim.

Tensiunea și curentul din regimul permanent cu rezistența R în serie se obțin din ecuațiile (1), scrise în complex. Rezultă

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_0 \cos \omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right)}{\cos \omega\tau + \mathrm{j}\frac{R}{z_0}\sin \omega\tau},$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_0 \,\mathrm{j} \sin \omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right)}{z_0\left(\cos \omega\tau + \mathrm{j}\frac{R}{z_0}\sin \omega\tau\right)},$$

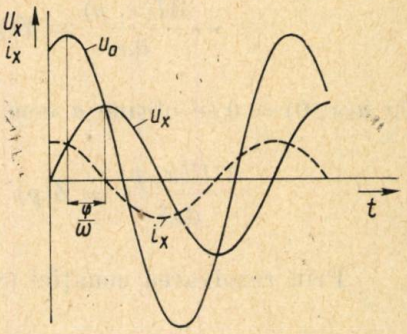


Fig. 9.—Tensiunea și curentul pe linie în regim permanent cu rezistență în serie.

de unde se obțin, dacă se consideră tensiunea aplicată cu faza inițială φ, adică $u_0 = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, valorile momentane

$$u(x, t) = \frac{U_0 \cos \varphi}{\cos \omega\,\tau} \cos \omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right) \sin \omega t,$$

$$i(x, t) = \frac{U_0 \cos \varphi}{z_0 \cos \omega\tau} \cos \omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

în care s-a notat cu φ unghiul de defazaj dintre tensiunea aplicată liniei u_0 și tensiunea pe linie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{z_0} \operatorname{tg} \omega\,\tau.$$

Contactul *2* se închide în momentul în care curentul pe linie $i(x, 0)$ trece prin maxim, adică la timpul $t = 0$ (fig. 9). Curentul are în acest moment valoarea

$$i(x, 0) = \frac{U_0 \cos \varphi}{z_0 \cos \omega\,\tau} \sin \omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right), \tag{7}$$

iar

$$u\,(x, 0) = 0.$$

În continuare se calculează tensiunile și curenții pe linie după scurtcircuitarea rezistenței R. Se pornește de asemenea de la ecuațiile

telegrafiştilor, scrise operaţional pentru condiţii iniţiale nenule:

$$-\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}x} = Z(p)\ I(x,p) - L\,i(x,0),$$

$$-\frac{\mathrm{d}I(x,p)}{\mathrm{d}x} = Y(p)\ U(x,p) - C\,u(x,0).$$

Cu $u(x,0) = 0$ se obţine a ecuaţii pentru tensiune de forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = Z(p)\ Y(p)\ U(x,p) + L\frac{\mathrm{d}i(x,0)}{\mathrm{d}x}. \tag{8}$$

Prin rezolvarea ecuaţiei (8) la condiţiile de limită

$$U(0,p) = U_0(p),$$

$$I(l,p) = 0,$$

se obţine

$$U(x,p) = \frac{U_0\cos\varphi}{\cos\omega\tau}\left\{\frac{\cos\omega\left(\tau - \frac{x}{v_0}\right)}{\omega^2+p^2} + \frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\omega\tau\cdot\frac{\operatorname{ch}\gamma(l-x)}{\operatorname{ch}\gamma l}\cdot\frac{R}{z_0}\right\}.$$

Tensiunea obţine valoarea maximă la sfîrşitul liniei:

$$U(l,p) = \frac{U_0\cos\varphi}{\cos\omega\tau}\left\{\frac{\omega}{\omega^2+p^2} + \frac{p}{\omega^2+p^2}\cdot\frac{R}{z_0}\cdot\frac{\sin\omega\tau}{\operatorname{ch}\gamma l}\right\}. \tag{9}$$

Din relaţia (9) se determină valoarea primei supratensiuni, care apare la prima reflectare, adică la $t = \tau$. Primul termen din paranteză este transformata Laplace a lui $\sin\omega t$, iar la al doilea termen se poate dezvolta $1/\operatorname{ch}\gamma l$ în serie şi la $t = \tau$ dă unda sosită de valoare $(2R/z_0)$ $\sin\omega\tau$, deci rezultă prima supratensiune:

$$u_m(l,\tau) = \frac{U_0\cos\varphi}{\cos\omega\tau}\left(\sin\omega\tau + \frac{2R}{z_0}\sin\omega\tau\right) = U_0\cos\varphi\ \operatorname{tg}\omega\tau\left(1+\frac{2R}{z_0}\right). \tag{10}$$

Valorile acestei supratensiuni sînt calculate în funcţie de rezistenţa R pentru linii de diferite lungimi şi curbele rezultate sînt reprezentate în figura 10. Se observă că supratensiunile sînt cu atît mai mici, cu cît este mai mică rezistenţa R, adică cu cît modificarea în circuit prin scurtcircuitarea rezistenţei este mai mică.

Supratensiunea maximă care poate să apară este mai mare decît prima supratensiune. Pentru a determina valoarea ei s-a calculat funcția de timp corespunzătoare relației (9). Pentru liniile de lungime mai mică

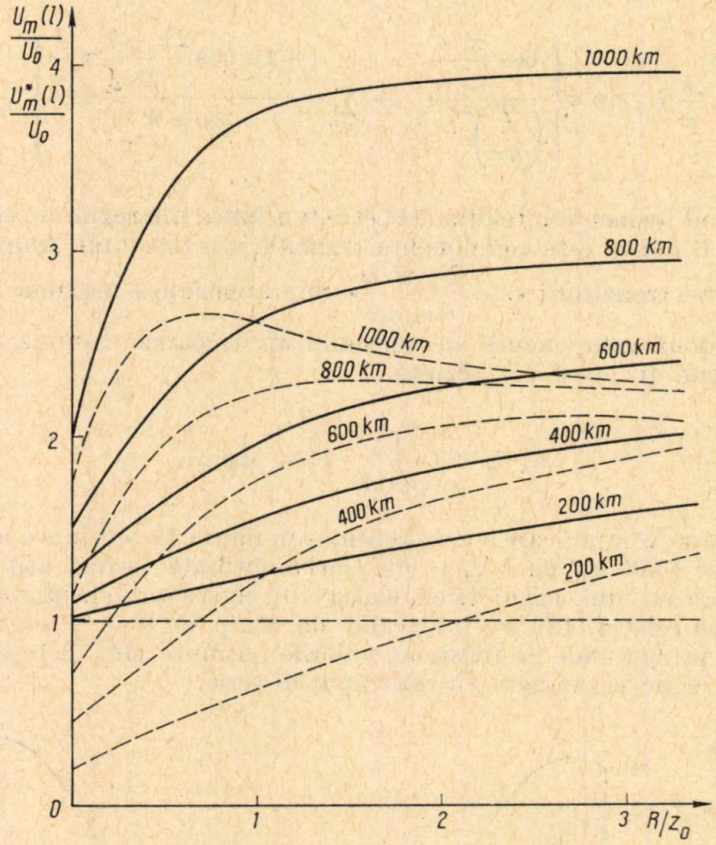


Fig. 10. — Valorile supratensiunilor la sfîrșitul liniei după scurt-circuitarea rezistenței R: ·····prima supratensiune după prima reflectare a undei de tensiune ($t = \tau$); ——supratensiunea maximă.

decît 1 000 km, funcției

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma l}$$

îi corespunde funcția de timp

$$\frac{\cos \omega t}{\cos \omega \tau} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau}}{\left(\frac{T}{4\tau}\right)^2 - 1} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos \frac{2\nu + 1}{2} \pi \frac{t}{\tau}}{2\nu + 1}.$$

Cu aceste precizări se obține

$$u(l, t) = \frac{U_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\cos \omega\tau} -$$

$$- \frac{4}{\pi} U_0 \sin\varphi \left\{ \frac{\cos \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau}}{\left(\frac{T}{4\tau}\right)^2 - 1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos \frac{2\nu+1}{2} \pi \frac{t}{\tau}}{2\nu + 1} \right\}. \tag{11}$$

Primul termen din relația (11) este tensiunea din regimul permanent, iar cel de-al doilea este componenta tranzitorie a tensiunii. Amplitudinea componentei tranzitorii este $\frac{U_0 \sin\varphi}{\cos \omega\tau}$. Supratensiunea maximă se obține cînd cele două componente ale tensiunii au valoarea maximă și sînt de același semn. În acest caz rezultă

$$u_m^*(l) = \frac{U_0}{\cos \omega\tau} (1 + \sin\varphi). \tag{12}$$

Pentru exemplificare s-a reprezentat în figura 11 tensiunea la sfîrșitul unei linii de 1 000 km cu $R/z_0 = 0{,}5$. Curba obținută verifică atît valoarea primei supratensiuni, calculată cu relația (10), cît și supratensiunea maximă, obținută cu relația (12). Pe intervalul de timp de $0 - \tau$, adică înainte de sosirea primei unde de tensiune, valorile obținute sînt identice cu tensiunea de regim permanent cu rezistența în serie.

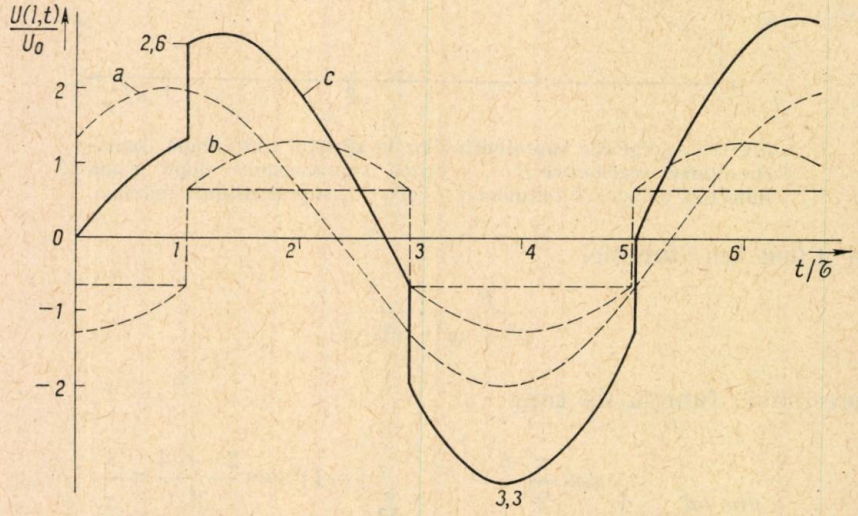


Fig. 11. — Variația în timp a tensiunii la sfîrșitul unei linii de 1000 km la scurt-circuitarea rezistenței de $0{,}5\, z_0$: curba a — componenta permanentă a tensiunii; curba b — componenta tranzitorie a tensiunii; curba c — tensiunea totală.

Valorile supratensiunilor maxime sînt calculate pentru diferite lungimi de linie și reprezentate de asemenea în figura 10.

4. VALOAREA OPTIMĂ A REZISTENȚEI

Din forma curbelor reprezentate în figura 8 și 10 se constată că valoarea supratensiunilor depinde mult de rezistența de șuntare folosită. Supratensiunile în prima etapă a conectării sînt mai mici dacă rezistența este mai mare, în schimb în etapa a doua sînt mai mici la valori mai mici ale rezistenței. Supratensiunile minime se obțin la intersecția curbelor rezultate la închiderea contactului *1* cu cele de la închiderea contactului *2* (fig. 12). Punctele de intersecție determină valoarea optimă a rezistenței. În figura 13 s-a reprezentat această rezistență în funcție de lungimea liniei. Se observă că, cu cît linia este mai lungă, valoarea optimă a rezistenței este mai mică. În figura 14 este reprezentată supratensiunea care rezultă la conectarea liniei cu rezistență de șuntare optimă (curba *a*). Pentru comparație s-a reprezentat în aceeași figură și supratensiunea maximă care s-ar obține la punerea sub tensiune a liniei fără rezistență (curba *b*). Se constată că prezența rezistenței duce la micșorarea considerabilă a supratensiunilor. Astfel, de exemplu, la conectarea unei linii de 500 km fără rezistență, vîrful de supratensiune este de 2,3 U_0, iar la folosirea rezistenței optime de 0,42 z_0 ea scade la numai 1,52 U_0.

Valorile determinate pentru rezistența optimă nu coincid cu cele care ar rezulta din condiția ca supratensiunea care apare la prima reflectare a undelor de tensiune să fie minime. Acest mod de determinare este la prima vedere mai simplu, deoarece valoarea acestor supratensiuni se determină mult mai ușor. În figura 13 este reprezentată comparativ și valoarea rezistenței determinată din condiția ca prima supratensiune să fie minimă. La aceeași lungime a liniei, valoarea rezistenței obținută din această condiție este mai mare decît cea care rezultă din egalitatea supratensiunilor maxime. În acest caz apar însă vîrfuri de supratensiune maximă mai mari. La linii cu lungimi pînă la aproximativ 800 km este mai mare supratensiunea la închiderea contactului *2*, adică la șuntarea rezistenței, iar la liniile mai lungi este mai mare supratensiunea la închiderea contactului *1*. Supratensiunea maximă la liniile pînă la 800 km nu este însă cu mult mai mare, în medie numai cu 10%, ea poate deveni însă mare la linii de lungime mai mare.

În realitate, valoarea optimă a rezistenței depinde de puterea sursei, respectiv de impedanța sistemului la care se conectează linia. În prima etapă a conectării, cînd rezistența este în serie cu linia, se poate neglija inductivitatea sistemului, însă ea trebuie considerată în etapa a doua, cînd se scurtcircuitează. În lucrarea de față nu s-a analizat această problemă, ea constituind obiectul unei alte lucrări. Din calculele efectuate a rezultat însă o valoare mai mică pentru rezistența optimă.

Valorile obținute pentru rezistența de șuntare optimă vor putea fi folosite și la liniile trifazate, deoarece în [3] se arată că la măsurători experimentale s-au obținut practic aceleași valori atît la liniile monofazate cît și la cele trifazate. Calculele numerice prezentate în [7] arată de ase-

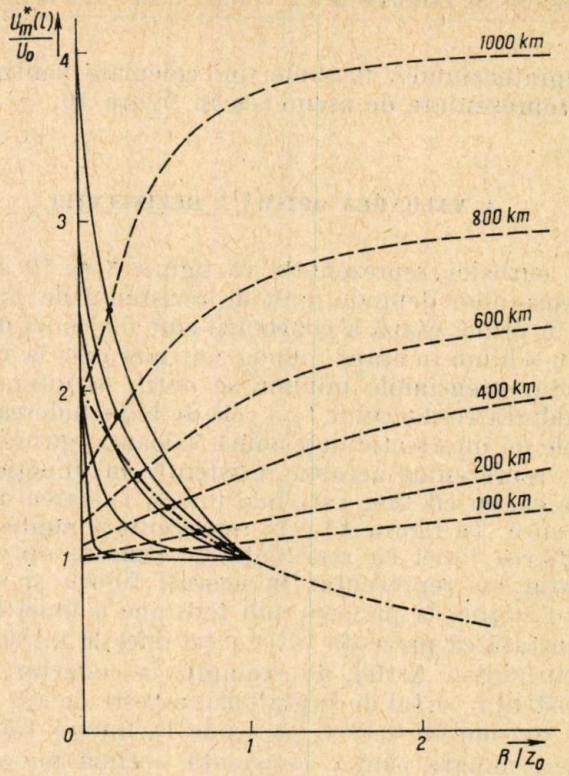


Fig. 12. — Supratensiunile maxime în cele două faze ale conectării.

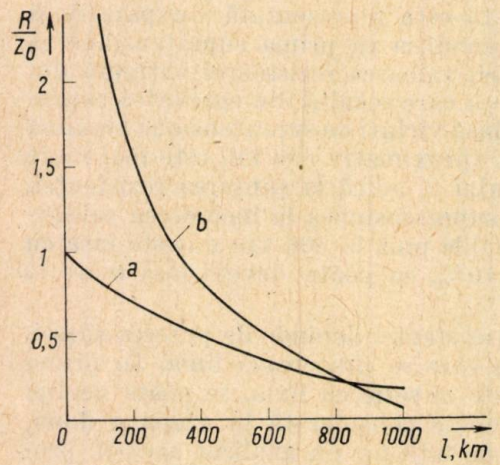


Fig. 13. — Valoarea optimă a rezistenței : curba *a* — valoarea optimă ce rezultă din egalitatea supratensiunilor maxime din cele două faze de conectare ; curba *b* — valoarea ce rezultă din egalitatea supratensiunilor după prima reflectare.

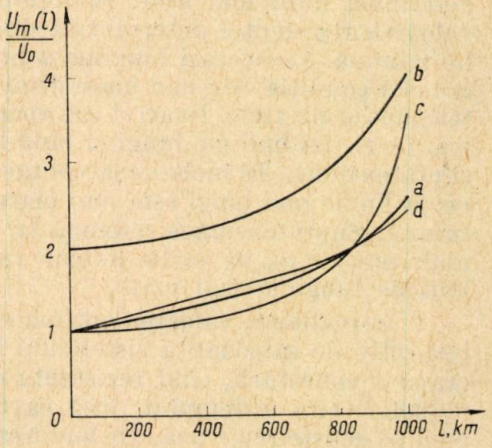


Fig. 14. — Valoarea supratensiunilor în funcție de lungimea liniei : curba *a* — la valoarea optimă a rezistenței ; curba *b* — la $R = 0$; curba *c* — în prima fază a conectării cu rezistența aleasă în funcție de prima supratensiune ; curba *d* — în a doua fază a conectării cu rezistența aleasă în funcție de prima supratensiune.

menea că supratensiunile care apar la punerea sub tensiune rezultă minime în cazul cînd se folosește o rezistență de șuntare egală cu valoarea determinată după metoda prezentată în această lucrare.

5. CONCLUZII

Punerea sub tensiune și reanclanșarea liniilor de transport duce la apariția unor supratensiuni foarte mari. Valoarea acestor supratensiuni poate fi mult micșorată prin folosirea unei conectări în două trepte cu o rezistență de șuntare. Valoarea optimă a acestei rezistențe se determină din condiția ca supratensiunile maxime care apar în cele două etape ale conectării, prima în care se conectează linia cu rezistența în serie, iar a doua cînd se scurtcircuitează rezistența, să fie identice. Valoarea obținută pentru rezistență depinde de lungimea liniei, dar este întotdeauna mai mică decît impedanța de undă. Supratensiunile care se obțin la acest mod de conectare sînt mult mai mici decît la punerea directă sub tensiune. Dacă se alege rezistența din condiția ca prima supratensiune să fie minimă, adică ceea ce apare la prima reflectare a undei de tensiune, supratensiunile maxime vor rezulta mai mari.

ANEXĂ

CALCULUL TENSIUNII LA SFÎRȘITUL LINIEI DUPĂ ÎNCHIDEREA CONTACTULUI *1* CU TEOREMA DEZVOLTĂRII

Se pornește de la relația (3), obținută pentru tensiunea la sfîrșitul liniei. Tensiunea aplicată fiind constantă, rezultă

$$U_0(p) = \frac{U_0}{p}.$$

Constanta de propagare pentru linie este $\gamma = p\sqrt{LC} = \frac{p}{v_0}$,

iar $\gamma l = p\tau$. Cu aceasta, relația (3) obține forma

$$U(l, p) = \frac{U_0}{p\left(\operatorname{ch} p\tau + \frac{R}{z_0}\operatorname{sh} p\tau\right)} = \frac{U(p)}{pV(p)}.$$

Valoarea momentană a tensiunii se calculează cu teorema dezvoltării

$$u(l, t) = \frac{U(0)}{V(0)} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{U(p_\nu)}{p_\nu V'(p_\nu)} e^{p_\nu t},$$

unde p_ν reprezintă rădăcinile numitorului $V(p) = \operatorname{ch} p\tau + \frac{R}{z_0} \operatorname{sh} p\tau$, care au valorile următoare :

— pentru $R < z_0$:

$$p_\nu = \frac{1}{2\tau} \{\ln a + \mathrm{j}\,(2k+1)\,\pi\}, \qquad a = \frac{z_0 - R}{z_0 + R};$$

— pentru $R > z_0$:

$$p_\nu = \frac{1}{2\tau} \{\ln a + \mathrm{j}\,2k\pi\} \quad , \qquad a = \frac{R - z_0}{R + z_0}.$$

Înlocuind valorile obținute în relația de mai sus se obțin expresiile (5) pentru tensiunea de la sfîrșitul liniei.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Althammer, R. Petitpierre, *Schaltvorgänge und Schaltüberspannungen in Höchstspannungsnetzen*, (B. B. Mitteilungen, **51**, *1/2*, 33—46 (1964).
2. H. Böcker, H. Neu, *Ein Verfahren zum Berechnen von Schaltvorgängen an einer Drehstromleitung*, ETZ-A, **87**, *1*, 25—27, (1966).
3. D. E. Hedman, B. I. Johnson, C. H. Titus, D. D. Wilson, *Switching of Extra-High-Voltage Circuits. Surge Reduction with Circuit-Breaker Resistors*, IEEE Trans., PAS, **83**, 12, 1196—1205 (1964).
4. J. Jirku, *Das Problem der Schaltüberspannungen auf langen Hochspannungsleitungen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, **15**, *3*, 589—597 (1966).
5. M. I. Kontorovici, *Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice*, București, Edit. energetică de stat, 1955.
6. G. Catenacci, A. Clerici, A. Colombo, R. Manara, *Evaluation of overhead line switching surge based on several T.N.A. studies*, Symposium on Switching Surges in High Voltage Systems, Varșovia, 1967.
7. E. Wagner, *Contribuții la calculul supratensiunilor de comutație la linii aeriene trifazate*, St. cerc. energ. electr. **19**, *2*, 377—391 (1969).

METODA TRANSFORMATEI INTEGRALE ÎN SINTEZA RADIATOARELOR FILIARE RECTILINII

DE

EDMOND NICOLAU

621.396.671.001.11 : 517.9

Scopul articolului este de a demonstra posibilitatea utilizării transformatei Fourier pentru a sintetiza un radiator rectiliniu filiar cu o caracteristică de radiaţie plană dată.

1. În legătură cu sistemele se pot pune două clase de probleme : de analiză şi de sinteză. În primul caz, cunoscînd sistemul ca structură şi relaţii între părţile componente, se cere să se determine proprietăţile sistemului. În problemele de sinteză se pune problema inversă : dîndu-se clasa căreia aparţine sistemul şi anumite proprietăţi, se cere să se determine sistemul efectiv care prezintă proprietăţile enunţate.

Dacă, în general, analiza sistemelor date se poate face cu uşurinţă, existînd tehnici binecunoscute pentru majoritatea problemelor care se pun în legătură cu sistemele liniare, în schimb problemele de sinteză sînt mai dificile prin însăşi natura lor.

În cazul sistemelor radiante, mai întîi s-au studiat problemele de analiză, deoarece în cadrul unor ipoteze simplificatoare, de exemplu admiţînd că radiatoarele sînt formate din fire subţiri, analiza sistemelor se face cu uşurinţă.

În ceea ce priveşte problemele de sinteză, la radiatoare se studiază în special determinarea sistemului care conduce la o caracteristică de directivitate dată într-un plan.

Desigur că şi pentru sistemele radiante se poate formula şi un tip de probleme de sinteză, ca şi în cazul reţelelor cu constante concentrate şi care se leagă de variaţia cu frecvenţa a impedanţei de intrare. Acest gen de preocupări prezintă o importanţă practică redusă, deoarece în cazul sistemelor radiante accentul nu se pune pe proprietăţile legate de impedanţa de intrare, ci în primul rînd pe cele în legătură cu fenomenele radiante şi în special cu caracteristica de directivitate. Desigur că la aceasta se adaugă şi relaţia dintre impedanţa de intrare şi frecvenţă pentru sistemele care satisfac condiţia privind caracteristica de directivitate şi care lucrează

într-o bandă largă de frecvenţe. Această problemă nu este însă studiată de noi.

2. Problema sintezei radiatoarelor filiare rectilinii a fost abordată de Ramm (1937) în legătură cu antenele antifeding. La Paz şi Miller (1943) au pus problema determinării distribuţiei de curent care corespunde unui radiator optim. Bouwkamp şi de Bruijn (1947) au arătat că formularea lui La Paz şi Miller este defectuoasă.

Un progres esenţial în ceea ce priveşte sinteza antenelor rectilinii filare s-a realizat în momentul în care s-a observat că, la această clasă de elemente radiante, între distribuţia de curent $\underline{I}(x)$ din conductor şi caracteristica de directivitate $f(\theta)$ subzistă o relaţie de transformare integrală.

3. Este evident faptul că între $\underline{I}(x)$ şi $f(\theta)$ există o relaţie integrală. Într-adevăr,

$$f(\theta) = a\int_{-l}^{l} \underline{I}(x)\ \exp\ (-\mathrm{j}kx\cos\theta)\ \sin\ \theta\,\mathrm{d}x.$$

În această relaţie se dă funcţia $f(\theta)$ şi se cere funcţia necunoscută $\underline{I}(x)$. Deoarece funcţia $\underline{I}(x)$ apare sub semnul integrală, rezultă că sinteza radiatorului rectiliniu ne-a condus la o ecuaţie integrală de tip Fredholm de speţa întîi, de nucleu

$$K(\theta, x) = \exp\ (-\mathrm{j}kx\cos\ \theta)\ \sin\ \theta.$$

Una dintre metodele cunoscute de integrare constă în dezvoltarea în serie a nucleului, aşa cum ne arată Ţlaf (1966.)

În cazul de faţă se poate utiliza dezvoltarea exponenţialei care apare în nucleu sub forma unei serii de funcţii Bessel:

$$\exp\ (-\mathrm{j}kx\cos\ \theta) = J_0\ (kx) + 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^n J_{2n}\ (kx)\cos\ 2\ n\theta -$$

$$-\ 2j\sum_{1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(kx)\cos\ (2\ n+1)\ \theta,$$

astfel încît se obţine

$$\int_{-l}^{l}\underline{I}(x)\ \Sigma d_n J_n(kx)\cos n\ \theta\sin\ \theta\ \mathrm{d}x = \Sigma\ a_n\cos\ n\theta + \Sigma\ b_n\sin n\theta,$$

unde d_n sînt constante, iar a_n şi b_n coeficienţii seriei Fourier ai funcţiei $f(\theta)$.

Sîntem conduşi la un alt sistem infinit de ecuaţii integrale de tipul

$$\int_{-l}^{l}\underline{I}(x)\ J_p\ (kx)\mathrm{d}x = e_p\,,$$

unde e_p sînt numere date. Se poate merge mai departe pe aceeaşi linie, dezvoltînd funcţia necunoscută $\underline{I}(x)$ într-o serie şi integrînd termen cu termen.

Putem aproxima pe $\underline{I}(x)$ printr-o serie de puteri :

$$\underline{I}(x) = \sum h_m x^m, \qquad |x| \leqslant 1, \tag{2}$$

și luăm

$$I(x) = 0, \qquad |x| > 1.$$

De asemenea se poate utiliza o dezvoltare în serie de funcții Bessel :

$$I(x) = \sum g_m J_m(kx), \qquad |x| \leqslant 1, \tag{3}$$

cu

$$I(x) = 0, \qquad |x| > 1.$$

În plus, ținem seama de identitatea (Rîjkin și Gradștein, 1941, p. 260)

$$J_p(\alpha, t)\ J_q(\alpha, t) t^{-s} \mathrm{d}t = \frac{\alpha^{s-1}\Gamma(s)\ \Gamma(u)}{2^s \Gamma(v)\ \Gamma(w)\ \Gamma(r)}, \tag{4}$$

unde

$$2u = p + q - s + 1 \quad , \quad 2v = -p + q + s + 1,$$
$$2w = p + q + s + 1 \quad , \quad 2r = p - q + s + 1,$$

admițînd că în același timp sînt satisfăcute condițiile

$$\mathrm{Re}(p + q + 1) > \mathrm{Re}(s) > 0 \quad , \quad \alpha > 0.$$

Din (1) și (2) sau din (1), (2) și (4) se deduce un sistem infinit de ecuații algebrice, care permit determinarea coeficienților g_n sau h_n. Metoda este însă greoaie.

Problema sintezei radiatorului rectiliniu a căpătat o soluție deosebit de elegantă prin utilizarea transformărilor integrale.

Fie un radiator rectiliniu la care distribuția de curent este $I(z)$; caracteristica sa de directivitate este

$$f_1(\theta) = A \sin \theta \int_{-l}^{l} I_1(z) \exp(\mathrm{j}kz \cos \theta)\, \mathrm{d}z,$$

care poate fi scrisă

$$F(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{Ak \sin \theta} = \int_{-l}^{l} I_1(z) \exp(\mathrm{j}kz \cos \theta)\, \mathrm{d}(kz).$$

Introducem schimbarea de variabilă

$$u = \cos \theta,$$

ceea ce permite a trece de la $F(\theta)$ la $f(u)$, $u \in [-1, 1]$.

Putem scrie

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(x) (\mathrm{j}ux)\, \mathrm{d}x,$$

unde

$$x = kz, \qquad \sigma = kl.$$

Problema constă în determinarea funcției necunoscute $I(x)$ atunci cînd se dă $f(u)$.

Deoarece funcția necunoscută apare sub semnul integrală, problema de sinteză constă în rezolvarea unei ecuații integrale.

După cum se știe, ecuațiile integrale nu admit soluții oricare ar fi membrul stîng, în cazul de față $f(u)$. De aceea este necesar a analiza în primul rînd condițiile de rezolvare a acestei ecuații, ceea ce corespunde determinării clasei de caracteristici realizabile.

Din condiția de finitudine a curentului în conductor rezultă

$$| \underline{I}(x) | < \infty,$$

$$\left| \int_G \underline{I}(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_G | \underline{I}(x) |\, \mathrm{d}x \leqslant M_1\, \mu(G),$$

unde

$$M_1 = \max I(x), \quad x \in G$$

iar $\mu(G)$ este măsura lui G, adică lungimea antenei.

În concluzie

$$\int_G | \underline{I}(x) |\, \mathrm{d}x < \infty,$$

deci $\underline{I}(x)$ aparține clasei funcțiilor absolut integrabile pe G.

Din această concluzie putem deduce unele proprietăți pentru caracteristica de directivitate. În acest scop plecăm de la relația

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(x) \exp(\mathrm{j}ux)\, \mathrm{d}x$$

și dezvoltăm funcția $\exp(\mathrm{j}ux)$ în serie Taylor. Se obține

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(x) \sum_0^{\infty} \frac{(\mathrm{j}u)^n}{n!}\, x^n\, \mathrm{d}x \triangleq \sum_0^{\infty} \frac{u^n}{n!}\, b_n \tag{1}$$

unde

$$b_n \triangleq \mathrm{j}^n \int_{\sigma}^{\sigma} I(x)\, x^n\, \mathrm{d}x.$$

Pentru coeficienții b_x se poate obține o expresie majorată :

$$| b_n | = \left| \int_{-\sigma}^{\sigma} I(x)\, x^n \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{-\sigma}^{\sigma} | I(x) |\, | x |^n \mathrm{d}x.$$

Conform celei de-a doua teoreme a mediei, avem

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |I(x)|\,|x|^n\,dx = |\xi|^n \int_{-\sigma}^{\sigma} |I(x)|\,dx = |\xi|^n\, M,$$

unde

$$|\xi| \leqslant \sigma,$$

iar

$$M \triangleq \int_{-\sigma}^{\sigma} |I(x)|\,dx.$$

În concluzie,

$$|b_n| \leqslant M\ \sigma^n.$$

Din (1) se deduce

$$|f(u)| = \left| \sum \frac{u^n}{n!} b_n \right| \leqslant \sum_0^\infty \frac{|u|^n}{n!} |b_n| \leqslant \sum_0^\infty M \frac{|u|^n}{n!}.$$

Aceasta înseamnă că în valoare absolută funcţia $f(u)$ este majorată de valoarea absolută a funcţiei

$$g(u) = M\ \exp\ (\sigma\,|u|\,).$$

Această funcţie este convergentă, avînd o rază de convergenţă infinită. Rezultă că şi funcţia $f(u)$ este convergentă, avînd o rază de convergenţă infinită.

Se poate scrie deci

$$|f(u)| \leqslant M\ \exp\ (\sigma|u|).$$

Înmulţind ambii membri cu $\exp\ (-\sigma|u|)$, rezultă

$$|f(u)|\ \exp\ (-\sigma\,|u|) \leqslant M.$$

Funcţia

$$g(u) = |f(u)|\ \exp\ (-\sigma|u|)$$

este deci mărginită în tot planul complex şi este analitică în orice domeniu mărginit al variabilei complexe u. În conformitate cu teorema lui Liouville, $g(u)$ este o constantă:

$$|f(u)|\ \exp\ (-\sigma\,|u|) = C$$

sau

$$|f(u)| = C\ \exp\ (\sigma\,|u|),$$

adică

$$f(u) = C\ \exp\,(\mathrm{j}\,\alpha + \sigma|u|).$$

4. Se numeşte funcţie întreagă o funcţie analitică fără singularităţi în partea finită a planului complex (adică la distanţă finită).

O funcţie întreagă se numeşte de ordin finit dacă există un număr pozitiv A astfel, încît pentru $|z| = r \to \infty$,

$$f(z) = 0 \ (\exp r^A).$$

Limita inferioară a numerelor A care satisfac această relaţie se numeşte ordinul funcţiei.

Dacă $f(z)$ este de ordin ρ, atunci

$$0 \ (\exp r^{\rho-\varepsilon}) \leqslant f(r) \leqslant 0 \ (\exp r^{\rho+\varepsilon}),$$

unde ε este un număr pozitiv arbitrar; în general 0 poate depinde de ε (Titchmarsh, 1961, p. 282).

Se calculează

$$\rho = \overline{\lim_r} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \quad (0 \leqslant \rho \leqslant +\infty),$$

unde

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

(M. Djrbaşian, 1966, p. 315).

În cazul nostru

$$f(u) = C \exp \mathrm{j}\,\alpha \exp \sigma |u|,$$

$$\ln f(u) = \ln C + \mathrm{j}\,\alpha + \sigma |u|,$$

$$\ln \ln f(u) = \ln \sigma + \ln |u|, \ r \to \infty,$$

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln f(u)}{\ln r} = 1.$$

Prin tipul sau indicatorul funcţiei întregi $f(z)$ de ordin $\rho(0<\rho<+\infty)$ se înţelege numărul

$$h_f(\varphi) \triangleq \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r} \ (0 \leqslant h_f < +\infty).$$

În cazul studiat, tipul funcţiei întregi întîlnite este chiar σ:

$$h_f = \sigma.$$

5. Pentru a studia rezolvabilitatea ecuaţiei integrale fundamentale a problemei la radiatorul rectiliniu, este necesar a utiliza teorema Wiener-Paley.

TEOREMĂ. Mulţimea funcţiilor care în întreg planul admit reprezentarea

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) \exp (\mathrm{j}vz)\, \mathrm{d}v,$$

unde $\varphi(v) \in L_2(-\infty, \infty)$ coincide cu clasa W_σ a funcțiilor întregi de ordin 1 și de tip $\leqslant \sigma$ care satisfac condiția

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

(Djrbașian, 1966, p. 314).

În ceea ce privește caracteristica de directivitate, ea este de pătrat sumabil și aparține clasei W_σ, deoarece are rangul $\rho = 1$ și tipul σ.

Teorema Wiener-Paley permite să se deducă în ce condiții ecuația integrală

$$f(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} I(x) \exp(jux) \, dx \tag{5}$$

admite soluții.

Pentru a putea avea această reprezentare a funcției $f(u)$, este necesar și suficient ca $f(u)$ să satisfacă condițiile enumerate anterior.

Referitor la caracteristica $f(u)$ știm că $f(u) \in W_\sigma$; de asemenea $I(x) = 0$ pentru $|x| > 1$.

Fie $h(x)$ o funcție continuă, determinată pe axa reală $(-\infty, \infty)$ și nulă în intervalele $(-\infty, -\pi - \varepsilon)$ și $(\pi + \varepsilon, \infty)$. Fie

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp(-jux) \, dx.$$

Atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \, du < \infty.$$

Demonstrația poate fi urmată în Wiener (1963, p. 107).

În cazul care ne interesează, rolul lui $h(x)$ îl joacă $I(x)$, iar al lui $g(u)$ tocmai $f(u)$.

Această lemă ne garantează că

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \, du < \infty.$$

Aceasta nu este însă suficient.

Înainte de a trece mai departe, amintim că, dacă șirul de funcții $\{f_n(n)\}$ converge în medie către $f(x)$, spunem că $f(x)$ este limita, în medie, a funcțiilor $f_n(x)$ pentru $[a, b]$ și scriem

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, dx \to 0$$

sau

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \, f_n(x).$$

Vom utiliza de asemenea următoarea

TEOREMĂ (Plancherel). Dacă funcţia $f(x)$ aparţine clasei L_2 în intervalul $(-\infty, \infty)$, atunci funcţia

$$g(x)=\text{l.i.m}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-\mathrm{j}xy)\mathrm{d}y$$

se numeşte transformata Fourier a funcţiei (x), care există şi aparţine clasei L_2. De asemenea

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

şi

$$f(x)=\text{l.i.m}_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} g(y)\,\exp(\mathrm{j}xy)\,\mathrm{d}y.$$

Pentru demonstraţie se poate urmări Wiener (1963, p. 93).

De-a lungul antenei, curentul $I(x)$ este finit, deci $I\in L_2$ $(-\infty, \infty)$. În cazul nostru, considerînd că $f(y)$ este curentul $I(x)$, rezultă că $g(x)$ este de fapt $f(u)$. Teorema lui Plancherel ne asigură că

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}|I(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty.$$

Condiţiile din enunţul teoremei Wiener-Paley sînt deci satisfăcute şi, în concluzie, rezultă posibilitatea de a rezolva ecuaţia integrală (5).

6. Pentru problema de sinteză urmărită, aceasta are o importanţă cu totul deosebită.

Anume se poate scrie

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} I(x)\,\exp(\mathrm{j}ux)\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

relaţia echivalentă cu (5), deoarece

$$I(x)=0,\quad |x|>\sigma.$$

Aceasta arată însă că $f(u)$ este transformată Fourier a curentului $I(x)$:

$$f(u)=\mathcal{F}^{-1}\{I(x)\}$$

şi deci

$$I(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\exp(-\mathrm{j}xu)\,\mathrm{d}u, \tag{7}$$

formulă care rezolvă complet problema sintezei radiatorului liniar.

Această metodă permite şi determinarea lungimii electrice a antenei care rezolvă problema la radiatorul rectiliniu. Pentru aceasta utilizăm

noţiunea de indicator $h_t(\varphi)$ al unei funcţii $f \in W_\sigma$:

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \ln|f(r \exp j\varphi)|.$$

În cazul nostru, lungimea antenei este lungimea intervalului în care curentul $I(x)$ nu este nul. Avem

$$k2l = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

7. Pe baza rezultatelor obţinute se poate demonstra unicitatea soluţiei problemei de sinteză a unui radiator rectilinar avînd o caracteristică de directivitate dată.

Fie $f(u)$ caracteristica de sinteză şi fie $I(x)$ distribuţia de curent de pe intervalul $(-\sigma, \sigma)$ care conduce la această diagramă de directivitate.

Să admitem că ar exista două distribuţii, $I_1(x)$ şi $I_2(x)$, care conduc la aceeaşi caracteristică $f(u)$:

$$\int_G I_1(x) \exp(jux)\, dx = f(u),$$

$$\int_G I_2(x) \exp(jux)\, dx = f(u).$$

Scăzînd cele două egalităţi, se obţine

$$\int_G (I_1(x) - I_2(x)) \exp(jux)\, dx = 0.$$

Dar ambii curenţi I_1 şi I_2 sînt nuli în afara intervalului G. Completînd ambii curenţi cu valori nule în afara acestui interval sau cu valori egale:

$$I_1(x) = I_2(x) \quad x \in G,$$

se poate scrie

$$\int_G I(x) \exp(jux)\, dx = 0,$$

unde

$$I = I_1 - I_2.$$

Rezultă

$$I(x) = 0,$$

adică

$$I_1(x) = I_2(x),$$

exceptînd cel mult o mulţime de măsură nulă.

Ultima relație demonstrează unicitatea soluției în cazul radiatoarelor filare rectilinii.

8. În concluzie s-a demonstrat că metoda transformatei integrale permite rezolvarea problemei de sinteză a radiatoarelor filare rectilinii.

BIBLIOGRAFIE

1. C. J. Bouwkamp, G. N. Bruijn, *The problem of optimum antenna current distribution*, Philips Research Reports, *1*, 135—158 (1946).
2. M. M. Djrbașian, *Integralnîe preobrazovaniia i predstavleniia funcții v kompleksnoi oblasti*, Moskva, „Nauka", 1966.
3. L. La Paz, G. Miller, *Optimum current distribution on vertical antennas*, Proc. IRE, *31*, 214 (1943).
4. Edm. Nicolau, *Sinteza sistemelor radiante directive*, Teză de doctorat, susținută la Institutul politehnic București, 1969.
5. G. S. Ramm, *Naucino-tehniceskoi sbornik Leningrad*, In-ta sviazi, *3(19)*, 43 (1937).
6. E. Titchmars, *Teoriia funkții*, Moskva-Leningrad, Gosizdtehteorlit, 1951, p. 281.
7. L. Ia. Țlaf, *Variaționnoe iscislenie i integralnîe uravneniia*, Moskva, „Nauka", 1966, p. 131.
8. E. G. Zelkin, *Postroenie izluceaiușcei sistemî po zadannoi diagramme napravlennosti*, Moskva, Gosenergoizdat, 1963.

CONDIȚII SUFICIENTE DE HIPERSTABILITATE PENTRU SISTEME DISCRETE CU PARAMETRII VARIABILI

DE

TUDOR IONESCU

517.9 : 316.7

În acest articol se studiază hiperstabilitatea sistemelor discrete multiple cu parametrii variabili. Se obțin condiții suficiente de hiperstabilitate pentru unele clase particulare de astfel de sisteme.
În final se dau, ca aplicație, propoziții de stabilitate simplă a unor blocuri discret multiple.

1. INTRODUCERE

Definiția hiperstabilității și teoreme de suficiență pentru hiperstabilitatea sistemelor continue cu parametrii variabili au fost studiate de Popov în [1], autorul prezentului articol necunoscînd alte lucrări importante dedicate unor astfel de probleme

2. SISTEMUL STUDIAT

Fie blocul

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \tag{1}$$

$$v_k = C_k x_k + D_k u_k, \tag{2}$$

unde, pentru $k_0 \leqslant k < \infty$, A_k, B_k, C_k, D_k sînt șiruri de matrice deterministe cu valori reale de dimensiuni $(n\text{x}n)$, $(n\text{x}m)$, $(m\text{x}n)$, $(m\text{x}m)$, iar $\{u_k, k_0 \leqslant k < \infty\}$, $\{x_k, k_0 \leqslant k < \infty\}$, $\{v_k, k_0 \leqslant k < \infty\}$ șirurile de comenzi stări și ieșiri ale blocului dat, de asemenea cu valori reale.

Se definește următoarea expresie, atașată blocului (1), (2):

$$I(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} u_k' P_k u_k + 2u_k' Q_k' x_k + x_k' R_k x_k, \tag{3}$$

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 459–466, 1970

care verifică pentru orice $k_1 \geqslant k_0$ o relație de forma

$$I(k_0, k_1) \leqslant \gamma^2 + \gamma \sup ||x_\alpha||, \text{ pentru orice } \gamma \geqslant 0, \tag{4}$$
$$k_0 \leqslant \alpha \leqslant k_1 + 1,$$

unde P_k, R_k, Q_k sînt șiruri de matrice de dimensiuni $(m \times m)$, $(n \times n)$, $(n \times m)$, cu valori reale, primele două fiind simetrice pentru orice $k \geqslant k_0$.

În particular, o inegalitate de forma (4) are loc cînd între șirul de comenzi $\{u_k\}$ și șirul mărimilor de ieșire există o legătură de reacție de forma $u_k^i = \varphi^i(v_k^i)$, unde u_k^i, v_k^i sînt componentele i ale vectorilor u_k și v_k, iar $\varphi^i(\cdot)$ sînt funcții continue pe porțiuni, astfel încît să existe constantele reale α^i, β^i pentru care

$$\alpha^i v_k^{i^2} \leqslant \varphi^i(v_k^i)\, v_k^i \leqslant \beta^i v_k^{i^2} \tag{5}$$

pentru orice $k \geqslant k_0$, $i = 1 \to m$.

Notînd $u_k^i = \varphi^i(v_k^i)$, în loc de (5) se poate folosi

$$u_k^{i^2} - (\alpha^i + \beta^i)\, u_k^i v_k^i + \beta^i \alpha^i v_k^{i^2} \leqslant 0. \tag{6}$$

În (6) se înlocuiește v_k^i din (2). Se înmulțește relația cu constantele arbitrare pozitive p^i, însumînd apoi după i.

Se obține o expresie de forma

$$u_k' P_k u_k + 2u_k' Q_k' x_k + x_k' R_k x_k \leqslant 0, \tag{7}$$

unde

$$P_k = [\pi_k^{ij}], \qquad \begin{matrix} i = 1 -> m, \\ j = 1 -> m, \end{matrix}$$

$$\pi_k^{ij} = p^i - p^i(\alpha^i + \beta^i)\, d_k^{ij} + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \cdot \beta_s p^s \mathrm{d}_k^{si} \cdot d_k^{sj}, \tag{8}$$

$$Q_k = [q_k^{ij}], \qquad \begin{matrix} i = 1 -> n, \\ j = 1 -> m, \end{matrix}$$

$$q_k^{ij} = -\frac{1}{2} p^i(\alpha^i + \beta^i)\, c_k^{ij} + \sum_{s=1}^{m} c_k^{is} d_k^{si}, \tag{9}$$

$$R_k = [r_k^{ij}], \qquad \begin{matrix} i = 1 -> n, \\ j = 1 -> m, \end{matrix} \tag{10}$$

$$r_k^{ij} = \sum_{s=1}^{m} p^s \cdot \alpha^s \cdot \beta^s \cdot c_k^{si} \cdot c_k^{si},$$

c_k^{ij} și d_k^{ij} fiind elementele matricelor C_k și D_k. Dacă D_k sînt simetrice, P_k rezultă simetrice.

Însumînd (7) după k, se obține o inegalitate de forma (4) cu $\gamma = 0$.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de ansamblul format de ecuația (1) și relația (3) în condiția (4), ansamblu suficient pentru rezolvarea problemelor de stabilitate și de mărginire în normă ale lui x_k.

Există posibilitatea unor moduri de scrieri echivalente pentru (3). Fie condiția :

Condiția 1. Există șirurile de matrice $K_k, L_k, W_k, k_0 \leqslant k < \infty, (m \times m)$, $(m \times n), (n \times n)$, W_k fiind simetrice, astfel încît să avem pentru orice $k \geqslant k_0$

$$\widetilde{P}_k = P_k + B_k' W_{k+1} B_k = K_k' K_k, \tag{11}$$

$$\widetilde{Q}_k' = Q_k' + B_k' W_{k+1} A_k = K_k' L_k, \tag{12}$$

$$\widetilde{R}_k = R_k - W_k + A_k' W_{k+1} A_k = L_k' L_k. \tag{13}$$

În acest caz avem

$$I(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} (u_k' \widetilde{P}_k u_k + 2u_k' \widetilde{Q}_k' \cdot x_k + x_k' \cdot \widetilde{R}_k \cdot x_k) -$$

$$- x_{k_1+1}' \cdot W_{k_1+1} \cdot x_{k_1+1} + x_{k_0}' \cdot W_{k_0} \cdot x_{k_0} = \sum_{k=k_0}^{k_1} \| K_k \cdot u_k + L_k x_k \|^2 -$$

$$- x_{k_1+1}' \cdot W_{k_1+1} \cdot x_{k_1+1} + x_{k_0}' \cdot W_{k_0} \cdot x_{k_0}. \tag{14}$$

Dacă matricele din (11)—(13) sînt constante pentru orice k, relațiile din condiția de mai sus reprezintă sistemul Kalman-Szegö generalizat, așa cum apare descris în [2] și care, în anumite condiții impuse sistemului (1), (3), asigură existența matricelor K, L, W.

Revenind la cazul variabil în timp, vom adopta următoarea definiție pentru hiperstabilitatea sistemului (1), (3).

DEFINIȚIA 1. Sistemul (1), (3) este hiperstabil dacă pentru orice k_0 există o constantă pozitivă δ_{k_0} astfel încît, oricare ar fi u_k, x_k, $\gamma \geqslant 0$ verificînd (1) și (4), să avem

$$\| x_k \| \leqslant \delta_{k_0} (\gamma + \| x_{k_0} \|) \text{ pentru orice } k \geqslant k_0. \tag{15}$$

Se poate acum demonstra următoarea propoziție :

PROPOZIȚIA 1. Dacă pentru sistemul (1), (3) în condiția (4) este verificată condiția 1 și dacă șirul de matrice $\{W_k, k_0 \leqslant k < \infty\}$ este un șir de matrice pentru care există $\alpha_0 > 0$ astfel încît pentru orice vector x să avem*)

$$- x' W_k x \geqslant \alpha_0 \| x \|^2, \qquad k_0 \leqslant k < \infty, \tag{16}$$

atunci sistemul dat este hiperstabil în sensul definiției 1.

Demonstrația este imediată. Ținînd seama de relațiile (4), (5), (9), se poate scrie următorul șir de inegalități :

$$\gamma^2 + \gamma \sup_{k_0 \leqslant \alpha \leqslant k_1+1} \| x\alpha \| \geqslant I(k_0, k_1) \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} \| K_k u_k + L_k x_k \|^2 -$$

$$- x_{k_1+1}' \cdot W_{k_1+1} x_{k_1+1} + x_{k_0}' W_{k_0} x_{k_0} \geqslant - x_{k_1+1}' \cdot W_{k_1+1} \cdot x_{k_1+1} +$$

$$+ x_{k_0}' \cdot W_{k_0} x_{k_0} \geqslant \alpha_0 \| x_{k_1+1} \|^2 - \beta_{k_0} \| x_{k_0} \|^2.$$

*) Matricele care verifică relația (16) pentru orice k se vor numi tare negativ definite.

Din primul şi ultimul termen rezultă următoarea inecuaţie:

$$\alpha_0 \| x_{k_1+1} \|^2 - \gamma \sup_{k_0 \leqslant \alpha \leqslant k_1+1} \| x_\alpha \| - (\gamma^2 + \beta_{k_0} \| x_{k_0} \|^2) \leqslant 0,$$

Rezolvînd inecuaţia de sus prin calcule identice cu cele utilizate în [2] se deduce relaţia (15).

Se poate face observaţia că pentru sistemele de forma (1), (3) cu parametrii constanţi, conform celor demonstrate în [2], sistemul Kalman Szegö asigură existenţa unei matrice W simetrice negativ definite dacă este îndeplinită o anumită condiţie între parametrii sistemului.

Pentru sistemul (11)—(13) nu avem o astfel de condiţie care să asigure totdeauna existenţa şirului de matrice tare negativ definite $\{W_k, k_0 \leqslant k \leqslant\}$ în cazul general. Problema presupune analiza fiecărui caz dat în parte, încercîndu-se găsirea unor condiţii particulare care să asigure existenţa şirului W_k cu proprietăţile cerute.

Fie următoarea lemă, folosită ulterior la demonstrarea propoziţiilor 2 şi 3.

LEMA 1. Dacă soluţia banală a ecuaţiei $x_{k+1} = A_k x_k$ este uniform asimptotic stabilă şi dacă G_k, $k \geqslant k_0$ este un şir de matrice tare pozitiv definite, atunci există un şir de matrice $\{W_k, k \geqslant k_0\}$ tare negativ definite care să verifice relaţia

$$A_k' W_{k+1} A_k - W_k = G_k, \qquad k \geqslant k_0. \tag{17}$$

Demonstraţia se face imediat, considerînd

$$W_k = - \sum_{n=k} C_{n,k}' C_n C_{n,k}, \tag{18}$$

unde $C_{n,k}$ este matricea fundamentală a sistemului $x_{k+1} = A_k x_k$.

Deci $x_k = C_{k,k_0} \cdot x_{k_0}$, $C_{k,k} = I$ (matricea-unitate), $\| C_{n,k} \| \leqslant L \cdot q^{n-k}$ $(0 < q < 1)$. Calculînd diferenţa $x_{k+1}' W_{k+1} x_{k+1} - x_k' W_k x_k$ mai întîi cu ajutorul lui (18) şi $x_k = C_{k,k_0} \cdot x_{k_0}$, iar apoi înlocuind $x_{k+1} = A_k x_k$, rezultă (17).

Observaţie. Din lema 1 şi propoziţia 1 rezultă imediat:

PROPOZIŢIA 1'. Dacă pentru sistemul (1), (3), (4) R_k, $k \geqslant k_0$ este un şir de matrice tare negativ definite şi dacă $x_{k+1} = A_k x_k$ are soluţia banală uniform asimptotic stabilă, atunci existenţa matricelor K_k, L_k, W_k care să verifice condiţia 1 asigură hiperstabilitatea sistemului în sensul definiţiei 1.

3. CONDIŢII SUFICIENTE

Fie sistemul (1), (3), P_k, R_k, Q_k nefiind neapărat date de relaţiile (8)—(10). $I(k_0, k_1)$, deci nu verifică o relaţie de forma (4). În acest caz se va folosi o altă definiţie pentru hiperstabilitatea sistemului (1), (3).

DEFINIŢIA 2. Sistemul (1), (3) se numeşte hiperstabil dacă pentru orice k_0 există două constante pozitive β_{k_0} şi β aşa ca pentru toţi k_1, k_0

$$\beta \| x_{k_1+1} \|^2 \leqslant I(k_0, k_1) + \beta_{k_0} \| x_{k_0} \|^2$$

pentru toţi x_k şi u_k ce verifică (1).

Este evident acum că, dacă $I(k_0, k_1)$ verifică (4), definiția 1 este implicată de definiția 2.

Se demonstrează următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 2. Dacă sistemul (1), (3) verifică:

(i) P_k, $k \geqslant k_0$ este un șir de matrice simetrice $(m \times m)$, așa că să existe $\lambda > 0$, astfel încît $P_k = \widetilde{P}_k + \lambda I$ (matricea-unitate), unde $\widetilde{P}_k$ sînt matrice pozitiv definite,

$$\text{(ii)} \qquad \sup_k \| B_k \| \leqslant \delta < \infty, \tag{19}$$

$$\text{(iii)} \qquad R_k = \frac{\lambda}{\delta^2} A_k' A_k + \left(Q_k - \frac{\lambda}{\delta^2} A_k' B_k\right) \widetilde{P}_k^{-1} \left(Q_k' - \frac{\lambda}{\delta^2} B_k' A_k\right) \tag{20}$$

pentru toți $k \geqslant k_0$, atunci sistemul dat va fi hiperstabil în sensul definiției 2.

Demonstrația propoziției 2. Fie W_k, $k \geqslant k_0$ un șir de matrice tare negativ definite pentru care avem relațiile (pentru orice vector x)

$$- x' B_k' W_{k+1} B_k x \leqslant \xi \delta^2 \| x \|^2 \leqslant \lambda \| x \|^2, \tag{21}$$

unde

$$\xi = \sup_k \max_n |\sigma(W_k)|,$$

$\sigma(W_k)$ fiind spectrul matricei W_k.

Vom găsi implicațiile existenței unui astfel de șir, arătînd apoi în ce condiții îl putem calcula ca atare.

Din (i), (1) și (21), (3) devine

$$I(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} [u_k' (\widetilde{P}_k + \lambda I) u_k + 2u_k' Q_k' x_k + x_k' R_k x_k] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=k_0}^{k} u_k' \widetilde{P}_k u_k - u_k' B_k' W_{k+1} B_k u_k + 2u_k' Q_k' x_k + x_k' R_k x_k) = \tag{21'}$$

$$= \sum_{k=k_0}^{k_1} u_k' \widetilde{P}_k u_k + 2u_k' Q_k' x_k + x_k' \widetilde{R}_k x_k) - x_{k_1+1}' W_{k_1+1} x_{k_1+1} + x_{k_0}' W_{k_0} x_{k_0},$$

unde

$$\widetilde{Q}_k' = Q_k' - B_k' W_{k+1} A_k,$$

$$\widetilde{R}_k = R_k - W_k + A_k' W_{k+1} A_k.$$

Adunînd șirului $\widetilde{R}_k$ matricea tare negativ definită W_k, $k \geqslant k_0$, din (3') se poate deduce

$$I(k_0, k_1) \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} (u_k' \widetilde{P}_k u_k + 2u_k' \widetilde{Q}_k' x_k + x_k' \widetilde{\widetilde{R}}_k x_k) -$$

$$- x_{k_1+1} W_{k_1+1} x_{k_1+1} + x_{k_0}' W_{k_0} x_{k_0}, \tag{22}$$

unde

$$\tilde{\tilde{R}}_k = R_k + A_k' W_{k+1} A_k .$$

Dacă există K_k, L_k, $k \geqslant k_0$, care împreună cu W_k ales mai sus verifică

$$\tilde{P}_k = K_k' K_k , \tag{23}$$

$$Q_k' + B_k' W_{k+1} A_k = K_k' L_k , \tag{24}$$

$$R_k + A_k' W_{k+1} A_k = L_k' L_k , \tag{25}$$

din (22) şi (4), urmînd raţionamentul din demonstraţia propoziţiei 1, unde relaţiile din condiţia 1 se înlocuiesc cu (23)—(25), rezultă imediat hiperstabilitatea şi în sensul definiţiei 1 dacă $I(k_0, k_1)$ verifică (4).

Dar din (iii) există $\tilde{L}_k$ aşa ca $\tilde{L}_k' \tilde{L}_k = R_k - \frac{\lambda}{\delta^2} A_k' A_k$. Aleg în (25)

$$L_k = \tilde{L}_k = (K_k')^{-1} \left[Q_k' - \frac{\lambda}{\delta^2} B_k' A_k \right].$$

Rezultă

$$A_k' W_{k+1} A_k = - \frac{\lambda}{\delta^2} A_k' A_k .$$

Matricea $W_{k+1} = - \frac{\lambda}{\delta^2} I$ este tare negativ definită, verifică (21) şi ecuaţiile (23)—(25) în condiţiile cerute de teoremă (verificarea se obţine înlocuind în (24) pe (26) şi (23), K_k fiind nesingulare pentru ori ce $k \geqslant k_0$).

Observaţie. O astfel de propoziţie este valabilă pentru blocuri de forma (1), (2), cărora li se ataşează relaţia (3), care verifică (4), deci pentru care P_k, Q_k, R_k sînt daţi de (8)—(10).

În acest caz, luînd $\beta = \min_i \beta^i$, $\alpha = \max_i \alpha^i$, α şi β fiind pozitive şi folosind (8)—(10) în (iii), se obţin condiţii suficiente de hiperstabilitate pentru blocul (1), (2) în ipotezele propoziţiei 2, exprimate numai în parametrii blocului şi constantele α, β, p.

Fie următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 2'. Dacă pentru orice $k \geqslant k_0$

$$\text{(i)} \qquad R_k = A_k' A_k + I + S_k ,$$

S_k fiind un şir de matrice semipozitive definite arbitrare,

$$\text{(ii)} \qquad P_k = B_k' B_k + (Q_k' - B_k' A_k)(Q_k - A_k' B_k) + N_k ,$$

N_k fiind de asemenea semipozitiv definite arbitrare, atunci sistemul (1), (3) este hiperstabil, conform definiţiei 2.

Demonstraţia se face imediat, urmînd o cale similară celei folosite în propoziţia 2. S-a renunţat la folosirea ipotezei (ii) din 2.

Aplicație. Folosind aceeași metodă, se pot demonstra propoziții de stabilitate pentru un sistem de forma

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k \varphi(v_k), \tag{26}$$

$$v_k = 2C_k' x_k, \qquad k \geqslant k_0, \tag{27}$$

unde

$$-\alpha v_k^{i2} \leqslant \varphi(v_k^i)\, v_k^i \leqslant \beta v_k^{i2}, \qquad \beta > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > \alpha. \tag{28}$$

PROPOZIȚIA 3. Fie (26), (27), (28). Dacă pentru orice $k \geqslant k_0$

(i) $$C_k' = -\frac{1}{(\beta - \alpha)p} B_k' A_k,$$

(ii) $$\| B_k \|^2 \leqslant \frac{(\beta - \alpha)^2}{4\alpha\beta}\left[\frac{1}{\| A_k \|^2} - 1\right] \leqslant \delta^2 < \infty,$$

luînd p arbitrar, dar $p > 1$, $p > \delta^2$, există $\rho > 0$ așa ca pentru orice $k \geqslant k_0$, $\| x_k \| \leqslant \rho \| x_{k_0} \|$.

DEMONSTRAȚIA. Din (28) și din considerațiile anterioare rezultă că se poate atașa la (26), (27) expresia

$$I(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} u_k' P u_k + 2u_k' Q_k' \cdot x_k + x_k' R_k x_k,$$

unde pentru $k \geqslant k_0$

$P = pI$ (matricea-unitate), $Q_k = -p(\beta - \alpha) C_k$, $R_k = -4p\alpha\beta C_k C_k'$ (vezi (8)—(10) pentru $p^i = p$) și care verifică (4) pentru $\gamma = 0$.

Dar din ipoteze există K, L_k, $W_k = -I$, așa ca

$$A_k' W_{k+1} A_k - W_k - 4p\alpha\beta C_k C_k' = L_k' L_k,$$

$$-p(\beta - \alpha) C_k' + B_k' W_{k+1} A_k = K L_k,$$

$$P - \lambda I = K' K,$$

unde $p > \lambda \geqslant \delta^2$, $p > 1$.

În aceste condiții, din propoziția 1, prin înlocuire directă, rezultă mărginirea în normă pentru x_k.

Următoarele două propoziții se pot demonstra la fel (pentru 3' luînd în considerație tema 1):

PROPOZIȚIA 3'. Fie (26), (27) și $\alpha v_k^{i2} \leqslant \varphi(v_k^i) v_k^i \leqslant \beta v_k^{i2}$, α, $\beta > 0$.

Dacă

(i) $x_{k+1} = A_k x_k$ este uniform asimptotic stabil,

$C_{n,k}$ fiind matricea sa fundamentală,

(ii) $$C_k' = -\frac{1}{p(\alpha + \beta)} B_k' W_{k+1} A_k, \quad k \geqslant k_0,$$

unde

$$W_k = -\sum_{n=k}^{\infty} C'_{n,k} \cdot C_{n,k},$$

(iii) $\|B_k\| \leqslant \delta < \infty, \qquad k \geqslant k_0,$

atunci există $\rho > 0$ așa ca

$$\|x_k\| \leqslant \rho \|x_{k_0}\|, \qquad k \geqslant k_0.$$

PROPOZIȚIA 3'' Fie același sistem ca în propoziția 3'. Dacă

(i) $\left\{ \frac{4\alpha\beta}{p(\alpha+\beta)^2} B_k B'_k - I \right\}, \qquad k \geqslant k_0,$

este semipozitiv definită,

$$\|B_k\| \leqslant \delta < \infty, \qquad p \geqslant \delta^2,$$

(ii) $C'_k = -\frac{1}{p(\alpha+\beta)} B'_k \cdot A_k, \qquad k \geqslant k_0,$

atunci există $\rho > 0$ așa ca

$$\|x_k\| \leqslant \rho \|x_{k_0}\|, \qquad k \geqslant k_0.$$

Concluzii. Condițiile suficiente de hiperstabilitate obținute pot înlesni tratarea unor probleme de stabilitate pentru sisteme cu parametri stohastici fără ajutorul metodelor obișnuite cu funcții Leapunov.

Se pot obține evoluări efective pentru parametrii unui bloc dat, astfel încît soluțiile acestuia să fie mărginite în normă pentru orice comandă. Din această cauză, astfel de condiții pentru hiperstabilitate și stabilitate de felul celor de mai sus își pot găsi repede o aplicație practică pentru cazul sistemelor automate cu parametrii variabili, acestea din urmă putînd fi eventual proiectate direct ca blocuri stabile sau hiperstabile.

BIBLIOGRAFIE

1. V. M. POPOV, *Stabilitatea sistemelor automate cu parametri variabili în timp*, St. cerc. energ. electr., *2* (1965).
2. — *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, București, Edit. Academiei. 1966.
3. F. R. GAUTMAHER, *Teoria matricelor*, vol. II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1953.

REZOLVAREA PROBLEMEI GENERALE A STABILITĂȚII ABSOLUTE CU AJUTORUL TEORIEI HIPERSTABILITĂȚII

DE

CORNEL VASILE

517.9 : 621.316.7

În lucrarea de față se rezolvă cu ajutorul teoriei hiperstabilității problema stabilității absolute a sistemelor de reglare automată pentru o clasă mai largă de neliniarități, clasă introdusă de Iakubovici în [1] și care cuprinde în particular clasa neliniarităților considerate de Popov în lucrările sale.

§ 1. Numim sistem multiplu un sistem de forma

$$dx/dt = Ax + Bu, \tag{1.1}$$

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} (u^* Ku + u^* L^* x + x^* Lu + x^* Mx)dt,$$

unde

x este vector cu n componente care descrie starea sistemului,
A — matrice constantă cu n linii și coloane,
u — funcție vectorială de comandă definită pentru $t \geqslant 0$ și având m componente continue pe porțiuni,
B, I — matrice constante cu n linii și m coloane,
K — matrice constantă hermitică cu m linii și coloane,
M — matrice constantă hermitică cu n linii și coloane.

Sistemului considerat îi asociem matricea caracteristică

$$H(z_1, z_2) = K + L^*(z_2E - A)^{-1}B + B^*(z_1E - A^*)^{-1}L + B^*(z_1E - A^*)^{-1} M(z_2E - A)^{-1} B \tag{1.2}$$

și „polinomul caracteristic"

$$\pi(z_1, z_2) = 1/\mu \det (z_1E - A^*) \det (z_2E - A) \det H(z_1, z_2). \tag{1.3}$$

Presupunem că sînt îndeplinite condițiile

M este matrice negativ semidefinită, (1.4)

St. cerc. energ. electr., Tom. 20. Nr. 2, p. 467—477, 1970

(A, B) — pereche complet controlabilă, (1.5)

(U^*, A) — pereche complet observabilă, (1.6)

unde U este matricea dată de expresia $U = (L, M)$.

DEFINIȚIA. 1. *Spunem că sistemul* (1.1) *este hiperstabil dacă există numerele pozitive* β_1 *și* β_2 *astfel încît să fie verificată inegalitatea*

$$\beta_1\|x(t_1)\|^2 \leqslant \eta(0, t_1) + \beta_2\|x(0)\|^2 \tag{1.7}$$

pentru orice $t_1 > 0$ *și orice funcții* $u(t)$ *și* $x(t)$ *care verifică ecuația* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + Bu$.

TEOREMA 1.1. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* (1.4)—(1.6), *următoarele proprietăți sînt echivalente*:

a) *sistemul* (1.1) *este hiperstabil în sensul definiției*;

b) *integrala* $\eta(0, t_1)$ *poate fi adusă la forma*

$$\eta(0, t_1) = -[x^*Nx]_0^{t_1} + \int_0^{t_1} \|Vu + W^*x\|^2 \mathrm{d}t, \tag{1.8}$$

unde matricea N *este negativ definită*;

c) *matricea* $H(\bar{s}, s)$ *este pozitiv semidefinită pentru orice număr* s *care satisface condițiile* $\mathrm{Re}\ s > 0$ *și* $\det(sE - A) \neq 0$;

d) *matricea* $H(-\mathrm{i}\omega, \mathrm{i}\omega)$ *este pozitiv semidefinită oricare ar fi numărul real* ω *care satisface condiția* $\det(\mathrm{i}\omega E - A) \neq 0$ *și are loc proprietatea de stabilitate limită*: *matricea* $A - 2\alpha BL^*$ *este hurwitziană pentru orice* α *într-un interval de forma* $0 < \alpha < \Delta$.

Pentru demonstrație vezi [3], §16.

TEOREMA 1.2. *Fie sistemul* (1.1). *Presupunem că* A *este matrice hurwitziană și că sînt îndeplinite condițiile* (1.4)—(1.6).

Dacă matricea $H(-\mathrm{i}\omega, \mathrm{i}\omega)$ *este pozitiv definită pentru orice* $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$ *și dacă* $\eta(0, t_1)$ *este mărginită superior pentru orice* $t_1 \geqslant 0$, *atunci orice soluție a sistemului* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + Bu$ *este mărginită și are proprietatea* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Demonstrație. Sistemul (1.1) este hiperstabil, conform teoremei (1.1). Deoarece $\eta(0, t_1)$ este mărginită superior pentru orice $t_1 \geqslant 0$, rezultă că soluția $X(t)$ este mărginită, conform inegalității (1.7).

Sistemul fiind hiperstabil, el este în particular pozitiv ((3), §9). Atunci există cel puțin un polinom $\psi(s)$ astfel încît polinomul $\pi(-s, s)$ poate fi factorizat sub forma

$$\pi(-s, s) = \psi(s)\,\overline{\psi}(-s)$$

și, oricare ar fi polinomul $\psi(s)$ care satisface această relație, există o matrice V, cu m linii și coloane, și o matrice W, cu n linii și m coloane, astfel încît

$$H(-s, s) = \overline{F}_0'(-s)\,F_0(s), \tag{1.9}$$

unde

$$F_0(s) = V + W^*(sE - A)^{-1}B, \tag{1.10}$$

$$\det F_0(s) = \sqrt{\mu}\,\psi(s)/\det(sE - A). \tag{1.11}$$

Există în plus N hermitică, astfel încît

$$\eta(0, t_1) = -x^*(t_1)Nx(t_1) + x^*(0)Nx(0) + \int_0^{t_1} \|Vu + W^*x\|^2 \, dt, \tag{1.12}$$

$$K = V^*V, \tag{1.13}$$

$$L + NB = WV, \tag{1.14}$$

$$M + NA + A^*N = WW^*. \tag{1.15}$$

Din teorema (1.1) rezultă că matricea N este negativ definită. Avem atunci

$$\eta(0, t_1) \geqslant x^*(0)Nx(0) + \int_0^{t_1} \|Vu + W^*x\|^2 dt, \; t_1 \geqslant 0 \tag{1.16}$$

și deci

$$\int_0^{\infty} \|Vu + W^*x\|^2 dt < \infty. \tag{1.17}$$

Deoarece, prin ipoteză, $\det H(-i\omega, i\omega) > 0$, rezultă că $\pi(-i\omega, i\omega) \neq 0$ pentru $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$ și deci putem alege pe $\psi = \psi(s)$ astfel încît toate rădăcinile lui să aibă părțile reale negative, unde ψ reprezintă o factorizare a polinomului π.

Deoarece matricea $H(-i\omega, i\omega)$ este presupusă pozitiv definită pentru $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$, rezultă că matricea $K = \lim_{|\omega| \to \infty} H(-i\omega, i\omega)$ este pozitiv definită. Matricea K admite inversă. Pentru că $K = V^*V$, rezultă că $\det V \neq 0$ și deci V admite inversă.

Ecuația $dx/dt = Ax + Bu$ se poate scrie

$$dx/dt = (A - BV^{-1} W^*)x + BV^{-1}(Vu + W^*x). \tag{1.18}$$

Arătăm că matricea $A - BV^{-1} W^*$ este hurwitziană. Din identitatea matriceală

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -V^{-1}W^*(sE - A)^{-1} & Em \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sE - A + BV^{-1}W^* & -B \\ 0 & Em \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sE - A & -B \\ 0 & Em + V^{-1}W^*(sE - A)B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -V^{-1} W^* & Em \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

obținem

$$\det (sE - A + BV^{-1}W^*) =$$
$$= \det (sE - A) \det V^{-1} \det (V + W^*(sE - A)^{-1} B). \tag{1.20}$$

Ținînd seama de relațiile (1.10) și (1.11), avem

$$\det (sE - A + BV^{-1}W^*) = \sqrt{\mu}\psi(s) \det V^{-1}. \tag{1.21}$$

Cum toate rădăcinile lui $\psi(s)$ au părțile reale negative, rezultă că matricea $A - BV^{-1}W^*$ este hurwitziană.

Fie $x(t)$ o soluție a sistemului $dx/dt = Ax + Bu$, deci a sistemului $dx/dt=(A - BV^{-1}W^*)\, x + BV^{-1}(Vu + W^*x)$. Deoarece $x(t)$ este mărginită conform unei leme a lui Popov ([3], §22, lema 3), rezultă că

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{1.22}$$

În concluzie, în ipotezele teoremei, orice soluție a sistemului $dx/dt = Ax + Bu$ este mărginită și are proprietatea $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

§ 2. Considerăm sistemul de reglare automată

$$dx/dt = Ax + B\varphi(\tau), \tag{2.1}$$

$$\tau = R^*x,$$

unde

x este vector cu ν componente,
A — matrice constantă cu ν linii și coloane,
B — matrice constantă cu ν linii și m coloane,
R — matrice constantă cu ν linii și n coloane,
φ — funcție vectorială cu m componente continue pe porțiuni,
τ — vector cu n componente.

Presupunem că există formele pătratice W_j depinzînd de $\tau_1,\ldots \tau_n$, $\varphi_1,\ldots, \varphi_m$, astfel încît

$$W_j(\varphi(\sigma(t)),\ \sigma(t)) = 0,\ j = 1,\ 2,\ldots,\ k_1 \tag{2.2}$$

$$W_j(\varphi(\sigma(t)),\ \sigma(t))\geqslant 0,\quad j = k_1 + 1,\ldots,\ k_1 + k_2 = k. \tag{2.3}$$

Facem să corespundă fiecărei forme pătratice W_j un parametru real τ_j : valorile τ_j sînt arbitrare pentru $j = 1,\ 2,\ldots,\ k_1$ și $\tau_j \geqslant 0$ pentru $j = k_1 + 1,\ldots,\ k$.

Construim forma pătratică

$$W(\varphi,\ \sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j W_j = \varphi^*\widetilde{K}\varphi + \varphi^*\widetilde{L}^*\sigma + \sigma^*\widetilde{L}\varphi = \sigma^*\widetilde{M}\sigma. \tag{2.4}$$

Definiția 2.1. *Spunem că neliniaritatea* $\varphi_h = \varphi_h\,[\sigma]_t$ *îndeplinește condiția de pozitivitate în raport cu argumentul* σ_{qh} *de care ea depinde dacă pentru orice funcție* $\sigma_{qh}(t)$ *și pentru orice valoare inițială* $\varphi_h|_{t=0}$, *există o constantă* $\delta > 0$ *astfel încît* $\int_0^t \varphi_h\, d\sigma_{qh} \geqslant -\delta$ *pentru orice* $t\geqslant 0$ *oricare ar fi celălalte valori ale parametrilor și funcțiilor de care* φ_h *depinde* [1].

Fiecărei neliniarități φ_h îi punem în corespondență un parametru real θ_h :

$\theta_k \geqslant 0$ dacă φ_h îndeplinește condiția de pozitivitate;

$\theta_h \leqslant 0$ dacă $(-\varphi_h)$ îndeplinește condiția de pozitivitate;

$\theta_h = 0$ dacă nici φ_h și nici $(-\varphi_h)$ nu îndeplinește condiția de pozitivitate.

Teorema 2.1. *Fie sistemul* (2.1) *cu* A *matrice hurwitziană și* $(A,\ B)$ *pereche complet controlabilă.*

Dacă există formele pătratice W_j care satisfac condițiile (2.2), (2.3) *și dacă există parametrii* τ_j *și* θ_h *astfel încît*

a) *matricea* M *este pozitiv semidefinită*;

b) *perechea* (U^*, A) *este complet observabilă*;

c) *matricea* $-\widetilde{K}-(\widetilde{L}^* + 1/2i\omega Q)\,G(i\omega) - G^*(i\omega)\,(\widetilde{L} - 1/2i\omega Q^*) - G^*(i\omega)\,\widetilde{M}G\,(i\omega)$ *este pozitiv definită pentru* $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$,

unde

$$U = (L\ M)\ ;\ L = -R\widetilde{L} - 1/2\ A^*R\ Q^*;\ M = -RMR^*,$$

$$Q = \theta\alpha;\ \theta = \operatorname{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n);\ \alpha = (\alpha_{hi});\ \alpha_{hi} = 0 \text{ pentru}$$

$$i \neq q_h \quad \text{și} \quad \alpha_{hq_h} = 1,$$

$$G(i\omega) = R^*(i\omega E - A)^{-1}B,$$

atunci orice soluție $x(t)$ *a sistemului* (2.1) *este mărginită și are proprietatea* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Demonstrație. Considerăm sistemul

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + Bu,$$

$$\eta(0, t_1) = -\int_0^{t_1} [W(u, R^*x) + 1/2u^*\,QR^*\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + 1/2\mathrm{d}x^*/\mathrm{d}t\,RQ^*u]\mathrm{d}t \quad (2.5)$$

Integrala $\eta(0, t_1)$ se poate scrie

$$\eta(0, t_1) = -\int_0^{t_1} [u^*\widetilde{K}u + u^*\widetilde{L}^*R^*x + x^*R\widetilde{L}u + x^*R\widetilde{M}R^*x +$$

$$+ 1/2u^*QR^*(Ax + Bu) + 1/2(x^*A^* + u^*B^*)RQ^*u]\mathrm{d}t; \quad (2.6)$$

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} [u^*(-\widetilde{K} - 1/2QR^*B - 1/2B^*RQ^*)u + u^*(-\widetilde{L}^*R^* -$$

$$- 1/2QR^*A)x + x^*(-R\widetilde{L} - 1/2A^*QR^*)u - x^*R\widetilde{M}R^*x)\mathrm{d}t. \quad (2.7)$$

Sistemul (2.5) devine

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + Bu,$$

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} [u^*Ku + u^*L^*x + x^*Lu + x^*Mx)\mathrm{d}t, \quad (2.8)$$

unde:

$$K = -\widetilde{K} - 1/2QR^*B - 1/2B^*RQ^*, \quad (2.9)$$

$$L = -R\widetilde{L} - 1/2A^*\ RQ, \quad (2.10)$$

$$M = -R\widetilde{M}R^*. \quad (2.11)$$

Calculăm matricea caracteristică a sistemului (2.8):

$$H(-i\omega, i\omega) = K + L^*(i\omega E - A)^{-1}B + B^*(-i\omega E - A^*)^{-1}L +$$
$$+ B^*(-i\omega E - A^*)^{-1} M(i\omega E - A)^{-1} B,$$
$$H(-i\omega, i\omega) = -\widetilde{K} - 1/2QR^*B - 1/2B^*RQ^* + (-\widetilde{L}^*R^* -$$
$$- 1/2QR^*A)(i\omega E - A)^{-1} B + B^*(-i\omega E - A^*)^{-1}(-\widetilde{L}R - 1/2A^*RQ^*) +$$
$$+ B^*(-i\omega E - A^*)^{-1}(-R\widetilde{M}R^*)(i\omega E - A)^{-1} B,$$
$$H(-i\omega, i\omega) = -\widetilde{K} - 1/2QR^*B - 1/2B^*RQ^* - \widetilde{L}^*R^*(i\omega E - A)^{-1} B -$$
$$- 1/2\, QR^*A(-i\omega E - A)^{-1}B - B^*(-i\omega E - A^*)^{-1} R\widetilde{L} - 1/2B^*(-$$
$$- i\omega E - A^*)^{-1}A^*RQ^* - B^*(-i\omega E - A^*)^{-1}R\widetilde{M}R^*(i\omega E - A)^{-1} B,$$
$$H(-i\omega, i\omega) = -\widetilde{K} - 1/2QR^*B - 1/2B^*RQ^* - \widetilde{L}^*R^*(i\omega E - A)^{-1}B +$$
$$+ 1/2QR^*[E - i\omega(i\omega E - A)^{-1}]B - B^*(-i\omega E - A^*)^{-1} R\widetilde{L} +$$
$$+ 1/2B^*[E + i\omega(-i\omega E - A^*)^{-1}]RQ^* - B^*(-i\omega E -$$
$$- A^*)^{-1} R\widetilde{M}R^*(i\omega E - A)^{-1} B.$$

Notăm

$$G(i\omega) = R^*(i\omega E - A)^{-1} B \tag{2.12}$$

şi rezultă

$$H(-i\omega, i\omega) = -\widetilde{K} - (\widetilde{L}^* + 1/2i\omega Q)\, G(i\omega) - G^*(i\omega)(\widetilde{L} - 1/2i\omega Q^*) -$$
$$- G^*(i\omega)\, \widetilde{M} G(i\omega). \tag{2.12}$$

Fie $x(t)$ o soluţie a sistemului (2.1). Calculez $\sigma(t) = R^*x(t)$.

Alegem pentru sistemul (2.8) comanda $u(t) = \varphi(\sigma(t))$. Atunci, pentru $x(t)$ şi $u(t)$ de mai sus avem

$$\eta(0, t_1) = -\int_0^{t_1} W(\varphi(\sigma(t)),\ \sigma(t))dt - \int_0^{t_1} \varphi^*Q\,d\sigma \leqslant -$$
$$-\int_0^{t_1} \varphi^*Q\,d\sigma = -\sum_{h=1}^{m} \theta_h \int_0^{t_1} \varphi_h\, d\sigma_{q_h}, \tag{2.13}$$

deci $\eta(0, t_1)$ este mărginită superior pentru orice $t_1 \geqslant 0$.

Conform teoremei 1.2, ale cărei ipoteze sînt îndeplinite, rezultă că orice soluţie $x(t)$ a sistemului (2.1) este mărginită şi are proprietatea $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Observaţie. Faptul că matricea $H(-i\omega, i\omega)$ este pozitiv definită pentru $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$ este echivalent cu condiţia lui Iakubovici: „Există parametri τ_j şi θ_h astfel încît forma pătratică de argumente $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, ai

cărei coeficienți depind de τ_j și θ_h și de numărul complex s'

$$F(s, \varphi) = \mathrm{Re}\left(s \sum_{h=1}^{m} \theta_h \varphi_h \sigma_{q_h}\right) + W(\varphi, \sigma),$$

este negativ definită pentru $s = i\omega$, $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$, unde σ este vectorul $\sigma = R^*(sE - A)^{-1} B\varphi''$.

Folosind matricele θ și α introduse mai înainte, se arată printr-un calcul simplu că matricea atașată formei pătratice $F(s, \varphi)$ este matricea $-H(\bar{s}, s)$. Folosind rezultatele teoriei hiperstabilității, putem renunța la stabilitatea matricei A. Avem următoarea teoremă:

TEOREMA 2.2. *Fie sistemul* (2.1), *unde* $\varphi(0) = 0$. *Presupunem că matricea* A *nu are nici o valoare caracteristică cu partea reală pozitivă, că valorile caracteristice situate pe axa imaginară sînt simple, că perechea* (A, B) *este complet controlabilă și că perechea* (R^*, A) *este complet observabilă.*

Dacă există parametrii τ_j *și* θ_h *astfel încît*

a) $W(\varphi(\sigma(t)), \sigma(t)) \geqslant 0$ *și* $W(\varphi(\sigma), \sigma) = 0$ *dacă și numai dacă* $\sigma = 0$, *unde* W *este construită ca în teorema* 2.1, *cu* $\widetilde{M}$ *matrice pozitiv semidefinită;*

b) (U^*, A) *este pereche complet observabilă, unde* $U = (LM)$,

$$L = -R\widetilde{L} - 1/2A^*RQ^* \text{ și } M = -R\widetilde{M}R^*;$$

c) *matricea* $-\widetilde{K} - (\widetilde{L}^* + 1/2sQ)\, G(s) - G^*(s)\, (\widetilde{L} + 1/2\bar{s}Q^*) - G^*(s)\, \widetilde{M} G(s)$ *este pozitiv semidefinită pentru orice număr* s *care satisface condițiile* $\mathrm{Re}\, s > 0$ *și* $\det(sE - A) \neq 0$, *unde* $G(s) = R^*(sE - A)^{-1} B$ *și* Q *construită ca în teorema* 2.1, *atunci soluția nulă a sistemului* 2.1 *este asimptotic stabilă în mare.*

Demonstrație. Sistemul (2.8) este hiperstabil, deoarece matricea sa caracteristică $H(s, s) = -\widetilde{K} - (\widetilde{L}^* + 1/2sQ)\, G(s) - G^*(s)\, (\widetilde{L} + 1/2\bar{s}Q^*) - G^*(s)\, \widetilde{M} G(s)$ este prin ipoteză pozitiv semidefinită pentru orice s cu $\mathrm{Re}\, s > 0$ și $\det(sE - A) \neq 0$. Atunci există constantele pozitive β_1 și β_2 astfel încît

$$\beta_1 \| x(t_1) \|^2 \leqslant \eta(0, t_1) + \beta_2 \| x(0) \|^2. \tag{2.14}$$

Pentru comanda $u(t) = \varphi(\sigma(t))$, calculată cu ajutorul soluției $x(t)$ a sistemului (2.1), integrala $\eta(0, t_1)$ este mărginită superior pentru orice $t_1 \geqslant 0$.

Inegalitatea (2.14) ne arată că $x(t)$ este funcție mărginită. Din mărginirea funcției $x(t)$ rezultă mărginirea funcțiilor $\sigma(t) = R^*x(t)$ și $\psi(t) = \varphi(\sigma(t))$. Deoarece funcțiile $\sigma(x)$ și $\psi(t)$ sînt mărginite, $dx(t)/dt$ este funcție mărginită de t și deci $x(t)$ este funcție uniform continuă pe semiaxa $t \geqslant 0$.

Funcția $x(t)$ fiind uniform continuă, rezultă că $\sigma(t)$ este uniform continuă pe semiaxa $t \geqslant 0$ și, deoarece φ este funcție continuă, funcția $\psi(t) = \varphi(\sigma(t))$ este uniform continuă pe semiaxa $t \geqslant 0$.

Atunci funcția $W(\varphi(\sigma(t)), \sigma(t))$ este uniform continuă pe semiaxa $t \geqslant 0$, deoarece $\sigma(t)$ și $\varphi(t))$ sînt funcții uniform continue și mărginite.

Din inegalitatea (2.14) rezultă

$$\int_0^{t_1} W(\varphi(\sigma(t)), \sigma(t))\, dt \leqslant -\sum_{h=1}^{m} \theta_h \int_0^{t_1} \varphi_h\, d\sigma_{q_h} - \beta_1 \| x(t_1) \|^2 + \beta_2 \| x(0) \|^2 \leqslant \text{const} \tag{2.15}$$

şi deci

$$\int_0^\infty W(\varphi(\sigma(t)),\ \sigma(t)) < \infty. \tag{2.16}$$

Putem aplica lema lui Barbălat şi obţinem concluzia

$$\lim_{t\to\infty} W(\varphi(\sigma(t)),\ \sigma(t)) = 0. \tag{2.17}$$

Fie $t_n \to \infty$ arbitrar. Deoarece şirul $\sigma(t_n)$ este mărginit, putem extrage un subşir $t_{k_n} \to \infty$ astfel încît $\sigma(t_{k_n}) \to \tilde{\sigma}$. Atunci $\varphi(\sigma(t_{k_n})) \to \varphi(\tilde{\sigma})$ şi deci $W(\varphi(\tilde{\sigma}), \tilde{\sigma}) = 0$, ceea ce implică $\tilde{\sigma} = 0$.

Rezultă că $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$ şi $\lim_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = 0$, deoarece prin ipoteză $\varphi(0) = 0$.

Fie sistemul $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + Bu$. Deoarece valorile proprii de pe axa imaginară sînt simple, rezultă că matricea A admite exact r vector independenţi y_j cu proprietăţile $Ay_j = i\omega_j y_j$, ω_j reali. Atunci există vectorii liniar independenţi $d_1, \ldots, d_r, d_1, \ldots d_r$ care satisfac relaţiile

$$Ad_k = i\omega_k d_k,\ \check{d}_k^* A_k = i\omega_k \check{d}_k^*,\ d_j d_k = \delta_j^k \tag{2.18}$$

şi pentru care

$$\lim_{t\to\infty}[x(t + \theta_0) - \sum_{j=1}^{r} \check{d}_j^* x(t) d_j e^{i\omega_j\theta_0}] = 0 \tag{2.19}$$

oricare ar fi constanta pozitivă sau nulă θ_0 pentru orice soluţie $x(t)$ şi pentru comanda $u(t) = \varphi(\sigma(t))$ (vezi [3], § 22, 5). Înmulţind relaţia (2.19) la stînga cu R^*, obţinem

$$\lim_{t\to\infty} [R^* x(t, + \theta_0) - \sum_{j=1}^{r} \check{d}_j^* x(t) R^* d_j e^{i\omega_j\theta_0}] = 0 \tag{2.20}$$

sau

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{r} \check{d}_j^* x(t) R^* d_j e^{i\omega_j\theta_0} = 0, \tag{2.21}$$

deoarece $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$.

Notăm $\lim_{t\to\infty} \check{d}_j^* x(t) = p_j$. Arătăm că $p_j = 0$ oricare ar fi j.

Presupunem că nu toţi p_j sînt nuli. Construim atunci funcţia

$$v(\tau) = \sum_{j=1}^{r} p_j d_j e^{i\omega_j\tau}. \tag{2.22}$$

Avem

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\tau = \sum_{j=1}^{r} p_j d_j i\omega_j e^{i\omega_j\tau} = A \sum_{j=1}^{r} p_j d_j e^{i\omega_j\tau} = Av(\tau),$$

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\tau = Av(\tau). \tag{2.23}$$

Fie $v(\tau) = e^{A\tau} v(0)$ soluția ecuației (2.23) pentru condiția inițială $v(0) = \sum_{j=1}^{r} p_j d_j$. Deoarece d_j sînt vectori liniar independenți și p_j nu sînt toți nuli, rezultă că $v(0) \neq 0$.

Din relația (2.21) obținem

$$R^* v(\tau) = 0 \tag{2.24}$$

sau

$$R^* e^{A\tau} v(0) = 0. \tag{2.25}$$

Deoarece perechea (R^*, A) este presupusă complet observabilă, din (2.25) rezultă $v(0) = 0$. Contradicție. Deci

$$p_j = \lim_{t \to \infty} d_j^* x(t) = 0, \text{ pentru orice } j. \tag{2.26}$$

Din relația (2.19) rezultă că

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{2.27}$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

§3. În cele ce urmează vom aplica teorema 2.2 în două cazuri particulare.

Propoziția 3.1. *Fie sistemul* (2.1), *unde matricele* A, B *și* R *au elemente reale.*

Presupunem că

a) *matricea* A *nu are nici o valoare caracteristică cu partea reală pozitivă, iar valorile caracteristice de pe axa imaginară sînt simple*;

b) (A, B) = *pereche complet controlabilă*;

c) $\varphi_j = \varphi_j(\sigma_j)$ $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *funcția* φ_j *fiind definită și continuă pentru* φ_j *real și are proprietățile*

$$\varphi_j(0) = 0, \quad 0 < \sigma_j \varphi_j(\sigma_j) < \lambda_j \sigma_j^2 \text{ pentru } \sigma_j \neq 0; \tag{3.1}$$

d) (R^*, A) = *pereche complet observabilă.*

Dacă există matricele P *și* Q, $P = \text{diag.}\ (\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$, $\tau_j > 0$, $Q = \text{diag}\ (\theta_1, \ldots, \theta_\nu)$, $\theta_h \geqslant 0$ *astfel încît*;

e) *matricea* $PF^{-1} - \text{Re}(P + sQ)\, G(s)$ *este pozitiv semidefinită pentru orice* s *cu* $\text{Re}\ s > 0$ *și* $\det(sE - A) \neq 0$, *unde* $G(s) = R^* (sE - A)^{-1} B$, $F = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$,

f) $(PR' + QR'A, A)$ = *pereche complet observabilă, atunci soluția nulă a sistemului considerat este asimptotic stabilă în mare.*

Demonstrație. Construim

$$W_j(\varphi, \sigma) = \varphi_j(\sigma_j - 1/\lambda_j \varphi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{3.2}$$

$$W(\varphi, \sigma) = \sum_{j=1}^{\nu} \tau_j W_j(\varphi, \sigma) = \sum_{j=1}^{\nu} \tau_j \varphi_j(\sigma_j - 1/\lambda_j \varphi_j), \quad \tau_j > 0. \tag{3.3}$$

Se observă că

$$W(\varphi, (\sigma(t)), \sigma(t)) \geqslant 0, \tag{3.4}$$

$$W(\varphi(\sigma), \sigma) = 0 \text{ dacă și numai dacă } \sigma \neq 0, \tag{3.5}$$

deoarece $W_j(\varphi_j(\sigma_j), \sigma_j) = 0$ dacă și numai dacă $\sigma_j = 0$, conform (3.1). Atunci

$$\lim_{t\to\infty} W(\varphi(\sigma(t)), \sigma(t)) = 0, \tag{3.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} W_j(\varphi_j(\sigma_j(t)), \sigma_j(t)) = 0, \tag{3.7}$$

$$W_j(\varphi_j(\tilde{\sigma}_j), \tilde{\sigma}_j) = 0, \text{ unde } \tilde{\sigma}_j = \lim_{t\to\infty} \sigma_j(t). \tag{3.8}$$

Rezultă $\tilde{\sigma}_j = 0$ și deci $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t) = 0$, deoarece $\varphi(0) = 0$. Pentru forma pătratică W astfel construită, avem

$$\tilde{K} = \text{diag}\ (-\tau_1/\lambda_1, -\tau_2/\lambda_2, \ldots, -\tau_\upsilon/\lambda_\upsilon), \tag{3.9}$$

$$\tilde{L} = 1/2\ \text{diag}\ (\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon), \tag{3.10}$$

$$\tilde{M} = 0. \tag{3.11}$$

Neliniaritatea φ_k îndeplinește condiția de pozitivitate în raport cu argumentul σ_k de care ea depinde : fiecări neliniarități φ_k îi asociem un parametru $\theta_k \geqslant 0$. Atunci $Q = \text{diag}\ (\theta_1, \ldots, \theta_\upsilon)$.

Fiind îndeplinite ipotezele teoremei 2.2, conform acestei teoreme, pentru ca soluția banală să fie asimptotic stabilă în mare, este suficient să existe parametrii τ_j și θ_k astfel încît matricea $-\tilde{K} - (\tilde{L}' + 1/2sQ)\ G(s) - G^*(s)\ (\tilde{L} + 1/2\bar{s}Q')$ să fie pozitiv definită pentru orice s cu $\text{Re}\, s > 0$ și $\det(sE - A) \neq 0$, iar perechea (U', A) să fie complet observabilă, unde $U = (LM)$, $L = -R\tilde{L} - 1/2A'RQ'$, $M = -R\tilde{M}R'$.

Notînd $P = \text{diag}\ (\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon)$, $F = \text{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_\upsilon)$, putem scrie

$$-\tilde{K} - (\tilde{L}' + 1/2sQ)\ G(s) - G^*(s)\ (\tilde{L} + 1/2\bar{s}Q') = PF^{-1} - \text{Re}(P + sQ)G(s). \tag{3.12}$$

Pentru a termina demonstrația, este suficient să observăm că matricea $M = 0$ și deci ultima condiție de completă observabilitate este echivalentă cu condiția ca perechea $(PR' + QR'A, A)$ să fie complet observabilă dacă folosim notațiile introduse mai sus.

În cele ce urmează studiem cazul particular $m = 2$, $n = 1$ pentru neliniaritățile $\varphi_1 = \sigma^3$, $\varphi_2 = \sigma^5$.

Fie sistemul

$$dx/dt = Ax + b_1\sigma^3 + b_2\sigma^5, \tag{3.13}$$

$$\sigma = c'x. \tag{3.14}$$

Presupunem că matricea A nu are nici o valoare caracteristică cu partea reală pozitivă, iar valorile caracteristice de pe axa imaginară sînt simple :

$$(A, B) = \text{pereche complet controlabilă, unde } B = (b_1, b_2), \tag{3.15}$$

(c', A) = pereche complet observabilă, (3.16)

elementele lui A, B și c fiind reale.

Construit formele pătratice

$$W_1(\varphi, \sigma) = \sigma\varphi_1, \quad W_2(\varphi, \sigma) = \sigma\varphi_2, \quad W(\varphi, \sigma) = \tau_1 W_1 + \tau_2 W_2, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0. \tag{3.17}$$

Evident,

$$W(\varphi(\sigma(t)), \sigma(t)) \geqslant 0, \tag{3.18}$$

și

$$W(\varphi(\sigma), \sigma) = 0 \tag{3.19}$$

dacă și numai dacă $\sigma = 0$.

Pentru W astfel construit

$$\widetilde{K} = 0, \quad \widetilde{L} = 1/2\ (\tau_1, \tau_2), \quad \widetilde{M} = 0. \tag{3.20}$$

Neliniaritățile $\varphi_1 = \sigma^3$ și $\varphi_2 = \sigma^5$ îndeplinesc condițiile de pozitivitate: le facem să corespundă parametrii $\theta_1 \geqslant 0$ și $\theta_2 \geqslant 0$. Atunci $Q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$.

Avem în plus

$$-(L' + 1/2sQ)\,G(s) - G^*(s)\,(\widetilde{L} + 1/2\bar{s}Q') = \\ = -1/2 \begin{pmatrix} 2\mathrm{Re}(\xi_1\gamma_1) & \bar{\xi}_2\bar{\gamma}_1 + \xi_1\gamma_2 \\ \xi_2\gamma_1 + \bar{\xi}_1\bar{\gamma}_2 & 2\mathrm{Re}(\xi_2\gamma_2) \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

unde

$$G(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)), \quad \gamma_1(s) = c'(sE - A)^{-1} b_1, \quad \gamma_2(s) = c'(sE - A)^{-1} b_2, \tag{3.22}$$

$$\xi_j = \tau_j + s\theta_j, \qquad j = 1, 2. \tag{3.23}$$

PROPOZIȚIA 3.2. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* (3.14)—(3.16) *și dacă există parametrii* $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\theta_1 \geqslant 0$, $\theta_2 \geqslant 0$ *astfel încît*

a) (L', A) *pereche complet observabilă, unde* $\widetilde{L} = -c\widetilde{L} - 1/2A'cQ'$ (3.24)

b) $\mathrm{Re}\ (\xi_1\gamma_1) < 0,$ (3.24)

$\mathrm{Re}(\xi_2\gamma_2) < 0,$ (3.25)

$4\mathrm{Re}\,(\xi_1\gamma_1)\ \mathrm{Re}\ (\xi_2\gamma_2) - |\xi_2\gamma_1 + \bar{\xi}_1\bar{\gamma}_2|^2 \geqslant 0,$ (3.26)

pentru orice număr s *cu* $\mathrm{Re}\ s > 0$ *și* $\det(sE - A) \neq 0$, *atunci soluția nulă a sistemului* (3.13) *este asimptotic stabilă în mare.*

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. IAKUBOVICI, *Condiții frecvenționale de stabilitate absolută a sistemelor de comandă cu cîteva blocuri nestaționare liniare sau neliniare* (în lb. rusă), Avtomatika i telemehanika, *6*, 5—30 (1967).

2. A. HALANAY, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, Edit. Academiei, 1963.

3. V. M. POPOV, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, București, Edit. Academiei, 1966.

SIGURANȚA ELEMENTELOR CU FUNCȚIONARE DISCONTINUĂ*)

DE

AL. GHIȚĂ

621.316.7 : 519.2

Acest studiu prezintă un model matematic al siguranței elementelor cu funcționare discontinuă, care determină dependența caracteristicilor de siguranță ale elementului de repartiția duratelor de lucru și pauză și de repartiția duratelor de funcționare fără defecte din intervalele de lucru. Rezultatele obținute permit să se abordeze problema găsirii intervalelor optime de lucru și pauză în raport cu un anumit criteriu de siguranță. Studiul este făcut numai pentru elemente care lucrează pînă la prima defecțiune, dar poate fi extins și la elemente care își restabilesc funcționarea.

1. REPREZENTAREA DURATEI DE FUNCȚIONARE DISCONTINUĂ FĂRĂ DEFECTE

Presupunem că elementul funcționează în intervalele de lucru $[a_i, b_i)$ care alternează cu intervalele de pauză $[b_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$. Fiecare durată de funcționare continuă fără defecte în intervalele de lucru este variabilă aleatoare. Notăm cu ξ_i aceste variabile și ele sînt pozitive și independente, fiind definite pe același cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$.

Evenimentul constînd în nimerirea primului defect al elementului în intervalul $[a_n, b_n)$ presupune apariția simultană a evenimentelor $\{a_i + \xi_i(\omega) \in [a_i, b_i), i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ și $\{a_n + \xi_n(\omega) \in [a_n, b_n)\}$. Fie atunci η o funcție definită pe Ω și cu valori în mulțimea numerelor naturale care satisface relația

$$\eta(\omega) = \min \{i : (a_i + \xi_i)(\omega) \in [a_i, b_i)\} \tag{1}$$

Funcția η astfel definită este variabilă aleatoare discretă. Dacă notăm cu ξ durata de funcționare discontinuă fără defecte și cu δ distribuția Dirack, putem defini ξ cu relația

$$\xi(\omega) = < \delta(i - \eta(\omega)), (a_i + \xi_i)(\omega) > = (a_{\eta(\omega)} + \xi_{\eta(\omega)})(\omega) \tag{2}$$

*) Prin element vom înțelege, ca și în 4. cap. 2, „orice instalație a cărei siguranță se studiază independent de siguranța părților ei componente".

De asemenea, funcția ξ astfel definită este variabilă aleatoare și este evident că poate lua valori numai în mulțimea $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$. (1)și (2) arată că putem exprima duratele de funcționare discontinuă fără defecte, ξ, cu ajutorul duratelor de funcționare continuă, ξ_i, din fiecare interval și al intervalelor însești.

2. DEDUCEREA CARACTERISTICILOR DE SIGURANȚĂ PENTRU VARIABILA ξ

În continuare notăm $b_i - a_i = l_i$, iar $a_{i+1} - b_i = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$ și considerăm că $\{l_i\}_{i\in N}$, $\{p_i\}_{i\in N}$ sînt șiruri de variabile aleatoare pozitive și independente (independența fiind înțeleasă atît între variabilele din șir, cît și între șiruri), avînd funcțiile de repartiție $\{L_i(t)\}_{i\in N}$, $\{P_i(t)\}_{i\in N}$ presupuse derivabile și avînd densitățile $\{l_i(t)\}_{i\in N}$, $\{p_i(t)\}_{i\in N}$. Variabilele aleatoare $\{f_i\}_{i\in N}$ sînt de asemenea pozitive și independente, avînd funcțiile de repartiție $\{F_i(t)\}_{i\in N}$ tot derivabile și avînd densitățile $\{f_i(t)\}_{i\in N}$. Vom nota cu $\{r_i(t)\}_{i\in N}$ ratele variabilelor aleatoare ξ_i și e cunoscut că ele se definesc cu relația $r_i(t) = f_i(t) / [1 - F_i(t)]$. Interesează în aceste condiții să exprimăm caracteristicile variabilei aleatoare ξ, și anume repartiția $F(t)$, densitatea de repartiție $f(t)$, rata variabilei $r(t)$ și durata medie T, precum și caracteristicile, repartiția $G(t)$ și valoarea medie η_{med} ale variabilei aleatoare η, cu ajutorul repartițiilor $\{L_i(t)\}_{i\in N}$, $\{P_i(t)\}_{i\in N}$, $\{F_i(t)\}_{i\in N}$ presupuse cunoscute.

2.1. FUNCȚIA DE REPARTIȚIE

Este prin definiție $F(t) = P\{\omega : \xi(\omega) < t\}$. Dacă notăm cu $A(t) = \{\omega : \xi(\omega) < t\}$ și ținem seama de relația (2) de definire a lui ξ putem scrie că $A(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ unde $A_n(t)$ sînt disjuncte două cîte două și au expresia $A_n(t) = A_n^1(t) \cup A_n^2(t)$ iar $A_n^1(t)$ și $A_n^2(t)$ sînt de asemenea disjuncte și au expresiile

$$A_n^1(t) = \{\omega : (a_i + \xi_i)(\omega) \notin [a_i(\omega), b_i(\omega)); \; i = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$a_n(\omega) \leqslant (a_n + \xi_n)(\omega) < b_n(\omega) < t\},$$
$$A_n^2(t) = \{\omega : (a_i + \xi_i)(\omega) \notin [a_i(\omega), b_i(\omega)); \; i = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$a_n(\omega) \leqslant (a_n + \xi_n)(\omega) < t \leqslant b_n(\omega)\}$$

Atunci $F(t) = P\{A(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n(t)\}$ unde $P\{A_n(t)\} = P\{A_n^1(t)\} + P\{A_n^2(t)\}$.

Aplicînd pentru $A_n^1(t)$ și $A_n^2(t)$ formula probabilității totale, găsim

$$P\{A_n^1(t)\} = \int_{y_n=0}^{t} \int_{x_n=0}^{y_n} \cdots \int_{y_1=0}^{x_2} \int_{x_1=0}^{y_1} P\{x_i \leqslant a_i(\omega) < x_i + \mathrm{d}x_i; \; y_i \leqslant b_i(\omega) <$$
$$< y_i + \mathrm{d}_{y_i};$$

$$i = 1, \ldots, n-1\} \; P\{x_i + \xi_i(\omega) \notin [x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n-1;\ x_n +$$

$$+ \xi_n(\omega) \in [x_n, y_n)\}$$

$$P\{A_n^2(t)\} = \int_{y_n=t}^{\infty} \int_{x_n=0}^{t} \ldots \int_{y_1=0}^{x_2} \int_{x_1=0}^{y_1} P\{x_i \leqslant a_i(\omega) <$$

$$< x_i + \mathrm{d}x_i;\ y_i \leqslant b_i(\omega) < y_i + \mathrm{d}y_i,$$

$$i = 1, \ldots, n-1\} \; P\{x_i + \xi_i(\omega) \notin [x_i, y_i),\ i =$$

$$= 1, \ldots, n-1;\ x_n + \xi_n(\omega) \in [x_n, t)\}$$

Dacă notăm pentru simplificarea scrierii $\bar{a}_n = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{b}_n = (b_1, \ldots, b_n)$; $\bar{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$; $\bar{y}_n = (y_1, \ldots, y_n)$; $\mathrm{d}\bar{x}_n = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$, $\mathrm{d}\bar{y}_n = \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$ iar cu $f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ notăm densitatea comună a vectorilor $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ și dacă ținem seama de independența variabilelor ξ_i, relațiile precedente devin

$$P\{A_n^1(t)\} = \int_{y_n=0}^{t} \int_{x_n=0}^{y_n} \cdots \int_{y_1=0}^{x_2} \int_{x_1=0}^{y_1} \prod_{i=1}^{n-1} [1 -$$

$$- F_i(y_i - x_i)](F_n(y_n - x_n) f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\, \mathrm{d}\bar{x}_n\, \mathrm{d}\bar{y}_n$$

$$P\{A_n^2(t)\} = \int_{y_n=t}^{\infty} \int_{x_n=0}^{t} \cdots \int_{y_1=0}^{x_2} \int_{x_1=0}^{y_1} \prod_{i=1}^{n-1} [1 -$$

$$- F_i(y_i - x_i)] F_n(y_n - x_n) f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\, \mathrm{d}\bar{x}_n\, \mathrm{d}\bar{y}_n$$

Făcînd convenția $[1 - F_0(y_0 - x_0)] \equiv 1$ și introducînd notația

$$\varphi_n(x_n, y_n) = \int_{y_{n-1}=0}^{x_n} \cdots \int_{y_1=0}^{x_2} \int_{x_1=0}^{y_1} \prod_{i=1}^{n-1} [1 -$$

$$- F_i(y_i - x_i)]\, f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\, \mathrm{d}\bar{x}_n\, \mathrm{d}\bar{y}_n \tag{3}$$

rezultă pentru $F(t)$ relația

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{y=0}^{t} \int_{x=0}^{y} \varphi_n(x, y)\, F_n(y - x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \right.$$

$$\left. + \int_{y=t}^{\infty} \int_{x=0}^{t} \varphi_n(x, y)\, F_n(t - x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \right. \tag{4}$$

în care pentru evitarea eventualelor confuzii am scris x și y în loc de x_n și y_n. În această expresie, $\varphi_n(x_n, y_n)$ este necunoscută, întrucît nu se cunoaște densitatea $f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$. Putem înlătura însă această nedeterminare dacă utilizăm proprietatea de independență a variabilelor aleatoare $\{l_i\}_{i \in N}, \{p_i\}_{i \in N}$. Formula A_1 (din anexă) arată că

$$f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n\, \bar{y}_n) = f_{a_1 b_1}(x_1\, y_1) \prod_{i=2}^{n} f_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) \tag{5}$$

în care, conform formulelor A_2 și A_3,

$$\left.\begin{aligned} f_{a_1 b_1}(x_1, y_1) &= f_{a_1}(x_1)\, f_{b_1}(y_1 \mid x_1) \\ f_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) &= f_{a_i}(x_i/\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})\, f_{b_i}(y_i \mid \bar{x}_i, \bar{y}_{i-1}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ținînd seama de modul în care am definit l_i, p_i și de proprietatea de independență a acestora, putem scrie

$$\left.\begin{aligned} f_{b_i}(y_i \mid \bar{x}_i, \bar{y}_{i-1}) &= f_{b_i}(y_i/x_i) = l_i(y_i - x_i), \\ f_{a_i}(x_i/\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) &= f_{a_i}(x_i/y_{i-1}) = p_{i-1}(x_i - y_{i-1}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dacă înlocuim (7) în (6) și apoi (6) în (5) și notăm $f_{a_1}(x_1) = p_0(x_1)$ și $y_0 \equiv 0$, obținem

$$f_{\bar{a}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \prod_{i=1}^{n} l_i(y_i - x_i)\, p_{i-1}(x_i - y_{i-1}). \tag{8}$$

Atunci, dacă înlocuim (8) în (9), separăm integralele și ținem seama de definiția produsului de convoluție, obținem pentru $\varphi_n(x_n, y_n)$ expresia

$$\varphi_n(x_n, y_n) = l_n(y_n - x_n)\,(p_{n-1} \ast [1 - F_{n-1}]\, l_{n-1} \ast \dots$$

$$\dots\, p_1 \ast [1 - F_1]\, l_1 \ast p_0)(x_n). \tag{9}$$

Astfel, $\varphi_n(x_n, y_n)$ este complet determinată, fiind exprimată numai prin funcțiile cunoscute l_i, p_i, F_i. Mai notăm pentru comoditate:

$$\Gamma_n(y) = \int_0^y \varphi_n(x, y)\, F_n(y - x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\theta_n(t, y) = \int_0^t \varphi_n(x, y)\, F_n(t - x)\, \mathrm{d}x,$$

expresii care în baza lui (9) devin

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_n(y) &= (F_n l_n \ast p_{n-1} \ast [1 - F_{n-1}]\, l_{n-1} \ast \dots \ast p_1 \ast [1 - F_1]\, l_1 \ast p_0)(y), \\ \theta_n(t, y) &= (F_n l_n^{y-t} \ast p_{n-1} \ast [1 - F_{n-1}]\, l_{n-1} \ast \dots \ast p_1 \ast [1 - F_1]\, l_1 \ast p_0)(t), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde l_n^{y-t} este definită cu relația $l_n^{y-t}(x) = l_n(y - t + x)$. Cu aceasta $F(t)$ are expresia

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \Gamma_n(y)\, \mathrm{d}y + \int_t^{\infty} \theta_n(t, y)\, \mathrm{d}y \right], \tag{11}$$

de asemenea complet determinată.

2.2 *Densitatea de repartiție.*

Trebuie în prealabil să vedem dacă $F(t)$ este derivabilă. (11) arată că F este o serie de funcții $F = \sum \psi_n$ unde cu ψ_n am notat termenul general al seriei.

Se vede ușor că ψ_n sînt și derivabile și deci F este o serie de funcții derivabile. Din (11) și (10) rezultă că această serie este convergentă în punctul $t = 0$. Dacă, în plus, seria $\sum \psi_n'$ satisface și condiția de convergență uniformă, rezultă că seria $\sum \psi_n$ este uniform convergentă, iar F este derivabilă și $f = F' = \Sigma \psi_n'$. Calculînd ψ_n' după regulile obișnuite, obținem pentru f următorul rezultat

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \theta_n(t, y)\, dy, \tag{12}$$

unde

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_n(t, y) = (f_n l_n^{y-t} \ast p_{n-1} \ast [1 - F_{n-1}] l_{n-1} \ast \ldots \ast p_1 \ast [1 - F_1] l_1 \ast p_0)(t). \tag{13}$$

Cunoscînd expresia densității de repartiție, putem calcula apoi pentru variabila ξ rata $r(t) = f(t)/[1 - F(t)]$. Știind că $\sum \psi_n'$ e o serie de funcții integrabile și presupunînd din nou că această serie este și uniform convergentă, rezultă că f este integrabilă. Aceeași proprietate o are și seria $tf = \sum t \psi_n'$ dacă l_i și p_i au valori medii finite. În aceste condiții putem determina valoarea medie $T = \int_0^{\infty} tf(t)\, dt$ în care $f(t)$ are expresia (12), folosind teorema de integrare termen cu termen.

2.3. CARACTERISTICILE VARIABILEI η

Conform [2 cap. VI], putem caracteriza variabila η prin repartiția $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n h(t - n)$, unde h este distribuția lui Heaviside. De asemenea valoarea medie se va calcula cu relația $\eta_{med} = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$. În ambele expresii, $p_n = P\{\omega : \eta(\omega) = n\}$ și relația (1) arată că $\{\omega : \eta(\omega) = n\} = \{\omega : (a_i + \xi_i)(\omega) \in [a_i(\omega), b_i(\omega)), i = 1, 2, \ldots, n-1 ; a_n(\omega) \leqslant (a_n + \xi_n)(\omega) < b_n(\omega) < +\infty\} = A_n^1(+\infty)$.

Atunci

$$p_n = \int_0^{\infty} \Gamma_n(y)\, dy, \tag{14}$$

cu Γ_n determinat de (10).

3. CAZUL INTERVALELOR DE LUCRU ȘI PAUZĂ NEALEATOARE

Dacă duratele de lucru și pauză sînt variabile nealeatoare de mărime $\{\lambda_i\}_{i\in N}$, $\{\pi_i\}_{i\in N}$, atunci, conform [2 cap. VI], $l_i(t) = \delta_{\lambda_i}(t)$, $p_i(t) = \delta_{\pi_i}(t)$ unde notăm în general cu δ_a distribuția Dirac translată cu a. În cele ce urmează vor fi utile notațiile

$$\alpha_n = \pi_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i + \pi_i);\ \beta_n = \alpha_n + \lambda_n. \tag{15}$$

Interesează în aceste condiții ce devin formulele generale (11), (12) și (14). Este necesar pentru aceasta să determinăm expresiile lui (10) și (13). Vom obține pentru (10)

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_n(y) &= (F_n\,\delta_{\lambda_n} \ast \delta_{\pi_{n-1}} \ast [1 - F_{n-1}]\,\delta_{\lambda_{n-1}} \ast \dots \\ &\quad \dots \ast \delta_{\pi_1} \ast [1 - F_1]\,\delta_{\lambda_1} \ast \delta_{\pi_0})(y),\\ \theta_n(t,y) &= (F_n\,\delta_{\lambda_n+t-y} \ast \delta_{\pi_{n-1}} \ast [1 - F_{n-1}]\,\delta_{\lambda_{n-1}} \ast \dots \\ &\quad \dots \ast \delta_{\pi_1} \ast [1 - F_1]\,\delta_{\lambda_1} \ast \delta_{\pi_0})(t),\end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

iar pentru (13) găsim

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\theta_n(t,y) = (f_n\,\delta_{\lambda_n+t-y} \ast \delta_{\pi_{n-1}} \ast [1 - F_{n-1}]\,\delta_{\lambda_{n-1}} \ast \dots \\ \dots\ \delta_{\pi_1} \ast [1 - F_1]\,\delta_{\lambda_1} \ast \delta_{\pi_1})(t).\end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Pornind de la definiția produsului dintre o distribuție și o funcție, precum și a operației de convoluție, putem deduce imediat că, dacă u și v sînt două funcții indefinit derivabile, atunci $u\delta_a \ast v\delta_b = u(a)\ v\ (b)\ \delta_{a+b}$. Ținînd seama de acest rezultat și de proprietatea de asociativitate a convoluției, deducem din (10') relațiile :

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_n(y) &= \prod_{i=0}^{n-1}[1 - F_i(\lambda_i)]\,F_n(\lambda_n)\,\delta_{\beta_n}(y),\\ \theta_n(t,y) &= \prod_{i=0}^{-1}[1 - F_i(\lambda_i)]\,F_n(\lambda_n + t - y)\,\delta_{\beta_n+t-y}(t).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Avînd în vedere că $\delta_{\beta_n+t-y}(t) = \delta_{\beta_n}(y)$, și calculînd produsul $F_n(\lambda_n + t - y)\,\delta_{\beta_n+t-y}(t)$ deducem pentru $\theta_n(t,y)$ următorul rezultat :

$$\theta_n(t,y) = \prod_{i=0}^{n-1}[1 - F_i(\lambda_i)]\,F_n(t - \alpha_n)\,\delta_{\beta_n}(y). \tag{17}$$

Similar vom deduce pentru (13') expresia

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_n(t,y) = \prod_{i=0}^{n-1}[1 - F_i(\lambda_i)]\,f_n(t - \alpha_n)\,\delta_{\beta_n}(y). \tag{18}$$

Introducînd (16) și (17) în (11) și (14) și ținînd seama că primitiva distribuției Dirac este distribuția Heaviside, obținem ușor pentru $F(t)$ expresia

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] \{F_n(t-\alpha_n) \times \times [h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)] + F_n(\lambda_n) h_{\beta_n}(t)\} \tag{11'}$$

(în care am considerat din nou că $[1 - F_0(\lambda_0)] \equiv 1$), iar pentru p_n găsim

$$p_n = \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] F_n(\lambda_n). \tag{14'}$$

Pentru a calcula densitatea de repartiție cu formula (12) este necesar să demonstrăm convergența uniformă a seriei $\sum \psi_n'$ unde $\psi_n' = \int_t^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \theta_n(t, y)\, dy$. Ținînd seama de relația (18), expresia lui ψ_n' va fi

$$\psi_n'(t) = \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] f_n(t - \alpha_n) [h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)] \tag{19}$$

Se poate vedea ușor că seria numerică $\sum p_n$, unde p_n are acum expresia $p_n = \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] F_n(\lambda_n)$, este convergentă. Atunci, dacă funcțiile $f_n(t)/F_n(\lambda_n)$ au variație mărginită, iar M este un majorant al valorilor lor, rezultă de asemenea ușor că seria $\sum \psi_n'$ este uniform convergentă, avînd expresia

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] f_n(t - \alpha_n) [h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)]. \tag{12'}$$

Menționăm că (12') poate fi obținut și direct din (11'), derivînd în sensul distribuțiilor și utilizînd proprietatea că $F_n(t - \alpha_n)\, \delta_{\alpha_n}(t) = 0$, întrucît $F_n(0) = 0$.

Rezultatele interesante se obțin în cazul nealeator și pentru $r(t)$ și T. Astfel, pentru $r(t)$, conform definiției avem

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] f_n(t - \alpha_n) [h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)] \Big/ \Big\{1 - \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} [1 - F_i(\lambda_i)] [F_j(t - \alpha_j) \times \times (h_{\alpha_j}(t) - h_{\beta_j}(t)) + F_j(\lambda_j) h_{\beta_j}(t)]\Big\}. \tag{20}$$

Dacă în calculul termenului al n-lea din expresia lui $r(t)$ eliminăm toți termenii numitorului care se anulează pentru $t \in [\alpha_n, \beta_n)$, obținem expresia

$$1 - \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} [1 - F_i(\lambda_i)] F_j(\lambda_j) = \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] F_n(t - \alpha_n)$$

Observînd apoi că $\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} [1 - F_i(\lambda_i)] F_j(\lambda_j) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)]$, această expresie devine $\prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)]\,[1 - F_n(t - \alpha_n)]$ care, înlocuită în (19), dă după simplificarea cu $\prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)]$ rezultatul,

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t - \alpha_n)\,[h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)], \tag{21}$$

care indică o comportare tip „conexiune serie", lucru așteptat în baza relației (2).

Conform celor arătate în paragraful 2.3, convergența uniformă a seriei $\sum \psi_n'$ ne permite să scriem pentru T relația

$$T = \int_0^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} t f_n(t - \alpha_n)\,[h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)]\,\mathrm{d}t$$

și, calculînd după o schimbare corespunzătoare de variabilă integrala din termenul general al seriei, obținem

$$\int_0^{\infty} t f_n(t - \alpha_n)\,[h_{\alpha_n}(t) - h_{\beta_n}(t)] = F_n(\lambda_n) + \int_0^{\lambda_n} x f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cu aceasta, expresia lui T, după ce înlocuim și α_n cu expresia sa din (14), devine

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} [1 - F_i(\lambda_i)] \left\{ \left[\pi_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \pi_i) \right] \times F_n(\lambda_n) + \int_0^{\lambda_n} x f_n(x)\,\mathrm{d}x \right\}. \tag{22}$$

Acest rezultat permite acum abordarea următoarei probleme de optim: care sînt intervalele λ_i și π_i ce maximizează funcționala (22)? Remarcăm că o astfel de problemă putea fi pusă și pentru cazul aleator, ceea ce ar fi însemnat căutarea densităților de repartiție $l_i(t)$, $p_i(t)$ optime. Raționamente preliminare și unele lucrări anterioare (vezi, de exemplu, [3 cap. VI]) indică însă că optimul este atins tot în clasa comenzilor l_i, p_i nealeatoare, revenind astfel la optimul lui (22).

ANEXĂ

FORMULE DE CALCUL CU DENSITĂȚI DE REPARTIȚIE CONDIȚIONATE

Considerăm vectorii aleatori $\bar{a}_n = (a_1, \ldots, a_n)$; $\bar{b}_n = (b_1, \ldots, b_n)$, definiți pe același cîmp de probabilitate. Notăm cu $F_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, y_n)$ funcția lor comună de repartiție și cu $f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ densitatea de repartiție corespunzătoare (în care pentru simplitate am notat $\bar{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$; $\bar{y}_n = (y_1, \ldots, y_n)$). Vom înțelege prin $F_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$ și $f_{a_i b_i}(x_i, y_i / /\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$ expresiile

$$F_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}\, \bar{y}_{i-1}) = P\{a_i < x_i;\ b_i < y_i \mid a_k = x_k,\ b_k = y_k;\ k = 1, \ldots, i-1\},$$

$$f_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, y_{i-1}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial y_i} F_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$$

În [6 cap. 3] este stabilită următoarea formulă de calcul cu densități

$$f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = f_{\bar{a}_{n-1} \bar{b}_{n-1}}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1})\, f_{a_n b_n}(x_n, y_n \mid \bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1})$$

Aplicînd succesiv această formulă lui $f_{\bar{a}_k \bar{b}_k}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$; $k = 1, \ldots, n-1$ obținem în final

$$f_{\bar{a}_n \bar{b}_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = f_{a_1 b_1}(x_1, y_1) \prod_{i=2}^{n} f_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}). \qquad (A_1)$$

Tot în [6 cap. 2] se arată că

$$f_{a_1 b_1}(x_1, y_1) = f_{a_1}(x_1)\, f_{b_1}(y_1 \mid x_1), \qquad (A_2)$$

iar în [3 cap. VI] se utilizează următoarea extensie a lui (A_2)

$$f_{a_i b_i}(x_i, y_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) = f_{a_i}(x_i \mid \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})\, f_{b_1}(y_i \mid \bar{x}_i, \bar{y}_{i-1}). \qquad (A_3)$$

Formulele (A_1), (A_2) și (A_3) reprezintă exprimarea în limbajul densităților a rezultatelor corespunzătoare pentru evenimente.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Barlow, F. Proschan, *Mathematical Theory of Realibility*, New York, John Wiley, 1965.
2. R. Cristescu, G. Marinescu, *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor*, București, Ed. Academiei, 1966.
3. A. A. Feldbaum, *Osnovi teorii optimalnih avtomaticeschih sistem*, Ed. Energhia, Moscova, 1966.
4. B. V. Gnedenko, I. K. Beleaev, A. D. Soloviev, *Metode matematice în teoria siguranței* (trad. din l. rusă) București, Ed. tehnică, 1968.
5. M. Iosifescu, Gh. Mihoc, R. Teodorescu, *Teoria probabilităților și statistica matematică*, București, Ed. tehnică, 1966.
6. V. I. Pugacev, *Teoria sluceainih funkții*, Moscova, Fizmatghiz, 1960.

D. F. LĂZĂROIU, „Mașini electrice cu inerție redusă", București, Editura Academiei, 1969, 472 pag., 234 fig.

În această lucrare, autorul conf. dr. ing. D. F. Lăzăroiu, prezintă pe parcursul a șapte capitole, probleme specifice mașinilor electrice neinerțiale și în special mașinilor cu înfășurări realizate pe principiul circuitelor imprimate.

Într-o scurtă introducere, se trec în revistă preocupările constructorilor de mașini electrice de a realiza mașini cu o inerție electromecanică și electromagnetică redusă, necesare în procesele de control și reglare automată din cele mai diferite ramuri ale activității industriale. Sînt descrise mașinile electrice cu întrefier axial realizate pe baza înfășurărilor imprimate, prezentîndu-se avantajele obținute prin adoptarea acestei soluții.

În capitolul 1 se abordează problema înfășurărilor mașinilor cu întrefier axial de inerție redusă. După ce sînt prezentate cîteva generalități privitoare la înfășurările de tip imprimat de curent continuu și de curent alternativ, se stabilesc principiile de dimensionare optimă a unei înfășurări ideale radiale, pe considerente termice. În continuare se trece la dimensionarea înfășurării închise, reale, în condițiile minimului de pierderi electrice. Se precizează forma conductoarelor înfășurării imprimate în zona activă și în zona capetelor de bobină. Considerînd capete în formă de evolventă, pentru a obține o densitate de curent constantă, se stabilesc relațiile geometrice optime pentru indus în funcție de numărul polilor $2p$ și de factorul de umplere k_u. În paragraful următor se recomandă pentru aplicații practice, soluția folosirii unei înfășurări avînd capetele marginale în formă de arce de cerc, deoarece se obțin abateri ale lățimii conductorului în zona capetelor doar de 1,5% față de lățimea medie. Se dau și în acest caz relațiile de determinare a dimensiunilor indusului unei astfel de mașini. După un studiu detaliat al capetelor marginale în formă de evolventă, se face dimensionarea unei înfășurări radiale de tip ondulat, situată pe ambele fețe ale discului indus, avînd capetele marginale de această formă. În funcție de parametrii electromagnetici ai mașinii, se stabilesc : diametrul optim, numărul optim de conductoare și rezistența înfășurării indusului. În continuare se stabilește expresia tensiunilor electromotoare induse în înfășurările radiale. Capitolul se încheie cu prezentarea unor elemente de tehnologia mașinilor electrice cu circuite imprimate. La sfîrșitul capitolului sînt indicate 104 titluri de lucrări din literatura de specialitate, unele fiind elaborate chiar de autor, privitoare la problemele abordate pe cuprinsul capitolului.

În capitolul al doilea, autorul expune o teorie elementară a cîmpului magnetic din întrefier. Sînt abordate, mai întîi, cîteva probleme generale, privitoare la cîmpurile magnetice din întrefierul mașinilor electrice. Se calculează apoi cîmpul magnetic, pentru diferite curbe de repartiție a sa în întrefier. Astfel, se efectuează calculele pentru repartițiile de formă triunghiulară, trapezoidală, dreptunghiulară și trapezoidală în trepte, indicîndu-se de fiecare dată și înfășurarea care asigură forma respectivă a curbei repartiției cîmpului în întrefier. În continuare, se fac cîteva considerații privitoare la cîmpurile înfășurărilor de curent alternativ polifazate și este prezentat calculul cîmpului magnetic învîrtitor circular și al cîmpului magnetic învîrtitor eliptic.

În următoarele două paragrafe, autorul indică o metodă grafică de determinare a tensiunii, cîmpului şi inducţiei magnetice din întrefierul maşinii electrice cu armături plane şi o metodă analitică de calcul a undelor învîrtitoare din întrefier. Sînt prezentate apoi şi cîteva metode de determinare experimentală a cîmpului magnetic din întrefier, cu exemplificări pentru o maşină de curent continuu cu întrefier axial, avînd sistemul inductor alcătuit din magneţi permanenţi. O listă cuprinzînd 43 indicaţii bibliografice încheie acest capitol.

În capitolul al treilea, autorul se ocupă de problemele inductivităţilor maşinilor electrice cu întrefier axial. Într-o primă parte generală, se definesc inductivităţile care apar, factorul de cuplaj şi cel de dispersie. Sînt prezentate apoi procedeele de calcul ale inductivităţilor proprii şi mutuale fazice şi ale inductivităţilor învîrtitoare. Se deduc relaţii de calcul pentru fiecare caz în parte şi sînt prezentate numeroase tabele şi figuri explicative care înlesnesc folosirea procedeelor respective. Capitolul este completat de o listă cuprinzînd 7 indicaţii bibliografice.

Problemele legate de cuplul maşinilor electrice cu întrefier axial sînt abordate în capitolul al patrulea. Autorul determină cuplul maşinilor electrice pe baza teoremelor forţelor generale. Se particularizează apoi pentru cazul sistemelor cu solenaţie superficială plană. Se mai prezintă determinarea cuplului static de sincronizare a motorului pas cu pas cu înfăşurare imprimată şi al maşinilor toroidal-plane cu circuite imprimate. Capitolul conţine la sfîrşit o listă cu 22 indicaţii bibliografice.

Prezentarea elementelor de calcul ale maşinilor electrice, cu întrefier axial de inerţie redusă, constituie obiectul celui de al cincilea capitol. Pe baza rezultatelor obţinute în primul capitol, privind dimensionarea înfăşurărilor radiale, în diverse ipoteze privind capetele marginale, în acest capitol este abordată problema celorlalte elemente care intră în calculul unei astfel de maşini electrice. Se propune pentru poli o formă poligonală, formă care se pretează bine în cazul acestor maşini. Într-un alt paragraf, autorul determină constantele de timp electromecanice şi electromagnetice pentru cazurile studiate. Este prezentată şi o metodă de calcul a maşinilor axiale cu inerţie redusă, pornind de la datele unei maşini clasice echivalente, efectuînd o transformare calitativă a armăturilor radiale în armături axiale şi invers, folosind reprezentarea conformă. Se stabileşte astfel echivalenţa dintre maşina clasică şi cea cu întrefier axial. Problema încălzirii maşinilor electrice cu întrefier axial şi circuite imprimate, este tratată pe larg în această lucrare.

Un alt paragraf cuprinde calculul pierderilor prin curenţi turbionari în înfăşurarea axială cu circuite imprimate, dat fiind faptul că acestea constituie componenta principală a pierderilor în gol la motoarele cu bobinaj imprimat.

Luînd în consideraţie particularităţile circuitului magnetic al maşinii frontale, pentru determinarea fluxurilor de dispersie, sînt deduse relaţiile de calcul ale permeanţei specifice dintre miezurile polare. Capitolul se încheie cu prezentarea unor elemente de proiectare a motoarelor de curent continuu cu întrefier axial şi circuite imprimate, dîndu-se cîteva indicaţii de proiectare şi pentru motoarele asincrone de curent alternativ cu întrefier axial. La sfîrşitul capitolului sînt indicate 105 titluri bibliografice.

Caracteristicile maşinilor electrice cu inerţie redusă sînt descrise în capitolul al şaselea, punîndu-se în evidenţă particularităţile ce le au faţă de celelalte tipuri de maşini. Sînt prezentate caracteristicile servomotoarelor de curent continuu cu înfăşurări imprimate, cu comanda prin indus sau prin inductor şi ale servomotoarelor de curent alternativ asincrone bifazate, cu rotor în formă de pahar şi cu rotorul disc. Lista bibliografică ce încheie acest capitol cuprinde 45 de titluri.

Lucrarea se încheie cu un capitol privitor la principalele aplicaţii ale motoarelor cu inerţie redusă. Sînt indicate numeroase domenii de aplicare, punîndu-se în evidenţă posibilităţile largi de utilizare ale motorului de curent continuu cu circuite imprimate, considerat de autor ca prototipul ideal de servomotor. Expunerea este însoţită de multe exemple bazate pe construcţii rea-

lizate ale unor asemenea motoare. Cele 29 indicații bibliografice, care încheie capitolul, pot reprezenta pentru cititor un material important de documentare în legătură cu aplicațiile acestor mașini.

La sfîrșitul lucrării, într-o anexă, sînt date tabelele valorilor funcției evolventei, necesare în calculul de proiectare a unei asemenea mașini.

Lucrarea prezintă într-un mod unitar problemele specifice mașinilor neinerțiale, în special ale celor cu înfășurări imprimate, fiind rezultatul preocupărilor autorului, de-a lungul mai multor ani, în acest domeniu. Totodată lucrarea sintetizează rezultatele activității de cercetare efectuată de autor în acest domeniu precum și materialele publicate în decursul ultimilor ani în revistele tehnice și în monografiile de specialitate din diferite țări.

Cartea se adresează unui cerc larg de cititori, interesînd pe toți cei care cercetează, proiectează, construiesc sau utilizează aceste tipuri de mașini electrice.

Aurel Dobraniș

B. GRÜMWALD, „Teoria — Construcția și calculul motoarelor pentru autovehicule rutiere". Editura Didactică și Pedagogică, București 1969, 959 pg., 944 figuri, 10 anexe, 12 tabele

Lucrarea „Teoria — Construcția și calculul motoarelor pentru autovehicule rutiere" este o lucrare didactică elaborată pe scheletul programei analitice a secției de autovehicule rutiere a Institutului politehnic din București.

O examinare mai atentă arată că acest obiectiv este cu mult depășit în sensul că autorul a reușit o sinteză a unui material vast aducînd lucrarea discutată la nivelul unei monografii.

Lucrarea este organizată în patru secțiuni și conține și o serie de anexe.

Secțiunea I „Noțiuni generale — procese termice și caracteristici" prezintă teoria motorului cu ardere internă pentru tracțiune rutieră. Se remarcă de la început atenta definire a termenilor, autorul folosind un nomenclator pus la punct în cadrul catedrei de motoare cu ardere internă a Institutului politehnic din București. Evoluțiile reale ale ciclului sînt urmărite după succesiunea lor în timp făcîndu-se mai întîi o prezentare fenomenologică; se arată metodele moderne de calcul, autorul insistînd în anumite situații asupra unor ecuații obținute în cazul ipotezelor simplificatorii, ecuații care însă permit să se efectueze un calcul mai rapid.

Se prezintă de asemenea date practice și scheme de dispozitive și organe care contribuie la realizarea evoluțiilor reale, insistîndu-se asupra mijloacelor de îmbunătățire a proceselor.

Dezvoltată pe 3 capitole, bazele fizico-chimice ale procesului de ardere, arderea în motorul cu aprindere prin scînteie și arderea în motorul cu aprindere prin comprimare, studiul proceselor de transformare chimică care au loc în motor prezintă cele mai importante aspecte ale proceselor de ardere. Se remarcă atenta tratare a diferitelor puncte de vedere legate de interpretarea fenomenelor complexe din procesul de ardere cît și prezentarea unor metode de calcul a desfășurării acesteia.

Secțiunea I a lucrării se încheie cu prezentarea modului de determinare a dimensiilor fundamentale ale motorului și cu o sintetică, dar completă prezentare a diferitelor moduri de a prezenta caracteristicile motorului.

Secțiunea aII-a tratează „Dinamica construcția și calculul mecanismului motor".

Se prezintă suficient de aprofundat studiul cinematic al motorului, forțele și momentele care acționează asupra mecanismului motor. Autorul atacă teoria echilibrării motoarelor particularizînd-o pentru tipurile de motoare specifice transportului rutier.

Interesante și utile pentru proiectant sînt problemele privitoare la regimul de calcul și particularitățile calculului de rezistență ale organelor mecanismului motor.

În continuare se prezintă în capitole separate pistonul, bolțul, segmenții, biela, arborele cotit și părțile fixe ale mecanismului motor.

La fiecare din aceste organe autorul arată funcțiile care trebuie să le îndeplinească și condițiile de funcționare. Această analiză aprofundată conduce la elaborarea metodei de calcul pe care autorul o prezintă detaliat în ceea ce privește principiile și apoi concentrat, sub formă de tabele de formule, pentru a permite o realizare rapidă a calculului. Fiecare tablou de asemenea formule, constituind de fapt metodologii de calcul, conține și precizarea valorii constantelor din formule, ceea ce evident contribuie la eficiența acestor sinteze de calcule. Se prezintă apoi materialele utilizate, tipuri constructive cu ilustrări pînă la desene de execuție luate din construcțiile indigene; se dau detalii privind tehnologia de fabricație.

Se remarcă în mod special dezvoltarea în adîncime a capitolului privitor la segmenți unde se arată diferite ipoteze de calcul a acestuia, forma segmentului, modul de ungere al segmentului și vibrația radială a acestuia.

Secțiunea a III-a a lucrării tratează „Sistemele auxiliare ale motoarelor cu ardere internă".

Se studiază distribuția, alimentarea motoarelor, ungerea, răcirea și pornirea motoarelor.

La fiecare capitol se prezintă elemente de calcul, tipuri constructive, realizări indigene. La descrierea tipurilor constructive autorul găsește posibilitatea de a introduce, foarte judicios, elemente de construcții noi care arată căi pentru rezolvarea diferitelor nevoi tehnice.

Se remarcă în mod deosebit studiul sistemelor de filtrare care este tratat mai întîi la nivelul cunoștințelor fundamentale pentru a se putea expune o teorie a filtrării.

Secțiunea a IV-a „Probleme speciale ale motoarelor de autovehicule rutiere", prezintă supraalimentare, regimul de accelerare, formule constructive de motoare.

Aceste probleme sînt tratate de autor prin prisma îmbunătățirii și dezvoltării motoarelor arătîndu-se direcții de cercetare sau tendințe.

Lucrarea cuprinde 10 anexe care de fapt completează în diverse moduri capitole ale cursului.

Se studiază astfel termodinamic performanțele motorului, se cercetează pe larg baleiajul la motoarele în doi timpi; se prezintă metoda dezvoltată de autor pentru prelucrarea diagramei indicate cu ajutorul calculatoarelor numerice. Acest prim grup de anexe completează, împreună cu anexa privitoare la corectarea caracteristicilor, partea de teorie a motorului.

Autorul a considerat că este necesar să se dezvolte partea de calcul cu o anexă care să prezinte mai detaliat vibrațiile la torsiune ale arborelui cotit.

Secțiunea a III-a a lucrării este reprezentată de asemenea prin cîteva anexe. Pe lîngă studiul carburatorului și al fenomenelor perturbatorii în sistemul de injecție, se relevă studiul amortizoarelor de zgomot (unde se prezintă și teoria amortizării zgomotului), injecția de benzină (cu analiză a celor mai fructuoase realizări în domeniu) și calculul și construcția filtrelor (unde se examinează cu atenție filtrele de aer, combustibil și ulei).

Lucrarea se încheie cu cîteva tabele unde se prezintă unele mărimi termodinamice și funcții necesare în calculul cinematic al motorului.

Lucrarea, scrisă clar și cu o deosebită competență face apel la o vastă bibliografie, prezentată pe capitole, bibliografie care urmărește și indicarea contribuțiilor românești.

Specificul acestei lucrări necesită o amplă ilustrare grafică ; autorul a folosit în acest sens ceea ce este mai reprezentativ în literatura universală şi ceea ce este mai remarcabil în literatura noastră. Se evidenţiază prezentarea grafică, după literatură a unor fenomene recent studiate, cum ar fi filmele colorate privitoare la fenomenul de ardere.

Studierea atentă a lucrării de faţă ne arată că autorul a reuşit să trateze atît probleme fundamentale cît şi aspecte aplicative într-o perfectă corelaţie efectuînd prin aceasta o muncă de sinteză care dă lucrării o valoare suplimentară.

C. A. Vasilescu şi V. Pimsner

REZUMATELE ARTICOLELOR APĂRUTE ÎN „REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES", SÉRIE ELECTROTECHNIQUE ET ÉNERGETIQUE, TOM. 16, NR. 2, 1970

Al. TIMOTIN

621.315.09.017.21

Asupra programării undelor pe o linie unifilară cu întoarcere prin sol

Teoria parametrilor lineici tranzitorii este aplicată la studiul propagării unei unde directe de tensiune, cu front inițial dreptunghiular, pe o linie unifilară cu pierderi în conductor și în sol. Se dezvoltă succesiv o metodă de iterație, valabilă pentru valori destul de mari ale timpului, o metodă asimptotică, valabilă pentru frontul undei și o metodă aproximativă, bazată pe o anumită aproximație instantanee a rezistenței tranzitorii a liniei și valabilă pentru ori ce valoare a timpului.

G. DRĂGAN și N. GOLOVANOV

621.3.011.4 : 621.3.045

Calculul capacității unei spire

În lucrare se determină, printr-o metodă iterativă, expresia capacității între două spire și între o spiră și pămînt în cazul a n spire coaxiale de același diametru și în cazul cînd raza conductorului spirei are o dimensiune bine definită, ne neglijabilă. În acest scop se utilizează metoda imaginilor și rațiile de capacități ale lui Maxwell stabilindu-se expresia potențialului unei spire față de o altă spiră sau față de pămînt, în funcție de sarcinile de pe spire și de coeficienții de potențial corespunzători ; avînd aceste relații se deduce ușor capacitatea spirei față de altă spiră sau față de pămînt.

G. DRĂGAN

537.523.3

Asupra descărcării corona în cazul a două conductoare paralele

În lucrare se studiază descărcarea corona bipolară de curent continuu în cazul a două conductoare paralele. Deoarece ipoteza lui Deutsch (conform căreia configurația cîmpului electric după apariția descărcării corona, nu se modifică) nu este valabilă se rezolvă ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul trei obținută, prin aproximații succesive, luîndu-se în considerare o condiție suplimentară și anume, repartiția sarcinilor spațiale în jurul conductorului.

Se determină expresia potențialului într-o primă aproximație și expresia densității de sarcină electrice spațiale, prin două aproximații, ceea ce pentru o primă etapă e suficient.

Pe aceeași cale se pot determina aproximațiile de ordinul doi, respectiv de ordinul trei.

ANDREI NICOLAIDE

621.3.013 : 537.212.001.5

Studiul cîmpului electromagnetic în interiorul unui canal magnetohidrodinamic liniar

În aplicațiile tehnice constituite de pompe electromagnetice, debitmetrele electromagnetice, generatoare magnetohidrodinamice, este necesar să se cunoască repartiția potențialului electric în interiorul canalului, pentru a putea calcula performanțele instalației.

În literatură, pentru a putea găsi soluția problemelor de acest tip, se folosește dezvoltarea în serie trigonometrică a expresiei potențialului, ceea ce conduce la soluții complicate, cu o valabilitate limitată la cazurile particulare studiate, iar expresiile obținute nu sînt convenabile pentru calculele numerice.

În lucrarea de față se stabilește expresia potențialului pentru ori ce formă a condițiilor de frontieră, utilizînd o metodă de calcul perfecționată și se obține rezultatul sub forma unei simple cuadraturi care se exprimă apoi ca o sumă finită cu un număr mic de termeni, ceea ce reprezintă o soluție generală și convenabilă pentru ori ce calcule numerice.

AD. CUPȘA

621.317.785 : 621.3.016.1

Contribuții la calculul cuplului activ al mecanismelor de inducție cu disc

Lucrarea de față își propune stabilirea analitică mai exactă a cuplului activ la mecanisme de inducție cu disc, pornind de la aproximarea formei reale dreptunghiulare a pieselor polare prin patrulatere curbilinii. În aceste condiții, studiul se poate face exact integrînd ecuațiile lui Maxwell în coordonate polare r și φ evitînd totodată existența în soluție a unei duble serii Fourier.

Procedeul de calcul preconizat se poate extinde ușor și în cazul altor sisteme constructive de dispunere a pieselor polare.

S. BUCURENCIU şi A. CRĂCIUNESCU

621.3.016.1 : 621.313.39

Expresia cuplului electromagnetic datorat anizotropiei de formă

Se stabileşte expresia calitativă a cuplului electromagnetic produsă în conformitate cu procedeul de anizotropie de formă, procedeu care stă la baza maşinilor electrice rotative la întrefierul neuniform (maşina sincronă reactivă, maşina Fransua). Tratarea este făcută pe cale termodinamică, în cadrul teoriei cîmpului electromagnetic, spre deosebire de cea obişnuită în cadrul teoriei circuitelor electrice cu parametrii variabili. Se stabileşte aceeaşi formulă a cuplului electromagnetic prin metoda tensiunilor maxwelliene. Expresia obţinută este necesară pentru o prezentare unitară modernă a teoriei maşinilor electrice în cadrul teoriei cîmpului electromagnetic.

MIHAI VASILIU

538.551.3

Răspunsul de regim permanent al sistemelor liniare la excitaţii periodice nesinusoidale

Scopul acestui articol este de a prezenta o metodă generală de determinare a răspunsului de regim permanent al sistemelor lineare, cu parametrii invarianţi în timp, cauzale, strict stabile, la excitaţii periodice nesinusoidale. Metoda propusă este o metodă de analiză în domeniul frecvenţei bazată pe funcţii de transfer.

V. NITU

621.311.161

Studiul unitar al siguranţei sistemelor energetice

Articolul expune necesitatea tratării unitare a siguranţei sistemelor energetice.

Interdependenţa diferitelor studii care se întocmesc pentru fiecare etapă a dezvoltării sistemului energetic este reflectată în schemele logice de calcul prezentate în articol.

Asocierea conceptului de siguranţa nodurilor sistemului energetic permite optimizarea soluţiilor tehnice cari se dau pentru alimentarea consumatorilor din fiecare zonă.

Analiza metodelor de calcul folosite la determinarea prognozei, a rezervelor de putere, a siguranţei nodurilor sistemului energetic a permis selectarea metodelor de calcul cele mai eficiente.

A. COGĂLNICEANU, R. EGYED

621.311

PRELIMINAREA FORMEI CURBELOR DE SARCINĂ

Pentru preliminarea formei curbelor de sarcină în perspectivă, în lucrare se prezintă o metodă sintetică, statistică-probabilistică, bazată pe interdependența indicilor caracteristici ai curbelor de sarcină și pe cunoașterea în etapa considerată a anumitor indicatori sintetici generali (consumul total preliminat de energie, ritmul de creștere al sarcinii anuale maxime, durata de utilizare a sarcinii maxime etc.).

Metoda este expusă utilizîndu-se valorile caracteristice ale curbelor de sarcină înregistrate în România în perioada 1959—1968.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 237—250, București, 1970

V. NIȚU

620.9 : 621.316.26

INFLUENȚA LUNGIMII LINIILOR ELECTRICE ASUPRA SIGURANȚEI SCHEMELOR ELECTRICE

În scopul măririi preciziei calculelor de siguranță a schemelor electrice, se propune luarea în considerare a influenței lungimii liniilor asupra indicatorilor de siguranță a întrerupătoarelor. Calculele efectuate au arătat că această influență poate atinge valori mergînd pînă la 25% în comparație cu valorile obținute prin neglijarea acestei influențe asupra intensității de indisponibilitate a întrerupătorului.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 251—257, București, 1970

C. HAIDUC, L. CONSTANTINESCU, D. MIHAI

338.4 : 621.039.516

ANALIZA EFICACITĂȚII CICLURILOR DE COMBUSTIBIL NUCLEAR PENTRU REACTORI MODERAȚI CU APĂ GREA ÎN CONDIȚIILE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

În lucrare se prezintă modelul matematic pentru analiza eficacității ciclurilor de combustibil la reactorii nucleari energetici. Se dă programul de calcul pe calculatorul electronic cifric CIFA-102 și rezultatele utilizării modelului pentru ciclurile de combustibil ale reactorilor nucleari moderați cu apă grea în condițiile din Republica Socialistă România. Analiza efectuată a dat posibilitatea de a se analiza influența reciprocă a unui număr mare de parametri ai ciclului de combustibil nuclear și a numărului de încărcături parțiale cu combustibil asupra eficacității ciclurilor de combustibil ale diferitelor tipuri de reactori nucleari energetici.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 259—272, București, 1970

N. PĂNOIU, ST. KÓȘA

662.921

INFLUENȚA VITEZEI MEDIULUI DE ANTRENARE A SUSPENSIEI SOLIDE ASUPRA FUNCȚIONĂRII FOCARULUI-CICLON ORIZONTAL ÎN REGIM IZOTERMIC BIFAZIC

Se analizează comparativ funcționarea focarului-ciclon orizontal în regim monofazic și bifazic. Se prezintă influența vitezei mediului de antrenare asupra traiectoriilor radiale la diverse concentrații ale suspensiei solide. Se compară rezultatele teoretice cu cele experimentale și se prezintă dependețe experimentale privind influența vitezei de insuflare a mediului de antrenare asupra unor parametri funcționali ai ciclonului (debit insuflat, presiune la periferie, grad de separare).

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 273—286, București, 1970

C. COROIU

662.921

INTERDEPENDENȚA DINTRE PARAMETRII STRUCTURALI ȘI CARACTERISTICILE ENERGETICE ALE COMBUSTIBILILOR SOLIZI

În lucrare se tratează interdependența dintre parametrii structurali și caracteristicile energetice ale combustibililor solizi.

Se propune introducerea unor parametrii structurali care să țină cont de natura grupelor funcționale oxigenate și un mod de reprezentare a masei organice a combustibililor solizi prin formule chimice structurale raportate. De asemenea se propune o diagramă pentru calcularea coeficientului λ din ecuația lui Van Krevelan pentru căldura de combustie, ceea ce conduce la creșterea preciziei calculelor.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 287—297, București, 1970

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU

532.43.038

CURGEREA PRIN CONDUCTE DE SECȚIUNE VARIABILĂ CU SCHIMB DE CĂLDURĂ ȘI FRECARE

Lucrarea urmărește stabilirea relațiilor de calcul a dependenței dintre parametrii funcționali și constructivi ai curgerii cu frecare prin conducta de secțiune variabilă a unui gaz perfect care schimbă căldură cu exteriorul. În cadrul ipotezei curgerii monodimensionale, după precizarea ecuațiilor de schimb de căldură și a lucrului mecanic de frecare se determină ecuația diferențială a variației presiunii, vitezei etc., care este apoi integrată în cadrul unor ipoteze simplificatorii variabile în numeroase cazuri concrete.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 299—305, București, 1970

C. HAIDUC, E. LICSANDRU

536.24 : 621.039

ANALIZA TERMODINAMICĂ A CICLURILOR CU ABUR SATURAT ȘI A CICLURILOR TERMICE DIRECTE PENTRU CENTRALELE NUCLEARE-ELECTRICE

În lucrare se prezintă metoda de analiză termodinamică a ciclurilor cu abur saturat și a ciclurilor termice directe pentru centralele nucleare-electrice. Se dau ecuațiile complexe pentru randamentele termice și nete ale C.N.E. în funcție de un număr mare de parametri ai ciclurilor termice, ai reactorului și ai generatorului de aburi. Se prezintă rezultatele analizei termodinamice efectuate cu metoda menționată pentru cele două tipuri de cicluri. Metoda propusă permite determinarea mărimilor η_b, η_m, η_e, η_t, η_r, η_{ga} și ψ, și optimizarea parametrilor diferitelor tipuri de C.N.E. cu reactori cu neutroni termici sau cu reactori rapizi reproducători.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 307—322, București, 1970

RASIN GEORGESCU

536.24 : 621.03

CONSIDERAȚII ASUPRA MECANISMULUI DE APARIȚIE A INSTABILITĂȚILOR SUB FORMĂ OSCILATORIE LA UN SISTEM BIFAZIC FIERBĂTOR APĂ-ABUR

Articolul prezintă un mecanism nou care explică comportarea instabilităților de tip oscilatoriu a unui sistem bifazic fierbător apă-abur. Compararea valorilor experimentale cu valorile frecvențelor calculate cu ajutorul mecanismului propus arată o concordanță foarte bună.

Se calculează de asemenea valorile razei inițiale de formare a bulelor de abur, care corespund foarte bine ca cele utilizate de Plesset și Zwick.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 323—330, București, 1970

VIRGIL BARBU

532.56

ASUPRA NUCLEAȚIEI BULELOR CAVITAȚIONALE

Lucrarea prezintă un studiu experimental și teoretic asupra transferului termic și asupra condițiilor de nucleație a bulelor de vapori în zona deformațiilor elastice și plastice ale suprafeței purtătoare.

Sînt scoase în evidență unele aspecte interesante pentru cunoașterea fenomenului nucleației, printre care raza echivalentă a suprafeței de contact, zona de activare a centrelor de nucleație sub influența supraîncălzirii peretelui, influența microgeometriei cavității, a unghiului de contact și a temperaturii de echilibru.

St. cerc. ener. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 331—354, București, 1970

L. TEODORESCU

621.43.038

INFLUENȚA UNOR ELEMENTE GEOMETRICE ALE PULVERIZATORULUI ASUPRA PROCESELOR DIN MOTOR

Se prezintă rezultatele de sinteză ale cercetărilor experimentale, efectuate pe un monocilindru, care pun în evidență influențe diferențiată a parametrilor geometriei secțiunii de curgere la pulverizator asupra caracteristicilor jetului, procesului de ardere și performanțelor motorului.

Se prezintă influența jocului din zona cilindrică a știftului acului pulverizatorului asupra dinamicii structurii jetului în diferite etape ale evoluției acestuia, asupra penetrației și formei jetului, asupra întîrzierii la aprindere, duratei injecției și decalajului dintre începutul refulării la pompă și începutul creșterii de presiune la pulverizator, precum și asupra puterii și economicității motorului.

În același mod se prezintă și influențe exercitată de unghiul conului final al știftului, punîndu-se în evidență condițiile care determină plaja optimă de calorii ale acestor parametri pentru o construcție de motor dată.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 355—365, București, 1970

R. DELCESCU

621.432

CALCULUL FUNCȚIONAL AL SEGMENȚILOR DE PISTON CU CONSIDERAREA PULSAȚIEI

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a presiunii în lungul segmenților pe durata unui ciclu motor și a mișcării pe care segmenții o execută în canale sub acțiunea forțelor aplicate asupra sa.

Se tratează cazul mai general al unui set de segmenți aflat într-un moment oarecare al duratei lor de serviciu cînd presiunea radială și uzura diferă de la un segment la altul.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 367—384, București, 1970

C. I. MOCANU

538.542 : 621.3.001

REGIMURILE TRANZITORII ALE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE

Autorul elaborează o teorie unitară a regimurilor tranzitorii peliculare a cîmpului electromagnetic în conductoarele cu suprafețe regulate și fundamentează conceptele de refulare local normală și total normală, local netă și total netă. În aceste regimuri, variațiile spațiotemporale ale mărimilor de stare a cîmpului electromagnetic se pot urmări în lungul normalelor interioare pînă în centrele de curbură, iar vectorul lui Poynting e normal pe suprafața conductorului.

Se integrează ecuațiile de difuzie pentru problema bidimensională și în două cazuri particulare ale problemei tridimensionale.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 385—413, București, 1970

C. IONESCU

621.3.001 : 621.3.018 : 4.538.542

STUDIUL FORȚELOR ELECTRODINAMICE ÎN CAZUL UNUI SISTEM TRIFAZAT DE CONDUCTOARE PARCURSE DE CURENT SITUATE ÎN INTERIORUL UNUI ECRAN DREPTUNGHIULAR SUBȚIRE, FĂRĂ PEREȚI DESPĂRȚITORI

În lucrare au fost calculate forțele care se exercită între conductoare și între conductoare și ecran la diferite cazuri de scurtcircuit. Compararea rezultatelor obținute astfel cu valorile forțelor în cazul aceloraşi bare neecranate a permis să se constate avantajul din acest punct de vedere al folosirii ecranelor.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 415—431 Bucureşti, 1970

EMILIA WAGNER

621.3.015.3 : 538.566

CALCULUL SUPRATENSIUNILOR DE COMUTAȚIE LA CONECTAREA PRIN REZISTENȚĂ A LINIILOR DE ÎNALTĂ TENSIUNE

În lucrare se urmărește determinarea valorii optime a rezistențelor folosite la punerea sub tensiune a liniilor de înaltă tensiune Sînt calculate supratensiunile în etapa conectării liniei cu rezistența în serie şi în etapa cînd se scurtcircuitează aceasta. Din condiția ca supratensiunile din cele două etape să fie minime, se determină valoarea optimă a rezistenței, care rezultă întotdeauna mai mică decît impedanța de undă a liniei. Pentru valoarea optimă a rezistenței sînt calculate supratensiunile maxime în funcție de lungimea liniei.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 433—448, Bucureşti, 1970

EDMOND NICOLAU

621.396.671.001.11 : 517.9

METODA TRANSFORMATEI INTEGRALE ÎN SINTEZA RADIATOARELOR FILIARE RECTILINII

Scopul articolului este de a demonstra posibilitatea utilizări transformatei Fourier pentru a sintetiza un radiator rectiliniu filiar cu o caracteristică de radiație plană dată.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 449—458, Bucureşti, 1970

TUDOR IONESCU

517.9 : 316.7

CONDIȚII SUFICIENTE DE HIPERSTABILITATE PENTRU SISTEME DISCRETE CU PARAMETRII VARIABILI

În acest articol se studiază hiperstabilitatea sistemelor discrete multiple cu parametrii variabili. Se obțin condiții suficiente de hiperstabilitate pentru unele clase particulare de astfel de sisteme.

În final se dă, ca aplicație, o propoziție de stabilitate simplă a unor blocuri discrete multiple.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 459—466, Bucureşti, 1970

CORNEL VASILE

517.9 : 621.316.7

REZOLVAREA PROBLEMEI GENERALE A STABILITĂȚII ABSOLUTE CU AJUTORUL TEORIEI HIPERSTABILITĂȚII

În lucrare se rezolvă cu ajutorul teoriei hiperstabilității problema stabilității absolute a sistemelor de reglare automată pentru o clasă largă de neliniarități, clasă introdusă de V.A. Iakubovici și care cuprinde în particular clasa neliniarităților considerate de V.M. Popov în lucrările sale.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 467—477, București, 1970

AL. GHIȚĂ

621.316.7 : 519.2

SIGURANȚA ELEMENTELOR CU FUNCȚIONARE DISCONTINUĂ

Acest studiu prezintă un model matematic al siguranței elementelor cu funcționare discontinuă, care determină dependența caracteristicilor de siguranță ale elementului de repartiția duratelor de lucru și pauză și de repartiția duratelor de funcționare fără defecte din intervalele de lucru. Rezultatele obținute permit să se abordeze problema găsirii intervalelor optime de lucru și pauză în raport cu un anumit criteriu de siguranță. Studiul este făcut numai pentru elemente care lucrează pînă la prima defecțiune, dar poate fi extins și la elemente care își restabilesc funcționarea.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 479—487, București, 1970

A. COGĂLNICEANU, R. EGYED

621.311

VORAUSBESTIMMUNG DER FORM VON BELASTUNGSKURVEN

Es wird eine synthetisch-statistische Methode zur Vorausbestimmung der Form von Belastungskurven gezeigt, welche sich auf den Zusammenhang zwischen den charakteristischen Kennwerten der Belastungskurven und den allgemeinen synthetischen Kennwerten (voraussichtlicher Energieverbrauch, jährliche Zuwachsquote der Höchstlast usw.) stützt. Zwecks Ausführung werden die charakteristischen Kennwerte der Belastungskurven Rumäniens in den Jahren 1958—1969 gebraucht.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 237—250, București, 1970

V. NITU

620.9 : 621.316.26

INFLUENCE OF THE LENGTH OF TRANSMISSION LINES ON THE RELAIBILITY OF ELECTRIC CONFIGURATIONS

The author suggests the introduction of the influence of the length of transmission lines on the reliability parameters of the circuit breakers to which they are connected in the calculation of the reliability of electric configurations. The computations carried out have shown that this influence may attain values of up to 25% of the values obtained when neglecting this influence on the circuit breaker unavailability.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 251—257, București, 1970

К. ХАЙДУК, Л. КОНСТАНТИНЕСКУ, Д. МИХАЙ

338.4 : 621.039.516

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЯДЕРНЫХ ТОПЛИВНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ ТЯЖЕЛОВОДНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ В УСЛОВИЯХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕСПУБЛИКИ РУМЫНИИ

Дается математическая модель для анализа эффективности топливных циклов для ядерных энергетических реакторов. Приводится программа расчета для электронно-цифровой вычислительной машины CIFA-102 и результаты применения модели для топливных циклов ядерных реакторов с тяжеловодным замедлителем в условиях СР Румынии.

Проведенный анализ выявил большие возможности модели для анализа взаимного влияния большого числа параметров ядерного топливного цикла и влияние числа частичных топливных перегрузок топлива на эффективность топливных циклов для различного типа ядерных энергетических реакторов.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 259—272, Bucureşti, 1970

N. PĂNOIU, ST. KOŞA

662.921

L'INFLUENCE DE LA VITESSE DU MILIEU ENVIRONNANT D'ENTRAÎNEMENT DE LA SUSPENSION SOLIDE SUR LE FONCTIONNEMENT DU FOYER CYCLONE HORIZONTAL EN RÉGIME ISOTHERME BIPHASÉ

Les auteurs analysent comparativement le fonctionnement du foyer cyclone horizontal en régime monophasé et biphasé.

On présente l'influence de la vitesse du milieu environnant sur les trajectoires radiales, à différentes concentrations de la suspension solide. On compare les résultats théoriques et expérimentaux. On présente les dépendances expérimentales des différents paramètres fonctionnels du cyclone (débit insufflé, pression périphérique, degré de séparation), en fonction de la vitesse du fluide d'entraînement.

St. cerc. energ. electr. Tom. 20, Nr. 2, p. 273—286, Bucureşti, 1970

C. COROIU

662.62

L'INTERDÉPENDANCE DES PARAMÈTRES DE STRUCTURE ET DES CARACTÉRISTIQUES ÉNERGÉTIQUES DES COMBUSTIBLES SOLIDES

L'étude présente l'interdépendance des paramètres de structure et des caractéristiques énergétiques des combustibles solides, et propose l'introduction de quelques paramètres de structure, permettant de tenir compte de la nature des groupes fonctionnels oxygénés, et une représentation de la masse organique des combustibles solides par des formules de structure chimique rapportées.

On propose également un diagramme de calcul du coefficient de l'équation de Van Krevelen pour la chaleur de combustion, en vue de l'augmentation de la précision des calculs.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 287—297, Bucureşti, 1970

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU

532.43.038

L'ÉCOULEMENT PAR DES CONDUITES À SECTION VARIABLE AVEC ÉCHANGE DE CHALEUR ET FROTTEMENT

Dans ce travail on cherche à établir les relations de calcul de la dépendance entre les paramètres fonctionnels et constructifs de l'écoulement avec frottement, par une conduite à section variable, d'un gaz parfait qui échange de la chaleur avec l'extérieur. En considérant l'hypothèse de l'écoulement dans une seule direction et après avoir précisé les équations de l'échange de chaleur et du travail de frottement, on détermine l'équation différentielle de la variation de la pression, de la vitesse, etc., intégrée ensuite pour de nombreux cas concrets, en tenant compte des hypothèses simples.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 299—305, Bucureşti, 1970

К. ХАЙДУК, Е. ЛИКСАНДРУ

536.24 : 621.039

АНАЛИЗ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ НАСЫЩЕННОГО ПАРА И ПРЯМЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

Дается методика для термодинамического анализа циклов н асыщенного пара и прямых циклов для атомных электростанций. Даются комплексные уравнения для термических коэффициентов полезного действия и к.п.д. нетто АЭС в зависимости от большого числа параметров и тепловых циклов реактора и парогененатора. Представлены результаты термодинамического анализа для двух типов циклов. Методика позволяет определить величины η_b, η_n, η_e, η_t, η_r, $\eta_{g.a.}$ и ψ, как и для оптимизации параметров различных типов АЭС с тепловыми или быстрыми реакторами.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 307—322, Bucureşti, 1970

RASIN GEORGESCU

536.24 : 621.03

ON A PROPOSED MECHANISM FOR THE INSTABILITIES OF THE TWO-PHASE BOILING SYSTEM

This article suggests an oscillatory mechanism of two-phase boiling instabilities in heated channels based on the following assumptions :

When a constant heat flux in applied to a monophase system a two-phase transient period of time appears. The steam accumulated gradually in the system and dislocates a quantity of liquid corresponding to its volume. The quantity of liquid dislocated by the steam total volume determines an overpressure above the system pressure. When the overpressure created by the dislocated water increases above the steam bubble internal pressure defined by the Laplace relation, the steam generation stops within the system, and consequently the overpressure in the system gradually disappears. The steam production starts again and thus an oscillatory state of the system results.

Experimental values obtained for the frequencies of oscillations agree well with calculated ones.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 323—330, Bucureşti, 1970

V. BARBU

532.56

ÜBER DIE KERNBILDUNG DER KAVITATIONSBLASEN

Es wird ein experimentelles und theoretisches Studium in qezug auf den Wärmeübergang und auf die Kernbildungsbedingungen der Dampfblasen, im Gebiete der elastischen und plastischen Deformationen der Tragfläche vorgenommen. Es werden einige, für die Kenntnis der Kernbildung, interessante Aspekte hervorgehoben und zwar: der Ersatzhalbmesser der Kontaktoberfläche, das Aktivierungsgebiet der Kernbildungszentren unter dem Einfluß der Wandüberhitzung, der Einfluß der Mikrogeometrie der Höhlung, sowie des Kontaktwinkels und der Gleichgewichtstemperatur.

St. cerc. energ. electr. Tom. 20, Nr. 2, p. 331—354, Bucureşti, 1970

L. TEODORESCU

621.43.038

THE INFLUENCE OF SOME GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE INJECTOR NEEDLE ON THE ENGINE OPERATION

The author presents the results of experimental investgations on the influence of the geometry of the flow section at the pin of the injector needle on the characteristics of the jet, combustion process and performance of the engine.

The influence of the play in the cylindrical zone of the pin of the needle and that of the final cone angle of the pin is presented.

The conditions which determine the optimum range of values for a given design of the engine are emphasized.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 355—365, Bucureşti, 1970

R. DELCESCU

621.432

CALCULATION OF PISTON RINGS WITH A CONSIDERATION OF THE PULSATION

This paper presents a differential equation system which describes the flow process of the working fluid through the piston rings, taking into account the rings motion in the piston grooves.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 367—384, Bucureşti, 1970

C. I. MOCANU

538.542 : 621.3.001

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES RÉGIMES TRANSITOIRES PÉLLICULAIRES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'auteur élabore une théorie unitaire des régimes transitoires pélliculaires du champ électromagnétique dans les conducteurs à surfaces régulières, et établit les concepts de refoulement localement superficiel et totalement superficiel, localement net et totalement net. Dans ces régimes, les variations spatio-temporelles des grandeurs d'état du champ électromagnétique peuvent être suivies le long des normales intérieures jusqu'aux centres de courbure. On intègre les équations de diffusion pour le problème bidimensionnel et dans deux cas particuliers du problème tridimensionnel.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 385—413 Bucureşti, 1970

C. IONESCU

621.3.001 : 621.3.018.4 : 538.538.542

L'ÉTUDE DES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES DANS LE CAS D'UN SYSTÈME TRIPHASÉ DE CONDUCTEURS PARCOURUS PAR LE COURANT, SITUÉS À L'INTÉRIEUR D'UN ÉCRAN RECTANGULAIRE, MINCE, SANS PAROIS

On a calculé les forces exercées entre les conducteurs et entre les conducteurs et l'écran, dans différents cas de court-circuit.

La comparaison des résultats ainsi obtenus avec les valeurs des forces, dans le cas des mêmes barres non écranées, a permis de constater l'avantage de ce point de vue de l'emploi des écrans.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 415—431, Bucureşti, 1970

E. WAGNER

621.3.015.3 : 538.566

BERECHNUNG DER SCHALTÜBERSPANNUNGEN AN HOCHSPANNUNGSLEITUNGEN BEIM ZWEISTUFIGEN EINSCHALTEN, MITTELS SERIENWIDERSTANDES

Es wird das zweistufige Schalten einer Leitung untersucht und der optimale Widerstand berechnet. Um den Optimalwert zu erhalten werden die Überspannungen in den beiden Stufen des Schaltens berechnet u.zw. beim Schalten mit Reihenwiderstand und beim Kurzschließen. Der Widerstand wird aus der Bedingung, der in beiden Fällen kleinstmöglichen Überspannung, berechnet. Aus den Ergebnissen folgt, daß der optimale Widerstand immer kleiner ist als der Wellenwiderstand der Leitung. Für verschiedene Fälle des Schaltens wird der Höchstwert der Überspannung berechnet.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p 433—448, Bucureşti, 1970

ED. NICOLAU

621.396.671.001.11 : 518.9

THE INTEGRAL-TRANSFIRM METHOD IN THE SYNTHESIS OF STRAIGHT THIN RADIATORS

The aim of this paper is to prove the possibility to use the Fourier transform to synthetise a straight — linie thin radiator with a radiation characteristic given in a plane.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 449—458, Bucureşti, 1970

TUDOR IONESCU

517.9 : 316.7

SUFFICIENT CONDITIONS OF HYPERSTABILITY FOR DISCRETE SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETRERS

The hyperstability of linear time-varying discrete systems is studied.

Sufficient conditions for hyperstability are obtained for particular classes of such systems. Finally, as an application, a proposition for the simple stability of a particular class of systems is given.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 459—466, Bucureşti, 1970

ВАСИЛЕ КОРНЕЛ

517.9 : 621.316.7

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ГИПЕРУСТОЙЧИВОСТИ

Показывается, что методы теории гиперустойчивости В. М. Попова позволяют решить задачу об абсолютной устойчивости для общего класса нелинейностей, рассмотренного В. А. Якубовичем в [1].

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 467—477, Bucureşti, 1970

А. ГИЦЭ

621.316.316.7 : 519.2

НАДЕЖНОСТЬ ПРЕРЫВИСТО РАБОТАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлена математическая модель прерывисто работающих элементов, которые определяют зависимость характеристики надежности элемента от распределения длительности работы и остановки и от распределения длительности безотказной работы из работающих интервалов. Полученные результаты позволяют связать проблему обнаружения оптимальной длительности работы и остановки с определенным критерием надежности. Исследование касается только элементов, работающих до первого отказа, но может быть применено и к случаям восстанавливаемых элементов.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 2, p. 479—487, Bucureşti, 1970

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI:

Revista „Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile: energetică generală, electroenergetică şi electrotehnică, termoenergetică şi termotehnică — sub formă de articole, comunicări sau note. Revista mai cuprinde şi rubricile: discuţii, recenzii, informaţii şi altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări ştiinţifice şi tehnice.

1. Structura lucrării.

a) Introducerea va situa lucrarea pe fondul cunoştinţelor actuale, va desemna obiectivele şi indica metodele utilizate;

b) Tratarea (despărţită pe subcapitole, numerotate după clasificarea zecimală) va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate şi va discuta rezultate, erorile, posibilităţile şi comoditatea aplicării;

c) Concluziile vor sintetiza rezultatele obţinute, limita lor de valabilitate şi aplicaţiile posibile.

2. Forma lucrării.

a) Lucrările se predau în 3 exemplare dactilografiate la două rînduri (2 000 semne de pagină), inclusiv exemplarul original fără corecturi, intervenţii.

b) Se vor anexa:

Bibliografia după standardele în vigoare; desenele pe calc şi tuş, însoţite de cîte două copii şi o listă a titlurilor figurilor; un rezumat de cinci, şase rînduri, rezumatele în limba română, şi la alegere în una din limbile engleză, franceză, germană sau rusă.

d) Volumul lucrării să nu depăşească circa 15 pagini.

Se primesc numai lucrări originale.

★

Manuscrisele se trimit Comitetului de redacţie: Bucureşti, Şos. Vitan nr. 236, sectorul 2.

19/11 NOV 16

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificației și aplicațiile lui în automatizări**, 1968, 300 p., 22 lei.

M. BRASOVAN și E. SERACIN, **Metode noi de proiectare a acționărilor electrice**, 1968, 238 p. 11 lei.

ST. N. SĂVULESCU, **Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă**, 1968, 312 p., 15 lei.

V. V. GHIA, **Recirculația gazelor la cuptoare**, 1968, 336 p., 29 lei.

P. DIMO, **Analiza modală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 627 p., 44 lei.

GH. CARTIANU, **Modulația de frecvență**, 1966, 693 p., 44 lei.

V. M. POPOV, **Hiperstabilitatea sistemelor automate**, 1966, 304 p., 16 lei.

S. HÂNCU, **Modelarea hidraulică în curenți de aer sub presiune**, 1967, 246, p., 11 lei.

AL. NICA, **Sisteme de lubrificație**, 1967, 262 p., 14,50 lei.

GH. VASILCA, OLGA BITA, **Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice**, 1967, 416 p., 29 lei.

H. PASCAL, **Curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale**, 1967, 273 p., 16 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri**, 1968, 623 p., 33 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundațiilor de mașini**, 1968, 362 p., 24 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicații industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 238 p., 16,50 lei.

D. F. LĂZĂROIU, Mașini electrice cu inerție redusă, 1969, 472 p., 29 lei.

I.P.I. – o. 5226

43821

Lei 40.—

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

3

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA
St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 3, p. 499—756, Bucureşti, 1970

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil*;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. AVRAMESCU;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Dr. ing. V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. G. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. ȘT. GHEORGHIU;
Prof. C. APETREI;
Ing. CS. NAGY;
Dr. ing. V. PIMSNER;
Dr. ing. C. A. VASILESCU;
Dr. ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție.*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 160 de lei pe an.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la „Intreprinderea de comerț exterior — Libri", Căsuța poștală 134—135 (Calea Victoriei 126), București, România sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: BUCUREȘTI, Șos. Vitan nr. 236.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 20, nr. 3 1970

SUMAR

Economie energetică

pag.

M. ELEFTERESCU, Consideraţii privind acoperirea necesarului de energie primară 501

V. CARACUDOVICI, S. MANEA, G. PANAITESCU, G. TROIA, M. WEISS, Contribuţii la îmbunătăţirea calităţii prognozelor consumului de energie din industrie 515

Termoenergetică şi termotehnică

C. COROIU, Cercetări termogravimetrice privind arderea sterilului de mină de la exploatările carbonifere din Valea Jiului 525

C. HAIDUC, V. VINIŢCHI, Fluxul termic critic în condiţii de reactor nuclear fierbător 541

V. PIMSNER, ST. ŞTEFAN, Influenţa parametrilor constructivi asupra caracteristicei universale a compresorului centrifug 555

B. POPA, Distribuţia presiunii în injectoarele cu cameră de turbionare. Influenţa raportului $z.f_i/d_c^2$. Rolul frecării 567

C. A. VASILESCU, I. ŞTEFAN, Îmbunătăţirea performanţelor motoarelor de autovehicul funcţionînd la altitudini variabile, prin corectarea avansului la declanşarea scînteii electrice 583

Electroenergetică şi electrotehnică

I. R. CIRIC, Expresii generale ale potenţialului vector pentru cîmpurile magnetice cvasistaţionare cu simetrie axială 591

C. DINCULESCU, D. CRISTESCU, Asupra formei supratensiunilor atmosferice pe liniile de înaltă tensiune 615

A. NICOLAIDE, E. DÎMBOIU, Calculul inductanţelor înfăşurărilor de curent alternativ plane 633

I. FETIŢĂ, Modelarea unui sistem de bare colectoare în vederea determinării parametrilor lineici R^*, L^*, C^* 665

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 499—756, 1970

pag.

M. POMÂRLEANU, Determinarea regimurilor staţionare ale sistemelor electroenergetice pe o cale iterativă puternic convergentă 667

EM. MICU, Stabilitatea motorului sincron la variaţia frecvenţei 677

V. M. POPOV, Cîteva noţiuni generale de stabilitate de interes special în teoria sistemelor automate 693

S. GHEŢARU, Stabilitatea unor sisteme discrete cu neliniarităţi de formă particulară 713

M. VARTOLOMEI, Asupra determinării vitezei unui calculator pentru funcţionarea în timp real 737

Recenzii 749

Material documentar 753

CONSIDERAȚII PRIVIND ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE PRIMARĂ

DE

M. ELEFTERESCU

621.09

Se prezintă unele considerații privind stabilirea variantei de acoperire a necesarului de energie primară al țării; se subliniază necesitatea de a lua în considerare influența pe care luarea deciziilor în sectorul energetic o are asupra activității altor sectoare ale economiei.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Problema satisfacerii cerințelor de energie ale economiei naționale continuă actualmente să se mențină printre preocupările cele mai importante ale energeticii mondiale, pe de o parte ca urmare a faptului că dezvoltarea economiei naționale reclamă în fiecare țară cantități din ce în ce mai mari de purtători și forme de energie, iar pe de altă parte ca urmare a faptului că pentru foarte multe țări, și în special, cu puține excepții, pentru cele mai avansate sub aspect economic, sursele interne respective de energie nu mai satisfac din punct de vedere cantitativ și calitativ necesitățile de energie ale economiilor naționale respective.

În aceste condiții preocupările care au ca scop stabilirea celor mai corespunzătoare soluții pentru acoperirea în perspectivă a cerințelor de energie se manifestă din ce în ce mai frecvent în rîndul energeticienilor și se reflectă în literatura de specialitate fie în domeniul optimizării bilanțurilor energetice de perspectivă [1]—[6], domeniu în care cercetările privind modelarea matematică a fenomenului se împletesc cu cele privind stabilirea unor metode matematice de rezolvare cît mai exactă și mai rapidă a modelelor întocmite, fie în domeniul stabilirii ponderilor optime cu care diversele surse de energie, care stau sau ar putea sta la dispoziție pentru acoperirea necesarului de energie al economiei, trebuie să intervină în economia energetică luată în considerare [7]—[9].

Un aspect mai nou care apare în problema acoperirii necesarului de energie îl constituie participarea la discuție a „tehnologilor" sau a

diverşilor reprezentanţi de întreprinderi sau firme; în ceea ce priveşte poziţia „producătorilor" de forme sau purtători de energie, este evident că ea este aceea de a justifica utilizarea formelor sau a purtătorilor de energie pe care le produc instituţiile respective; pentru justificarea poziţiilor lor, care au la bază interese comerciale, firmele producătoare utilizează însă de multe ori argumente foarte viabile din punct de vedere ştiinţific şi economic; poziţia „consumatorilor", privită prin prisma energeticienilor care trebuie să rezolve problema acoperirii necesarului de energie, este mult mai „obiectivă" şi mai utilă, prin aceea că ea subliniază avantajele pe care le prezintă pentru consumatori diferitele forme sau purtători de energie, posibilităţile de interschimbare dintre acestea, contribuind astfel la precizarea cerinţelor de energie pe forme şi purtători şi a tendinţelor ce trebuie avute în vedere la rezolvarea problemei respective în perioada de perspectivă.

Aceste „luări de poziţie" ale consumatorilor faţă de problema alimentării cu energie, care se datoresc importanţei deosebite pe care cheltuielile pentru energie o prezintă pentru preţul de cost al producţiei industriale şi, implicit, pentru capacitatea de concurenţă a întreprinderilor industriale pe piaţa internă şi pe cea externă, arată că problema alimentării cu energie încetează a mai fi o problemă exclusiv a energeticienilor, ea fiind în acelaşi timp şi o problemă a tehnologilor, sau, cu alte cuvinte, că la rezolvarea problemei alimentării cu energie aspectele energotehnologice nu numai că nu mai pot fi neglijate, ci, mai mult, ele trebuie să fie unul dintre elementele de primă importanţă în alegerea soluţiilor, determinînd structura ultimei trepte a bilanţului energetic al economiei naţionale.

2. MODUL DE PUNERE A PROBLEMEI

Avînd în vedere aspectele enumerate mai sus, rezultă că punctul de plecare pentru studierea problemei acoperirii optime a necesarului de energie al economiei naţionale trebuie să fie analiza cît mai detaliată a cerinţelor de energie ale consumatorilor şi a posibilităţilor de interschimbare la nivelul consumatorilor a diferitelor forme sau purtători de energie, problema desfăşurîndu-se apoi în sensul ca printr-o gospodărire judicioasă a surselor de energie disponibile să se caute a se asigura fiecărui consumator forma sau purtătorul de energie pe care îl reclamă şi care îi permite realizarea maximului de rentabilitate în ansamblul condiţiilor energotehnologice şi economice în care acesta îşi desfăşoară activitatea.

Rezultă că, spre deosebire de lucrările anterioare în care se preconiza optimizarea bilanţului energetic al economiei naţionale sau stabilirea structurii optime a surselor de energie punîndu-se accentul pe optimizarea sectorului energetic fără a se lua în considerare cerinţele detaliate ale consumatorilor, ajungîndu-se la situaţia ca din considerente care privesc exclusiv sectorul energetic să se oblige anumiţi consumatori la utilizarea unor forme sau purtători de energie diferiţi de cei solicitaţi de ei, actualmente se propune ca atenţia deosebită să fie acordată consumatorilor, îndeosebi consumatorilor industriali, întreprinderilor producătoare de bunuri materiale, care, ca unităţi de bază ale economiei naţionale, trebuie să contribuie la creşterea capacităţii economiei naţionale de a satisface

în condiţii din ce în ce mai bune cererile dezvoltării societăţii şi de a participa în condiţii mai avantajoase la piaţa mondială.

În aceste condiţii, fără a diminua importanţa energeticii pentru asigurarea dezvoltării economiei naţionale, se atribuie sectorului energetic rolul pe care realmente îl are în cadrul economiei, şi anume acela de deservire a celorlalte sectoare.

Considerăm că modul menţionat de punere a problemei permite o mai fidelă modelare a realităţii economice, prin aceea că, evitînd o optimizare separată a sectorului energetic, nu rupe legăturile de interdependenţă care există evident între sectorul energetic şi celelalte sectoare ale economiei şi, în acelaşi timp, pune pe prim plan intenţia de a se da fiecărui consumator formele şi purtătorii de energie care îi reclamă şi care îi asigură cele mai avantajoase condiţii de funcţionare.

Experienţa arată însă că este foarte puţin probabil ca resursele energetice ale unei ţări să poată satisface integral şi sub toate aspectele suma cerinţelor de forme şi purtători de energie ale consumatorilor; în aceste condiţii, sectorul energetic se va găsi în faţa alternativei: ori procură din exterior cantităţile de purtători de energie solicitate, ceea ce implică, evident, cheltuieli de devize, ori obligă anumiţi consumatori să utilizeze forme sau purtători de energie indigeni, ceea ce implică în cazul „consumatorilor productivi" micşorarea beneficiilor respective şi uneori reducerea beneficiilor de export, adică reducerea cantităţilor de devize pe care întreprinderile respective (denumite mai sus consumatori productivi) le-ar putea realiza prin vînzarea produselor lor în exterior. Ambele posibilităţi care corespund alternativei menţionate indică necesitatea ca la stabilirea structurii optime a resurselor de energie să se ia în considerare şi legăturile economiei naţionale cu piaţa mondială; procurarea din exterior a unor forme sau purtători de energie înseamnă cheltuieli de devize în sectorul energetic, dar şi posibilităţi suplimentare de obţinere de devize prin creşterea capacităţii de concurenţă a produselor industriale pe piaţa mondială, ceea ce ar contrabalansa cheltuielile făcute în sectorul energetic; similar, renunţarea la importul de energie s-ar traduce printr-o economie de devize în sectorul energetic, dar şi printr-o micşorare a posibilităţilor avantajoase de export ale altor sectoare economice.

Considerăm că cele menţionate mai sus indică suficient de clar că în condiţiile actuale ale unui schimb internaţional foarte dezvoltat, atît în domeniul energetic, cît şi în alte domenii de activitate ale societăţii, optimizarea structurii resurselor de energie capătă aspecte mult mai complexe, ea ieşind, ca problemă economică, din sfera, devenită prea restrînsă, a sectorului energetic.

3. PUNCTE DE VEDERE PRIVIND ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE PRIMARĂ: „IEFTINĂTATE" SAU „SIGURANŢĂ"?

Intenţia de a ţine seama şi de legăturile pe care relaţiile de comerţ exterior le impun la rezolvarea problemei alimentării cu energie primară întîmpină numeroase dificultăţi, care devin ele însele adevărate probleme, cum ar fi, de exemplu, necesitatea studierii pieţei mondiale, în special

în ceea ce privește domeniul corespunzător comerțului cu forme și purtători de energie, la care o atenție deosebită ar trebui acordată studierii structurilor actuale și tendințelor ce se manifestă pe plan mondial sau în cadrul diverselor economii energetice privind acoperirea necesarului de energie, ori stabilirea criteriului alegerii surselor de energie la care urmează a se apela, în legătură cu care, în principal, există două tendințe opuse : una care preconizează apelarea la surse de energie în ordinea prețurilor respective, începînd evident cu cele mai ieftine, indiferent dacă acestea sînt surse interne sau sînt surse externe, și alta care, preconizînd că siguranța alimentării de durată trebuie să-și spună cuvîntul hotărîtor la alegerea surselor de energie, consideră că este indicat a se apela la sursele cele mai „sigure", adică la cele interne, deși nu totdeauna ele sînt cele mai ieftine, sau că, în orice caz, acestea trebuie să aibă ponderea cea mai însemnată pentru ca influența perturbațiilor economice externe să nu se resimtă în cadrul economiei naționale respective.

Problema acoperirii necesarului de energie primară este deci încă de acum una dintre cele mai acute probleme ale energeticii ; avînd în vedere creșterea extrem de rapidă a cerințelor de energie, este evident că în perioada de perspectivă satisfacerea acestor cerințe va fi din ce în ce mai dificilă.

Unele studii întocmite recent de O.N.U. arată că necesarul mondial de energie va fi în 1980 de circa $9-11 \cdot 10^9$ t.c.c., iar în 2000 de circa $16-22 \cdot 10^9$ t.c.c., și că foarte puține țări vor fi în măsură să-și acopere singure (din resurse interne) necesarul respectiv de energie. Situația în 1980, conform prevederilor, va fi de natura celei prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Preevaluarea consumului de energie, a posibilităților de export și a necesarului de import în 1980 pe plan mondial, exceptînd Orientul Mijlociu, în 10^6 t.c.c. [10]

	Consum	Export	Import
U.R.S.S. și țările soc. europene	2043	50—150	—
R.P. Chineză și țările socialiste asiatice	1845	—	—
India	201	—	50—100
Asia de sud-est	50	—	—
Australia, Oceania	119	—	—
Japonia	438	—	300—350
Africa	157	150	50
America Latină	435	180	100
America de Nord	2950	50—100	500—600
Europa de vest	1492	—	625—780
Total	9813	430—500	1625—1980
Necesarul net de import			1195—1400

Pentru acoperirea necesarului de energie primară stau la dispoziție următoarele rezerve (tabela 2).

Avînd în vedere consumurile actuale și cele prevăzute pentru anul 2000 pentru fiecare dintre purtătorii sau formele de energie luate în considerare, se constată că rezervele de cărbune sînt foarte mari în raport cu consumul și că ele oferă cea mai lungă durată de exploatare [12];

Tabela 2

Rezervele mondiale de energie [11]

	Putere cal. kcal/kg	Rezerve probabile	Rezerve sigure	Total rezerve
Huilă	7000	$6900 \cdot 10^9$ t	$600 \cdot 10^9$ t	$7500 \cdot 10^9$ t
Cărbune brun	2500	$1800 \cdot 10^9$ t	$200 \cdot 10^9$ t	$2000 \cdot 10^9$ t
Turbă	3100	$115 \cdot 10^9$ t	$110 \cdot 10^9$ t	$225 \cdot 10^9$ t
Petrol	9500	$448 \cdot 10^9$ t	$52 \cdot 10^9$ t	$500 \cdot 10^9$ t
Petrol din şisturi	9500	$95 \cdot 10^9$ t	$40 \cdot 10^9$ t	$135 \cdot 10^9$ t
Gaz natural	9500	$60 \cdot 10^{12}$ Nm^3	$20 \cdot 10^{12}$ Nm^3	$80 \cdot 10^{12}$ Nm^3
Energie hidro	860	$324 \cdot 10^3$ TWh	$70 \cdot 10^3$ TWh	$394 \cdot 10^3$ TWh
Uraniu şi thoriu		$4740 \cdot 10^3$ t	$507 \cdot 10^3$ t	$5247 \cdot 10^3$ t

cu toate acestea, urmărind tendinţele ce se manifestă actualmente în energetica mondială sau în cadrul mai restrîns al energeticii diferitelor ţări, se ajunge la concluzia că, exceptînd foarte puţine state — ca, de exemplu, Republica Sud-Africană, care posedă însemnate rezerve de cărbune „la zi", tendinţa creşterii ponderii petrolului şi gazelor naturale în consumul total de energie primară se manifestă aproape universal.

Din cele de mai sus se constată că în prezent energetica se află în faţa unei „contradicţii" : deşi rezervele de cărbune depăşesc de circa 8,5 ori rezervele de petrol şi gaze luate la un loc, consumul anual de cărbune deţine o pondere de numai circa 40% din consumul total de energie primară, această pondere fiind într-o continuă scădere.

Situaţia menţionată nu a fost trecută cu vederea de energeticieni şi astfel s-a ajuns la întrebarea deosebit de actuală : ce surse de energie trebuie să fie folosite pentru acoperirea necesarului de energie primară ? Răspunsul la această întrebare, care nu poate fi dat decît pentru fiecare ţară în parte şi ţinînd seama de condiţiile specifice ale ţării respective şi de legăturile şi de posibilităţile sale particulare de a apela la surse energetice extrateritoriale, trebuie de asemenea să aibă în vedere elementele caracteristice ale combustibililor respectivi, în sensul analizării avantajelor şi dezavantajelor pe care unul sau altul dintre combustibilii consideraţi le prezintă pentru ţara respectivă.

În ceea ce priveşte energia nucleară, este de remarcat că pentru perioada de perspectivă pînă în 1980 se consideră că ea nu va reprezenta o „soluţie" a problemei acoperirii necesarului de energie primară, atît ca urmare a faptului că deocamdată utilizarea energiei nucleare se află încă într-o fază incipientă şi că, după cum se menţionează în [13], ponderea ei în totalul necesarului de energie primară este foarte redusă (în 1965 energia electrică produsă în centralele nucleare a reprezentat doar 1% din totalul energiei electrice produsă în ţările Pieţei comune, adică 0,25% din totalul energiei primare a ţărilor respective), cît şi ca urmare a faptului că energia nucleară nu poate fi utilizată în condiţiile tehnice-economice actuale decît prin intermediul energiei electrice, formă de energie care la rîndul ei reprezintă circa 25% pentru ţările economic avansate din totalul necesarului de energie ; întrucît este de presupus că ponderea energiei electrice în bilanţurile energetice naţionale nu va depăşi 25% încă o perioadă destul de îndelungată, rezultă că utilizarea energiei

nucleare ar putea rezolva acoperirea a cel mult 8—10% din necesarul de energie primară pentru anul 1980.

Este interesant de menţionat în prognozele privind ponderea cu care diversele forme sau purtători de energie intervin în acoperirea necesarului mondial de energie, de obicei energia nucleară nu este evidenţiată separat (fig. 1), probabil ca urmare a faptului că ponderea ei pînă în 1980

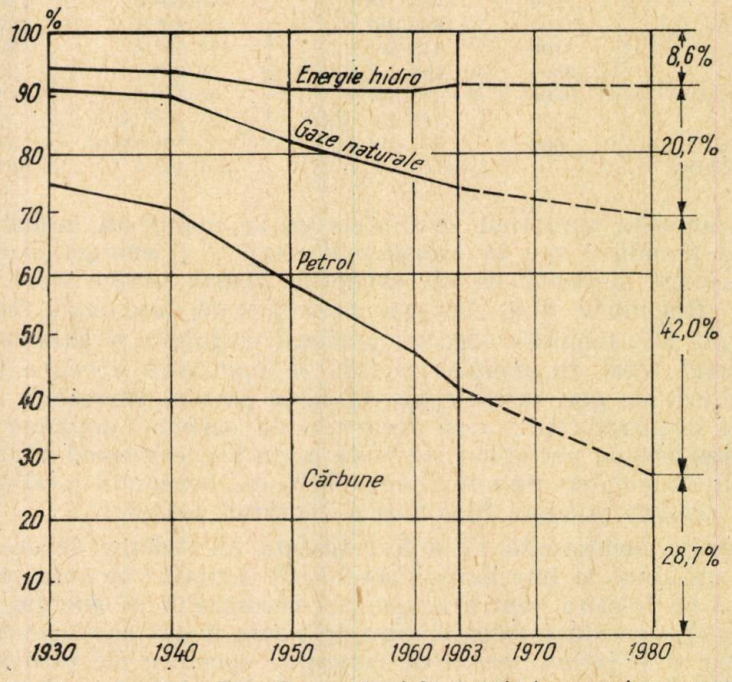


Fig. 1. — Ponderea diverşilor purtători de energie în acoperirea necesarului mondial de energie primară [14].

rămîne foarte mică sau că intervenţia ei într-o măsură sensibilă este incertă [14].

Numai în ţările în care încă de acum se înregistrează un deficit foarte mare de energie, cum sînt Japonia şi ţările din Europa de vest, deficit care se va accentua în viitor, se prevede apelarea într-o măsură mai mare decît în alte părţi la energia nucleară; totuşi, şi aici ponderea energiei nucleare în totalul energiei primare (tabela 3) se va menţine în limite foarte mici, de exemplu circa 3,5% în Japonia şi circa 7,1—9% în ţările din Europa de vest [14].

Din cele menţionate rezultă că disputa principală care se desfăşoară actualmente pe plan mondial în energetică poate fi rezumată printr-una din cele trei formulări ale aceleiaşi întrebări:

— cărbune sau petrol?
— surse interne sau surse externe?
— „siguranţă" sau „ieftinătate"?

Tendinţele manifestate pînă în prezent, ca şi prognozele privind acoperirea necesarului de energie primară pentru perioada de perspectivă, par a da cîştig de cauză petrolului şi derivatelor sale, ceea ce nu înseamnă

Tabela 3

Prognoza acoperirii necesarului de energie pentru anul 1980 în ţările din Europa de vest şi din Japonia [14] (în 10^6t.c.c.)

	Europa de vest	Japonia
Necesar total de energie	2050	665
Acoperit din resurse interne din care:	725—950	112
cărbune	340—440	66
petrol	29— 55	1,4
gaze naturale	100—160	8,7
energie hidro	70	12,9
energie nucleară	185—225	23
Import net din care:	1100—1325	553
petrol	—	527
cărbune	—	26

însă că aceasta ar putea constitui soluţia definitivă a problemei menţionate, deoarece, aşa cum se indică în tabela 3, adoptarea unanimă a acestei variante ar putea conduce la epuizarea rapidă a rezervelor cunoscute de petrol, ceea ce ar însemna că după aceea problema acoperirii necesarului de energie ar putea deveni şi mai acută. Dezvoltarea economiei pe baza folosirii petrolului, de obicei din surse externe (avînd în vedere repartizarea pe glob a rezervelor de petrol), apare, după cum se vede, însoţită

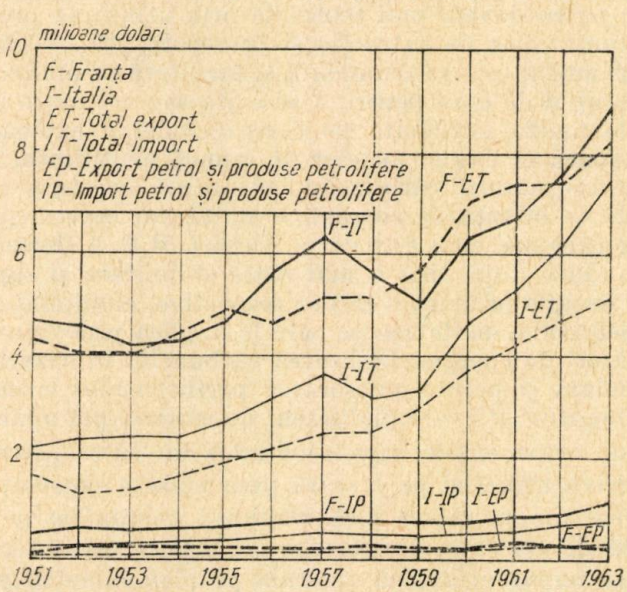


Fig. 2. — Balanţa comerţului exterior de petrol şi totale ale Franţei şi Italiei [20].

de un grad de nesiguranţă. Cu toate acestea, creşterea ponderii petrolului în bilanţurile energetice ale multor ţări rămîne o realitate evidentă, ca, de exemplu, în Anglia, Franţa şi alte ţări din Europa [15]—[17] (fig. 2) şi ea se explică prin avantajele pe care le deţine petrolul faţă de

cărbune, avantaje care în principal se manifestă prin comoditate și ușurință de manipulare, curățenie, posibilități sporite de reglare și mai ales preț scăzut și eficiență economică mai mare în utilizare [18]. Ceea ce se reproșează petrolului, în special în țările care nu dispun de resurse și rezerve proprii suficiente, este faptul că el trebuie procurat din alte țări, ceea ce atrage o oarecare nesiguranță în alimentare, fie ca urmare a faptului că perturbațiile politice și economice din țările producătoare pot produce perturbații în economia țărilor consumatoare, cum au fost, de exemplu, dificultățile întîmpinate de țările occidentale în perioada naționalizării Canalului Suez de către Egipt sau, mai recent, conflictele din Orientul Apropiat și din Nigeria, fie ca urmare a faptului că, datorită rezervelor mondiale limitate de petrol, se va ajunge la un moment în care trecerea de la petrol la altă formă sau purtător de energie va produce dificultăți de nerezolvat; chiar pînă atunci utilizarea petrolului obținut din surse externe implică dificultăți foarte serioase asupra balanței de plăți externe, dificultăți care se vor mări în viitor, avînd în vedere legea cererii și ofertei — care joacă un rol însemnat pe piața mondială capitalistă —, ca urmare a creșterii prețurilor datorită faptului că, în timp ce rezervele de petrol se vor micșora, cererile corespunzătoare vor crește din ce în ce mai mult.

În ceea ce privește utilizarea cărbunelui, recunoscîndu-se faptul că el este mai scump decît alți purtători de energie, se încearcă în prezent reducerea prețului de cost prin concentrarea extracției în exploatări mari care ar putea deveni mai rentabile prin utilizarea proceselor mecanizate și automatizate de extracție și transport [19]. Utilizarea în continuare a cărbunelui este recomandată și facilitată în multe țări printr-un sistem preferențial de taxe pentru a se evita sau cel puțin micșora implicațiile sociale foarte neplăcute pe care închiderea exploatărilor carbonifere le provoacă în dauna forțelor de muncă neutilizate. În plus, după cum afirmă susținătorii cărbunelui, utilizarea acestuia într-o măsură preponderentă în bilanțurile energetice ale țărilor care dispun de rezerve însemnate de cărbune, cum este cazul Angliei, R.F. a Germaniei, Franței, Belgiei etc., aduce după sine o mai mare stabilitate și siguranță în alimentarea cu energie primară a țărilor respective, eliminînd sau, cel puțin, micșorînd cheltuielile de devize pe care le implică procurarea din exterior a altor purtători de energie. Utilizarea cărbunelui în cazurile menționate este recomandată și pentru micșorarea perturbațiilor economice interne provocate de perturbații care, indiferent de motive, pot apărea în exterior.

Evident, argumentele care s-au adus de către „partizanii cărbunelui" împotriva utilizării pe o scară prea mare a petrolului și a produselor petroliere nu au rămas fără răspuns; avantajele pe care petrolul le deține față de cărbune, dintre care cel mai important este prețul său mai redus, au impus utilizarea acestuia pe plan mondial pe o scară din ce în ce mai largă, avîndu-se în vedere o serie de contraargumente [20], dintre care mai interesante par a fi următoarele trei:

a) cheltuielile de devize pentru procurarea de petrol din surse externe nu au o pondere prea mare în balanța comerțului exterior; semnificativ în acest sens ar putea fi exemplele pe care le oferă Anglia, Franța, R.F. a Germaniei, Italia etc., unde aceste cheltuieli pentru procurarea

de petrol sînt relativ mici (fig. 2—3) în comparaţie cu balanţa comerţului exterior al ţărilor respective, utilizarea petrolului favorizînd creşterea capacităţii de concurenţă a mărfurilor interne pe piaţa mondială,

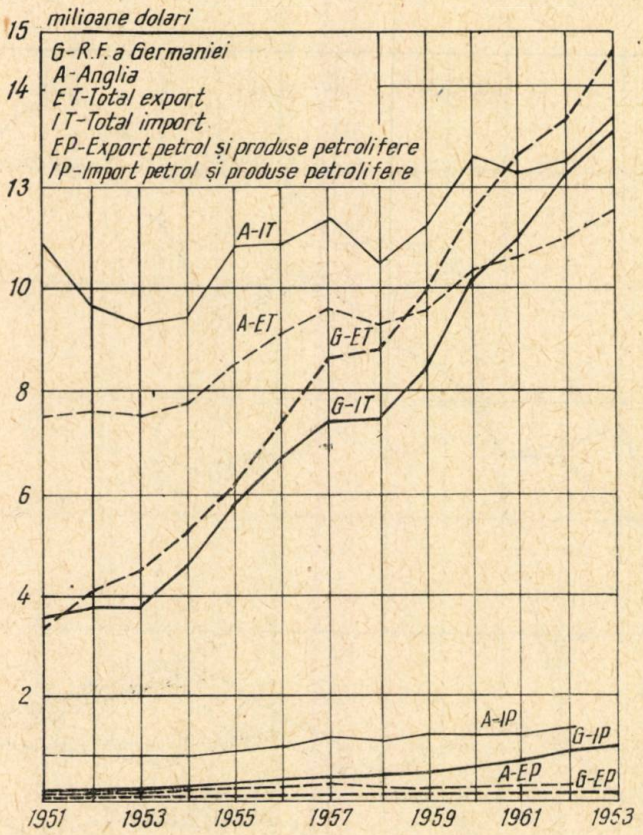


Fig. 3. — Balanţa comerţului exterior de petrol şi totale a Angliei şi a R. F. a Germaniei [20].

ceea ce se traduce prin sporirea exportului total, deci procurarea de devize;

b) faptul că sectorul energetic ar urma să-şi procure din exterior o însemnată cotă-parte din ceea ce constituie pentru acest sector materie primă nu trebuie privit ca fiind total inacceptabil; procurarea din exterior a materiei prime într-o măsură foarte importantă este ceva frecvent întîlnit şi în alte ramuri industriale şi, cu toate acestea, ramurile respective nu numai că nu întîmpină dificultăţi exagerate, ci ele se dezvoltă în condiţii bune; un exemplu în acest sens poate fi dat în R.F. a Germaniei, unde ramuri importante ale economiei lucrează cu materie primă din import (fig. 4); pot fi citate astfel industria prelucrării cuprului, cea constructoare de maşini, industria chimică, metalurgică, electrotehnică, cea de autovehicule etc. şi mai ales cea alimentară, care la unele produse este dependentă de import în proporţie de 60%. Cu toate acestea,

cum se constată şi din figura 3, balanţa externă de plăţi înregistrează în permanenţă un excedent considerabil;

c) pentru evitarea sau micşorarea într-o măsură cît mai mare a perturbaţiilor economice pe care diverse perturbaţii politice sau eco-

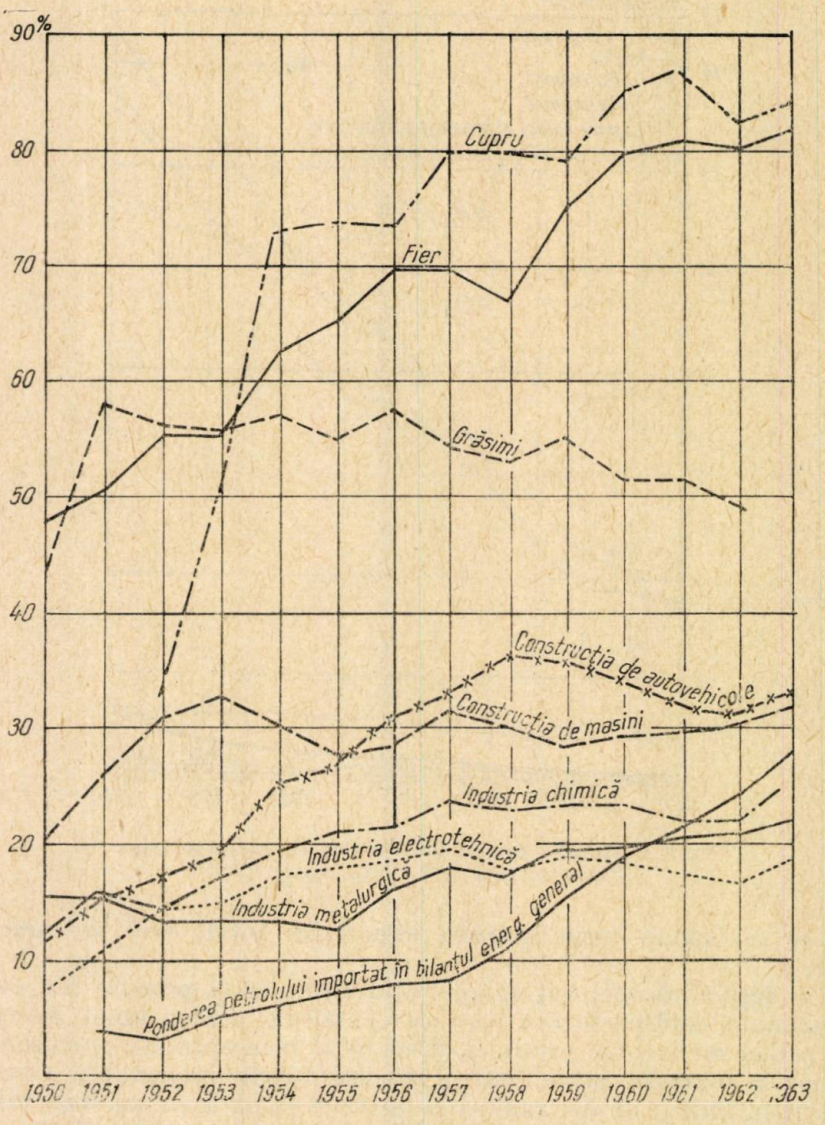


Fig. 4. — Influenţa importului asupra anumitor domenii de producţie din economia R.F. a Germaniei [20].

nomice externe le pot provoca în economia naţională a ţării respective, se preconizează — şi parţial s-a şi aplicat — măsura diversificării surselor externe de alimentare şi creşterea numărului lor, ceea ce, micşorînd ponderea fiecăreia în totalul combustibilului importat, permite ca în

caz de nevoie aceste surse să poată fi înlocuite prin altele fără prea mari dificultăţi.

Se poate menţiona în acest sens exemplul R.F. a Germaniei, care îşi procură petrol din 12 surse (tabela 4).

Tabela 4

Proveniența și programul prelucrării petrolului în rafinăriile din R.F. a Germaniei în anul 1966 [21]

	Cantităţi procurate	
	tone	%
R.F. a Germaniei (surse interne)	7 705 300	10,1
Venezuela	4 022 600	5,2
Arabia Saudită	8 066 480	10,5
Irak	3 696 800	4,8
Iran	8 405 400	10,9
Kuweit	2 684 600	3,5
Oman	4 006 200	5,2
Algeria	3 748 900	4,9
Libia	27 396 510	35,7
Nigeria	3 920 600	5,1
Gaban	170 000	0,2
U.R.S.S.	2 969 500	3,9
Total	76 792 890	100,0

Avantajele economice pe care petrolul le oferă faţă de cărbune, ca şi măsurile ce se pot lua pentru micşorarea nesiguranţei în alimentarea de durată, au contribuit la creşterea continuă a ponderii petrolului în bilanţul energetic mondial şi în cele ale statelor economic avansate şi, după cum indică prognozele actuale, la menţinerea tendinţei de creştere a acestei ponderi, astfel încît, cel puţin pînă la sfîrşitul secolului, petrolul să fie combustibilul cel mai utilizat, ceea ce, din punctul de vedere al întrebării formulate anterior, înseamnă că la alegerea surselor de energie primară energetica ţărilor mai avansate economic şi-a precizat un punct de vedere, care preferă alegerea surselor de energie după criteriul „ieftinătate".

4. CONSIDERAŢII PRIVIND STABILIREA CRITERIULUI DE ALEGERE A SURSELOR DE ENERGIE PRIMARĂ PENTRU R.S. ROMÂNIA

Şi în condiţiile ţării noastre creşterea masivă a cerinţelor de energie ale economiei naţionale ridică cu acuitate în faţa energeticienilor problema acoperirii necesarului de energie în perioada de perspectivă.

Întrucît, ca şi în alte părţi, sursele noastre de energie, după toate probabilităţile, nu vor fi în măsură să acopere cantitativ şi calitativ cerinţele de energie primară ale economiei în perioada de perspectivă, fapt demonstrat prin aceea că şi în prezent pentru acoperirea necesarului de cocs al industriei sîntem nevoiţi a importa însemnate cantităţi de cocs şi de cărbune cocsificabil (1 102 400 t de cocs şi 722 800 t de cărbune cocsificabil în anul 1966) [22], şi pentru ţara noastră se pune problema lărgirii

gamei surselor de energie care contribuie la acoperirea necesarului de energie primară.

În aceste condiții este de remarcat că la acoperirea necesarului de energie primară al țării noastre intervine în plus față de cazurile menționate încă un purtător de energie, gazul natural, care provine din resurse interne; prin aceasta, „competiția" pe plan intern între diversele forme sau purtători de energie ar urma să se desfășoare între gaz natural, energie nucleară, petrol și cărbune.

Pentru motivele arătate mai înainte, la care se adaugă și investițiile mari în devize care-i sînt caracteristice, considerăm că energia nucleară nu va constitui nici în condițiile țării noastre „soluția" problemei acoperirii necesarului de energie primară pînă în 1980; aceasta nu înseamnă însă că utilizarea energiei nucleare nu are viitor în țara noastră; cercetările din acest domeniu vor trebui continuate în ceea ce privește atît alegerea tipului optim de centrală, cît și încadrarea centralelor nucleare-electrice în sistemul electroenergetic național. Deși pînă în 1980 ponderea energiei nucleare în bilanțul energetic general al țării noastre se va menține în limite restrînse, energia nucleară rămîne totuși ca una dintre soluțiile cu mari posibilități de utilizare în perioada de perspectivă mai îndepărtată.

În ceea ce privește utilizarea cărbunelui, este de remarcat că, date fiind caracteristicile destul de nefavorabile ale cărbunilor indigeni, utilizarea acestuia în cadrul economiei energetice, în afara proceselor energo-tehnologice care reclamă acest combustibil ca purtător de energie impus, pare a fi de prevăzut numai în centralele electrice de mare putere, domeniu în care însă el va avea de înfruntat concurența puternică a energiei nucleare, care, la rîndul ei, așa cum s-a menționat, nu poate fi utilizată pe scara economiei naționale, cel puțin în condițiile tehnice actuale, decît tot prin intermediul energiei electrice. Utilizarea cărbunelui în alte domenii nu pare a fi indicată, el prezentînd serioase dezavantaje față de petrol, și în special față de gazul natural, cu atît mai mult cu cît și acestea provin din surse interne.

Sursele de bază ale energeticii țării noastre rămîn în continuare gazul natural și petrolul, cu mențiunea că o cotă tot mai mare din producția de gaze urmează a fi dirijată spre industria chimică.

Problema care se pune energeticii noastre pentru perioada de perspectivă este aceea de a preciza sursele de energie care trebuie să contribuie la acoperirea creșterii cerințelor de energie primară; dacă în ceea ce privește necesarul de energie electrică există posibilitatea ca el să fie satisfăcut prin utilizarea mai multor forme sau purtători de energie — energie hidro, nucleară, cărbune, petrol, gaze —, pentru satisfacerea celorlalte cereri de combustibil rămîn să conlucreze gazul natural și petrolul, ambele din surse interne, iar pentru ceea ce depășește capacitatea normală de producție a acestora, la care trebuie adăugat și combustibilul solid produs ca purtător de energie de formă impusă (impus de cererea consumatorilor sau din considerente altele decît energetice sau economice), urmează a se apela fie la forțarea surselor interne de petrol și gaze, fie la creșterea producției de cărbune, fie la importul de purtători de energie, care în principal ar putea fi import de petrol (sinonim cu renunțarea la export sau reducerea acestuia), fie, bineînțeles, o soluție combinată.

Deoarece, dată fiind ponderea foarte mare a surselor interne de energie în acoperirea totalului necesarului de energie primară, problema siguranței în alimentarea de durată, în cazul folosirii unor surse externe, nu se mai pune în condițiile țării noastre cu aceeași acuitate ca în cazul țărilor care nu dispun decît de surse energetice interne reduse, rezultă că drept criteriu de alegere a surselor rămîne „ieftinătatea". Este de menționat că siguranța alimentării de durată, în cazul în care din considerente economice s-ar recurge la importul de petrol, este sporită pentru țara noastră prin aceea că, în cazul întîmpinării unor dificultăți pe parcurs în aprovizionarea cu petrol a consumatorilor profilați pentru utilizarea acestui combustibil, aceștia ar putea fi totuși alimentați, micșorîndu-se cantitățile de petrol exportate.

În aceste condiții se propune ca, la stabilirea variantei optime de acoperire a necesarului de energie primară al țării noastre, alegerea surselor să se facă în ordinea ieftinătății lor, noțiunea de „ieftinătate" în cadrul comerțului exterior trebuind să aibă în vedere prețurile existente pe piața mondială.

În cele de mai sus s-a căutat a se introduce noi puncte de vedere în concordanță cu tendințele energetice mondiale și cu modul în care se întrevede rezolvarea problemei acoperirii necesarului de energie primară în diverse țări, puncte de vedere care considerăm că ar fi indicat să fie luate în considerare și la rezolvarea problemei respective în condițiile țării noastre.

Acoperirea necesarului de energie primară numai sau aproape numai din resurse interne, ceea ce ar însemna de fapt obligarea anumitor consumatori la utilizarea unor combustibili inferiori și scumpi, fără luarea în considerare a cît mai multor aspecte caracteristice economiei naționale ar putea conduce la alte rezultate economice decît cele scontate și, în plus, ar contribui la micșorarea posibilităților de afirmare pe plan internațional a industriei noastre, date fiind ponderea de multe ori foarte mare pe care cheltuielile pentru energie o au în prețul produselor industriale și influența pe care utilizarea diverșilor purtători de energie o poate avea asupra calității produselor finite.

Trebuie avut în vedere că nu întotdeauna cel mai ieftin, ca preț, purtător de energie este și cel mai eficient, fiind de multe ori recomandabilă utilizarea unor purtători sau forme de energie cu un preț unitar mai ridicat, dar care, datorită altor caracteristici, pot conduce la scăderea prețurilor de cost ale produselor finite, adică, în ultimă instanță, la economii care să compenseze cu prisosință surplusul de cheltuieli necesare procurării lor.

Evident, problema cuprinderii într-un model fizico-matematic a diverselor aspecte menționate, ca și găsirea metodei corespunzătoare de rezolvare, constituie un obiectiv care urmează a fi analizat în cercetările viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. А. Мелентиев, *Вопросы оптимизаций энергетического баланса С.С.С.Р.*, Вестник Акад. Наук С.С.С.Р., *2* (1965).
2. M. Bercovici, *Contribuții românești la prognoza necesarului de energie și la optimizarea soluțiilor în economia energetică*, St. cerc. energ. electr., *4*, 745—760 (1966).

3. T. Miclescu, A. Pap, *Cu privire la posibilitatea folosirii mașinilor de calcul cifrice la determinarea bilanțului energetic de perspectivă optim*, St. cerc. energ. electr., *4*, 677—689 (1962).
4. L. A. Melentiev, *Raport general la secțiunea B*, Conferința mondială a energiei, Moscova, 1968.
5. T. Miclescu, A. Pap, I. Niculescu, S. Iordache, *Analiza metodelor propuse pentru optimizarea bilanțului energetic*, St. cerc. energ. electr., *4*, 789—798 (1965).
6. Comité National Belge de la Conférence Mondial de l'Energie, *Essai d'un bilan energétique de la Belgique 1964—1970—1975*, Raport nr. 44, Conferința mondială a energiei, Tokio, 1966.
7. M. Bercovici, *Considerații asupra participării resurselor clasice și nucleare la acoperirea necesarului de energie primară și electrică*, Comunicare prezentată la sesiunea „Energia nucleară în energetică", București, 1960.
8. L. V. Kontorovici, *Calculul economic al folosirii optime a resurselor*, București, Edit. științifică, 1966.
9. M. Elefterescu, Șt. Kovacs, Gh. Trandafirescu, *Contributions à l'établissement de la meilleure variante pour la couverture du nécessaire d'énergie*, Rev. Roum. Sci.-Tehn.-Electr. Énerg., *4*, 709—716 (1965).
10. Studienausschuss des Westeuropäischen Kohlenbergbaus, National Coal Board, *Eine Energiepolitik für Westeuropa*, Essen, 1966.
11. Alfred Buch, *Die Notwendigkeit einer konzentrierten Energieplanung*, Energie, **20**, *1* (1968).
12. Cs. Nagy, V. Caracudovici, S. Manea, *Contribuții la metodica pentru predeterminarea ritmurilor de exploatare a surselor epuizabile de energie*, St. cerc. energ. electr., *4*, 773—787 (1965).
13. Hans Michaelis, *Atomenergie heute*, München, Edit. R. Oldenbourg, 1966.
14. Studienausschuss des Westeuropäischen Kohlenbergbaus, *Die europäische Energieversorgung in Gefahr*, Essen, 1967.
15. Wolfgang Müller-Michaelis, *Die energiewirtschaftliche Struktur Westeuropas*, Benzin und Petroleum Aktiengesellschaft, Hamburg, 1966.
16. Europäische Gemeinschaft für Kohle und Stahl, *Hohe Behörde, 14. Gesamtbericht über die Tätigkeit der Gemeinschaft (1. Februar 1965—31. Januar 1966)*, Luxemburg, 1966.
17. Europäische Gemeinschaft für Kohle und Stahl. *Hohe Behörde, 15. Gesamtbericht über die Tätigkeit der Gemeinschaft (1. Februar 1966—31. Januar 1967)*, Luxemburg, 1967.
18. Dr. Kain, *Die Erdölwirtschaft im Wettbewerb*, Tagungsberichte des Energiewirtschaftlichen Instituts an der Universität Köln, *10* (1959).
19. *Untersuchung über die Entwicklung der gegenwärtigen und zukünftigen Struktur von Angebot und Nachfrage in der Energiewirtschaft der Budesrepublik unter besonderer Berücksichtigung des Steinkohlenbergbaus*, Berlin, Dunker-Humblot, 1962.
20. Benzin und Petroleum Aktiengesellschaft. *Energieimporte und Versorgungssicherheit in der Bundesrepublik*, 1965.
21. *Das Verarbeitungsprogramm 1966 der Raffinerien in der Bundesrepublik*, Erdöl und Kohle, **19**, *1* (1966).
22. Direcția Centrală de Statistică, *Anuarul statistic al Republicii Socialiste România*, 1966—1968.

CONTRIBUȚII LA ÎMBUNĂTĂȚIREA CALITĂȚII PROGNOZELOR CONSUMULUI DE ENERGIE DIN INDUSTRIE

DE

V. CARACUDOVICI, S. MANEA, G. PANAITESCU, G. TROIA și M. WEISS

620.9

Se analizează posibilitatea determinării cu metode globale a necesarului viitor de energie al unei ramuri industriale pentru produsele pentru care nu se cunoaște evoluția consumului specific sau producția în unități naturale și deci metoda analitică nu poate fi aplicată. Se dau relațiile matematice care se pot folosi în acest scop și se aplică pe un caz concret.

Stabilirea necesarului de energie în perspectivă a făcut în ultimul timp obiectul unui număr mare de studii și cercetări [1]—[4], în vederea creării condițiilor pentru aprovizionarea economiei naționale cu energie de toate formele în cantitatea și de calitatea corespunzătoare.

În lucrările metodice referitoare la predeterminarea necesarului de energie se obișnuiește să se clasifice metodele practice de prognoză în două mari categorii:

— metode globale, care se bazează pe studierea în ansamblu a domeniului la care se referă prognoza, luînd în considerare datele statistice existente, și

— metode analitice, care se bazează pe studierea separată a elementelor care compun consumul de energie, separarea lor făcîndu-se după un anumit criteriu.

În domeniul prognozelor energetice se utilizează des metoda analitică bazată pe studierea evoluției consumului specific de energie pe produse sau pe prestații (sau pe categorii ale acestora).

În principiu, metoda constă în predeterminarea evoluției necesarului de energie pentru obținerea fiecărui produs sau prestație (W_i) pe baza dinamicii consumului specific de energie (w_i) și a volumului producției sau prestației (p_i) și obținerea consumului total prin însumare:

$$W_{tot}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\, p_i(t). \qquad (1)$$

Dinamica consumurilor specifice de energie și a volumelor producțiilor sau prestațiilor considerate se determină în mod concret ținînd

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 515—524, 1970

seama atît de instalaţiile existente, cît şi de cele prevăzute a se construi în viitor, de tendinţele generale, de introducere a tehnicii noi şi de utilizarea mai raţională a energiei de toate formele.

Metoda analitică cu un fundament atît de exact dă rezultate bune pentru termene relativ scurte, de mărimea unui cincinal. Din dezavantajele care se atribuie de obicei acestei metode, efectuarea unui volum mare de calcule este astăzi depăşită prin posibilităţile introduse de utilizarea calculatoarelor electronice. Rămîne însă cerinţa de a se dispune de un număr mare de informaţii iniţiale atît asupra produselor fabricate în întreprinderile existente, cît şi asupra celor prevăzute pentru viitor, informaţii care nu pot fi obţinute decît pentru un număr relativ mic de produse principale cu pondere mare în volumul producţiei globale sau în consumul de energie. Extinderea metodei analitice pînă la cuprinderea întregului consum de energie este limitată deci atît de lipsa datelor referitoare la consumul specific de energie, neexistînd pentru toate produsele norme energetice, cît mai ales de lipsa indicatorilor asupra creşterii volumului fizic al acestor produse sau prestaţii în perioadele de prognoză, ele fiind exprimate, în general, global prin indicatori valorici.

Limitarea introdusă de extinderea sistemului informaţional face ca precizia de ansamblu ce se poate obţine cu metoda analitică să depindă în primul rînd de ponderea produselor individualizate în consumul total de energie, pentru că consumul aferent restului producţiei se predetermină de obicei prin aprecieri, fără o fundamentare tehnică-ştiinţifică corespunzătoare.

Acoperirea cu indicatori de consum specific de energie care să permită aplicarea metodei analitice în prognoza necesarului de energie nu este uniformă pentru toate ramurile industriei, ea depinzînd de varietatea producţiei ramurii respective şi de ponderea consumului de energie al produselor principale în consumul total, această pondere fiind cu atît mai mare cu cît producţia ramurii analizate este mai omogenă.

Apare deci necesitatea ca, în cazul folosirii metodei analitice în industrie, necesarul de energie pentru produsele de importanţă mai mică să se stabilească pe altă cale.

Lucrarea de faţă îşi propune să analizeze posibilitatea determinării acelei părţi a necesarului de energie al unei ramuri industriale care nu poate fi determinat cu metoda analitică, făcînd apel la cealaltă categorie de metode, metode globale, rezultînd deci o combinare a metodei analitice cu cea globală, făcută în scopul îmbunătăţirii preciziei generale a prognozelor energetice.

METODE GLOBALE DE PROGNOZĂ PENTRU STABILIREA EVOLUŢIEI NECESARULUI DE ENERGIE PENTRU ANSAMBLUL PRODUSELOR NECUPRINSE PRIN METODA ANALITICĂ *)

Dispunînd de date statistice dintr-o perioadă suficient de lungă şi caracteristică, se pune problema alegerii tipului de funcţie pentru modelarea evoluţiei fenomenului analizat. Problema alegerii funcţiei de apro-

*) În cele ce urmează, pentru simplificarea expunerii, ansamblul produselor neindividualizate prin metoda analitică în studiul de prognoză va fi denumit „rest producţie" şi consumul corespunzător, în mod echivalent, „rest consum".

ximație este foarte importantă în cazul extrapolării șirului statistic în afara intervalului cunoscut, căci neaprecierea justă a trendului statistic poate da erori cu atît mai mari, cu cît distanța față de perioada de bază crește. Deci determinarea cît mai justă a funcției matematice cu care se modelează fenomenul obiectiv este problema principală a prognozei statistice-matematice [5], [6].

În principiu, pentru preevaluarea necesarului de energie pentru restul producției dintr-o ramură a industriei (W_r) s-au luat în considerare toate categoriile de metode globale experimentate în anii anteriori pentru ansamblul economiei naționale sau pentru ramurile și subramurile ei. S-au utilizat în acest fel atît metode bazate pe extrapolarea legilor de variație în timp a consumurilor de energie, cît și cele bazate pe extrapolarea corelației dintre consumul de energie și indicatorii economici sintetici caracteristici pentru dezvoltarea domeniului respectiv.

Plecînd de la premisa că structura producției la nivelul unei ramuri industriale nu se schimbă brusc de la an la an, adică a păstrării în anumite limite a proporției dintre consumul de energie aferent producțiilor individualizate în studiile de prognoză și consumul de energie al celorlalte produse realizate în cadrul ramurei respective, pe de o parte, și a unei variații de creștere continuu monotonă a celor două categorii de consum, pe de altă parte, se poate face prognoza pe baza extrapolării seriilor statistice.

Metoda determinării legilor de variație în timp a unor mărimi energetice și extrapolarea lor în viitor a găsit o largă utilizare pentru preevaluarea necesarului de energie, datorită simplității ei și ușurinței cu care se pot obține datele statistice necesare.

Ținînd seama de caracterul evoluției în funcție de timp a restului consumului de energie și de rezultatele obținute în cazul prognozei întregului consum, se recomandă ca potrivită aproximarea seriei statistice cu un polinom de forma

$$W_r = a + bt + ct^{\alpha}, \tag{2}$$

în care cu t s-a notat timpul și cu a, b, c și α constante de calcul. Determinarea parametrilor de calcul (a, b, c), pentru un α dat se poate realiza prin metoda pătratelor minime din ecuațiile normale

$$\begin{aligned} na + b\Sigma t + c\Sigma t^{\alpha} &= \Sigma W_r, \\ a\Sigma t + b\Sigma t^{\alpha} + c\Sigma t^{\alpha+1} &= \Sigma W_r t, \\ a\Sigma t^{\alpha} + b\Sigma t^{\alpha+1} + c\Sigma t^{2\alpha} &= \Sigma W_r t^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3}$$

Valoarea optimă a lui α se determină prin încercări repetate, selecția făcîndu-se prin mărimea sumei pătratelor abaterilor valorilor reale față de cele calculate.

Preevaluarea necesarului de energie prin metoda corelațiilor are la bază stabilirea unei funcții de legătură între consumul de energie și unul sau mai mulți indicatori economici sintetici, caracteristici pentru dezvoltarea economică, și extrapolarea acestei corelații pentru viitor.

Pentru calculul corelaţiei la categoria de produse la care ne referim în lucrarea de faţă, indicatorul economic folosit este valoarea producţiei industriale, respectiv indicele producţiei industriale (I_r). Această alegere s-a făcut pornind de la constatările, rezultate din cercetările efectuate anterior, că indicele producţiei industriale, în general, se corelează bine cu mărimile energetice, că dezvoltarea lui este proporţională cu ceilalţi indicatori economici (produs social, venit naţional, productivitatea muncii) şi că este uşor de obţinut din evidenţele statistice existente.

Pentru modelarea matematică a corelaţiilor de acest gen se pot folosi funcţiile

$$W_r = a + bI_r^z, \tag{4}$$

$$W_r = a + bI + cI_r^z, \tag{4'}$$

care pe ansamblul economiei, pe ansamblul industriei sau pe ramuri ale acesteia au dat rezultate bune.

Determinarea parametrilor acestor ecuaţii se poate face de asemenea cu metoda pătratelor minime din sistemele de ecuaţii normale, similare cu cele prezentate anterior.

Consumul de energie primară creşte, în general, mai încet decît producţia industrială şi de aceea modelarea corelaţiei se poate face cu rezultate bune cu relaţia (4), în care $\alpha < 1$, iar consumul de energie electrică creşte mai repede decît producţia industrială, modelîndu-se bine cu relaţia (4'), în care $\alpha > 1$.

Uneori consumul de energie primară sau de energie electrică pentru restul producţiei variază într-o anumită măsură independent de producţia industrială, în special datorită variaţiei consumurilor specifice de energie. În acest caz se recomandă utilizarea relaţiei

$$W_r = (a + bI_r)\,\beta', \tag{5}$$

care ţine seama de această tendinţă prin factorul β'.

În cazul utilizării relaţiei (5), după cum rezultă din cîteva experimentări, pentru descrierea consumului de combustibil β poate fi luat între 0,97 şi 0,99, iar în cazul energiei electrice între 1,01 şi 1,03.

Ecuaţiile normale pentru relaţia (5) sînt de forma

$$\begin{aligned} na + b\Sigma I_r &= \Sigma \frac{W_r}{\beta'}, \\ a\Sigma I_r + b\Sigma I_r^2 &= \Sigma \frac{W_r I_r}{\beta'}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă în evoluţia consumului de energie se constată o creştere urmată de o tendinţă de frînare, însă fără a se plafona, atunci modelarea se poate realiza cu funcţia logistic-logaritmică

$$W_r = \frac{A \lg (I_r + a)}{1 + b\,10^{-\alpha I_r}}, \tag{7}$$

în care A și a reprezintă mărimi de calcul fixate inițial. A se ia de obicei egal cu dublul ordonatei punctului de inflexie, iar a se apreciază pornind de la ideea alegerii pentru modelarea părții funcției logaritmice cu o curbură suficient de mică, care prin înmulțire cu o funcție logistică să se mențină pînă la punctul de inflexiune caracterul exponențial, după care se accentuează tot mai mult caracterul logaritmic. Pe baza unor studii practice s-a constatat că $a = 30$ duce la rezultate bune.

Pentru aplicarea metodei pătratelor minime asupra relației (7) se face transformarea

$$Y = \frac{A \lg (I_r + a)}{W_r} - 1 = b \cdot 10^{-\alpha I_r}, \tag{8}$$

prin logaritmarea căreia se obține funcția

$$\lg b - \alpha I_r = \lg Y, \tag{8'}$$

pentru care ecuațiile normale sînt

$$\begin{aligned} n \lg b - \alpha \Sigma I_r &= \Sigma \lg Y, \\ \lg b \Sigma I_r - \alpha \Sigma I_r^2 &= \Sigma \lg Y I_r. \end{aligned} \tag{9}$$

Rezultate bune pot fi obținute în unele cazuri prin considerarea evoluției statistice a consumului specific de energie (w_r), definit ca raportul dintre restul consumului de energie (W_r) și valoarea globală a restului produselor (P_r), și prin obținerea consumului total cu relația

$$W_r = w_r P_r, \tag{10}$$

ceea ce reprezintă în fond, sub un anumit aspect, o generalizare a metodei analitice.

Dacă consumul specific de energie are o evoluție continuu scăzătoare care tinde către un minim fără a avea un punct de inflexiune, modelarea se poate face cu o hiperbolă:

$$w_r = w_{r\,min} + bt^{-\alpha}, \tag{11}$$

pentru care ecuațiile normale, după aprecierea lui $w_{r\,min}$ și a originii axei absciselor ($t = 0$) și după logaritmare, au forma

$$\begin{aligned} n \lg b - \alpha \Sigma \lg t &= \lg z_r, \\ \lg b \Sigma \lg t - \alpha \Sigma (\lg t)^2 &= \Sigma \lg t \lg z_r, \end{aligned} \tag{12}$$

z_r reprezentînd diferența $w_r - w_{r\,min}$.

În cazul că în perioada trecută consumul specific are o evoluţie crescătoare, urmată de o frînare, o plafonare şi apoi o scădere lentă, evoluţia se poate descrie cu o exponenţială plafonată :

$$w_r = w_{r\,min} + a \cdot 10^{(bt - ct^2)}, \tag{13}$$

pentru care în mod similar ecuaţiile normale sînt

$$\begin{aligned} n \lg a + b\Sigma t - c\Sigma t^2 &= \Sigma \lg z_r, \\ \lg a\Sigma t + b\Sigma t^2 - c\Sigma t^3 &= \Sigma \lg z_r t, \\ \lg a\Sigma t^2 + b\Sigma t^3 - c\Sigma t^4 &= \Sigma \lg z_r t^2. \end{aligned} \tag{14}$$

APLICAREA METODELOR GLOBALE DE PROGNOZĂ LA STUDIUL EVOLUŢIEI RESTULUI CONSUMULUI DE ENERGIE DINTR-O RAMURĂ INDUSTRIALĂ

Pentru exemplificarea posibilităţii practice de aplicare a metodei propuse, s-a luat o ramură a industriei, industria materialelor de construcţii *, pentru care aproximativ 80% din consumul de combustibil şi 70% din consumul de energie electrică a fost determinat pentru cincinalul 1971—1975 prin metoda analitică. În plus consumurile specifice de energie ale produselor care sînt cuprinse în metoda analitică sînt mai bine definite şi au o structură mai unitară, ceea ce le conferă o stabilitate mai mare decît pentru alte ramuri ale industriei.

S-a studiat separat evoluţia consumului de combustibil pentru restul producţiei şi evoluţia consumului de energie electrică pentru restul producţiei. În conformitate cu modul în care s-a procedat practic la predeterminarea consumului de energie, nomenclatorul produselor nominalizate prin metoda analitică diferă în cele două situaţii. Sînt unele produse (ca, de exemplu, clincherul, varul) care au consum important de combustibil, dar care sînt nesemnificative sub aspectul consumului de energie electrică.

Datele primare necesare pentru a aplica metoda propusă sînt următoarele :

— consumul de combustibil total al ramurii industriale respective;
— consumul de energie electrică total pe ramură;
— valoarea producţiei globale industriale pe ramură;
— consumul de energie electrică corespunzător produselor cuprinse prin metoda analitică de prognoză;
— consumul de combustibil corespunzător produselor nominalizate prin metoda analitică;

---

[2]) Datele prezentate conţin numai industria materialelor de construcţii cu caracter republican, care depinde de Ministerul Industriei Materialelor de Construcţii, nu şi industria locală corespunzătoare.

— valoarea producției industriale a produselor cuprinse prin metoda analitică de prognoză în cazul energiei electrice și separat în cazul combustibilului.

Cu ajutorul acestor informații se pot calcula prin diferență datele necesare aplicării metodei propuse :

— consumul de combustibil pentru restul produselor, respectiv consumul de energie electrică ;

— valoarea restului produselor în cele două situații ;

— consumul specific de combustibil pentru restul producției, determinat ca raportul dintre consumul de combustibil al produselor considerate și valoarea acestor produse, respectiv consumul specific de energie electrică determinat în mod similar.

În tabela 1 se dă pentru ramura industrială analizată ponderea consumului de combustibil și de energie electrică pentru restul producției față de consumul total pe ramură.

Tabela 1

Ani	Ponderea rest consum de combustibil %	Ponderea rest consum de energie electrică %
1961	—	17,4
1962	18,7	18,6
1963	17,6	15,6
1964	16,7	16,4
1965	16,5	16,7
1966	17,7	18,5
1967	17,4	19,7
1968	19,0	20,3

Din tabelă rezultă că în șirurile statistice respective nu s-au manifestat salturi bruște de la un an la altul, ceea ce justifică, după cum s-a făcut premisa în capitolul anterior, aplicarea metodelor statistice-matematice de prognoză.

Dintre relațiile matematice enumerate în capitolul precedent, s-a ales, pe baza considerentelor amintite mai sus și a analizei materialului statistic prezentat grafic în figurile 1—5, pentru prognoza consumului de combustibil relațiile (2), (4′), (5) și (13), iar pentru prognoza consumului de energie electrică relațiile (2) și (4′). În figuri se prezintă și curbele de aproximație alese în final, indicîndu-se ecuația concretă de determinare a lor.

Prognoza necesarului de combustibil și de energie electrică pentru anul 1975 pentru ramura luată în studiu, calculată pe baza extrapolării

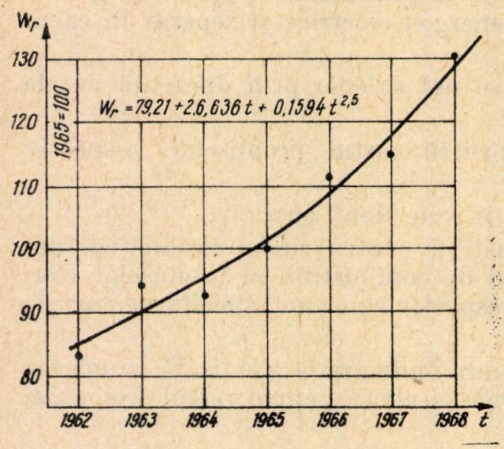


Fig. 1. — Variaţia consumului de combustibil al producţiei prognozate global în funcţie de timp.

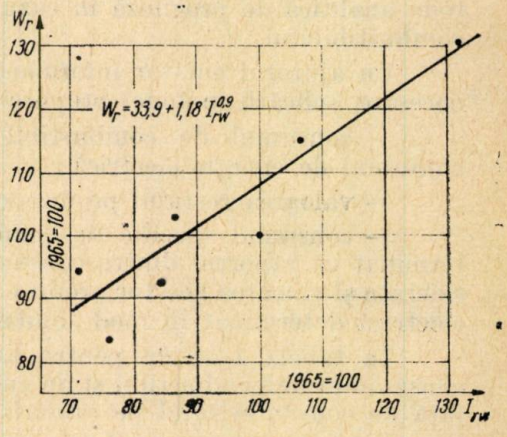


Fig. 2. — Variaţia consumului de combustibil al produselor prognozate global în funcţie de indicele producţiei industriale.

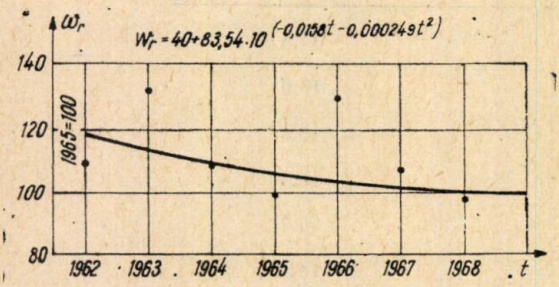


Fig. 3. — Evoluţia în funcţie de timp a consumului specific de combustibil al produselor prognozate global.

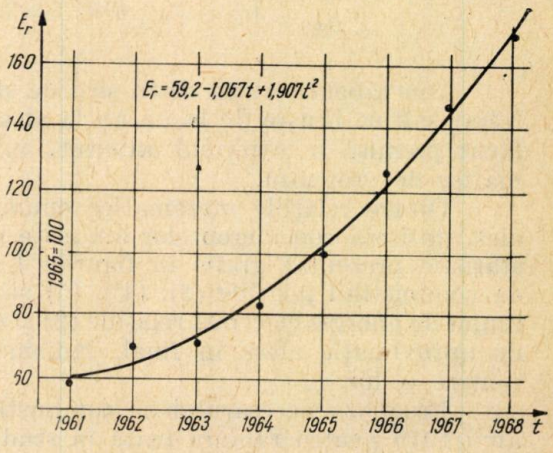


Fig. 4. — Evoluţia în funcţie de timp a consumului de energie electrică al produselor prognozate global.

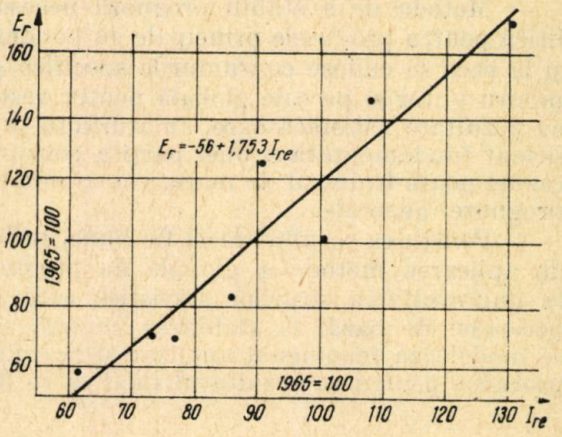


Fig. 5. — Evoluția consumului de energie electrică al produselor prognozate global în funcție de indicele producției industriale.

relațiilor matematice amintite (exprimată în indici de creștere față de anul 1965, considerat 100), se dă în tabela 2, în care se prezintă și abaterea standard corespunzătoare fiecărui caz.

Tabela 2

	Relația utilizată	Abaterea standard %	Prognoza 1975
	Consum de combustibil		
1	$W_r = 79{,}2 + 2{,}636\ t + 0{,}1594\ t^{2{,}5}$	2,8	257,6
2	$W_r = 33{,}9 + 1{,}18\ I_{rw}^{0{,}9}$	7,1	242,4
3	$W_r = (33{,}4 + 0{,}18\ I_{rw})\ 0{,}99\ t$	7,9	248,3
4	$W_r = 40 + 83{,}54 . 10^{(-0{,}0158\ t\ -\ 0{,}000249\ t^2)}$	8,2	259,1
	Consum de energie electrică		
5	$E_r = 59{,}2 - 1{,}067\ t + 1{,}907\ t^2$	2,7	427,3
6	$E_r = -\ 56 + 1{,}753\ I_{re}$	12,7	463,4

Perioada de bază 1962—1968 pentru consumul de combustibil și 1961—1968 pentru consumul de energie electrică. $W = I = w = 100$ în 1965; $t = 0$ în 1960.

Se observă că valorile obținute pentru anul 1975 cu diverse relații sînt destul de apropiate între ele, abaterea standard însă este diferită, fiind mult mai mare în cazul extrapolării corelațiilor și în cazul extrapolării consumului specific decît în cazul extrapolării seriilor de timp.

★

Metoda de a stabili prognoza necesarului de energie pe cale analitică pentru produsele principale cu pondere mare în consumul de energie şi la care se cunosc consumurile specifice şi volumul producţiei prevăzut pentru viitor şi pe cale globală pentru restul produselor poate fi aplicată cu rezultate satisfăcătoare, înlăturîndu-se prin aceasta aprecierea insuficient fundamentată a unei părţi a consumului de energie, care în unele cazuri poate fi destul de mare, contribuind deci la îmbunătăţirea calităţii prognozei generale.

Pentru ca rezultatele să fie bune, trebuie respectate condiţiile cerute de aplicarea metodelor globale de prognoză referitoare la lungimea şi la uniformitatea şirurilor statistice care stau la dispoziţie, la alegerea perioadei de bază, la stabilirea corectă a relaţiei matematice prin care se modelează fenomenul analizat şi la aplicarea simultană a mai multor procedee pentru ca rezultatul final să se determine ca medie a lor.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Lienhard, *Prognoseverfahren und deren Anwendung in der Energiewirtschaft*, Elektrizitätsverwertung, **42**, *3/4*, 61–67; *5*, 127–136; *9*, 288–289 (1967).
2. H. Steiner, *Prognosemethoden und ihre Bewahrung in der Praxis*, OZE 22, *2*, 59–67 (1969).
3. I. Curelaru, N. Bordeianu, *Prognoza asupra consumului de energie electrică în R.S. România*, Rev. de statistică, **XVII**, *5*, 64–69 (1968).
4. A. Dumitrescu, M. Elefteriescu, Şt. Kovacs, *Contribuţii la stabilirea dinamicii consumurilor energetice*, St. cerc. energ. electr., **8**, *2*, 183–195 (1958).
5. Z. Hellvig, *Aproksymacja Stchastyczna Panstwoewe Wydawnictwo Ekonomiczne*, 1965.
6. Cs. Nagy, V. Caracudovici, *Faktoren die die Qualität einer energetischen Zeitreihenprognoze bestimmen*, Rev. Roum. St. Techn. Electr. Energ., **13**, *4*, 671–678 (1968).
7. D. Berbece, V. Caracudovici, P. Dan, Cs. Nagy, P. Panaitescu, *Mathematische Modelierung der Entwicklung des spezifischen Energieverbrauches zum Zwecke der mathematischen Energienedarfsprognose*, Rev. Roum. Sc. Techn. Electr. Energ., **14**, *2*, 321–335 (1969).

CERCETĂRI TERMOGRAVIMETRICE PRIVIND ARDEREA STERILULUI DE MINĂ DE LA EXPLOATĂRILE CARBONIFERE DIN VALEA JIULUI

DE

C. COROIU

662.611

În lucrare se prezintă principalele caracteristici fizico-chimice şi tehnice ale sterilului de mină de la exploatările carbonifere Lupeni şi Anina, care recomandă aceste materiale (în prezent neutilizate) pentru folosirea în scopuri energetice şi tehnologice.

În continuare se studiază atît teoretic, cît şi experimental procesul de ardere a acestor materiale, utilizînd ca metodă de investigaţie metoda termogravimetrică (aplicată pentru prima oară în ţara noastră în acest scop), care a permis determinarea principalilor parametri ai procesului de ardere şi dinamica acestora în timpul arderii.

1. INTRODUCERE

Directivele P.C.R. cu privire la valorificarea surselor energetice şi electrificarea ţării prevăd ca una dintre principalele sarcini ale planului de dezvoltare a bazei energetice a economiei, intensificarea acţiunii generale de economisire şi raţionalizare a tuturor consumurilor de combustibili prin valorificarea resurselor energetice secundare. Pe această linie se axează acţiunea de valorificare complexă a sterilului de mină de la exploatările carbonifere din Valea Jiului, care vizează utilizarea căldurii de ardere în scopuri energetice sau tehnologice şi a cenuşii rezultate la fabricarea materialelor ceramice.

În lucrarea de faţă se prezintă atît cercetările termogravimetrice privind arderea sterilului de mină de la exploatările carbonifere Lupeni şi Anina, cît şi concluziile ce rezultă.

Scopul cercetărilor constă în determinarea pentru aceste materiale a caracteristicilor fizico-chimice şi energetice şi a dinamicii acestora în timpul procesului de ardere, a principalilor parametrii ai procesului de ardere în diferite condiţii, precum şi a comportării la ardere.

S-au studiat trei materiale diferite :

— sterilul de Lupeni, spălare ; notat prescurtat S.L.sp. ;

— sterilul de Lupeni, filtrare; notat prescurtat: S.L.f.;
— sterilul de Anina, spălare; notat prescurtat: S.A.sp., ale căror caracteristici inițiale sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Caracteristicile fizico-chimice inițiale ale materialelor cercetate:

Materialul	W^a %	A^a %	V^a %	C^a %	H^a %	S^a %	P^a_{ci} kcal/kg	P^{mc}_{ci} kcal/kg
S. L. sp.	1,00	71,88	16,75	15,59	1,50	3,04	1528,9	5637,4
S. L. f.	2,09	64,58	17,57	22,41	2,07	1,18	2155,7	6467,9
S. A. sp.	0,28	84,02	8,67	8,79	1,06	0,10	825,8	5260,0

în care W este umiditatea; C — carbon; H — hidrogen; S — sulf; P_{ci} — putere calorică inferioară; a — proba de analiză; mc — masă combustibilă.

Determinarea puterii calorice s-a făcut prin calcul, utilizînd relațiile

$$P_{c.s} = 81\,C + 300\,H - 26\,(O - S_v),$$
$$P^{m.c}_{ci} = P^{mc}_{s} - 54\,H^{mc}, \qquad (1)$$

în care S_v — conținutul în sulf volatil, întrucît la determinarea puterilor calorifice cu ajutorul bombei s-au întîmpinat dificultăți ca urmare a conținutului mare în cenușă.

În vederea studierii procesului de ardere, materialele au fost măcinate cu ajutorul unei mori de laborator cu discuri, avînd distanța între discuri de 3 mm. Cu această ocazie s-au făcut analizele granulometrice și s-a cercetat fenomenul de segregare a cenușii și a umidității (vezi tabela 2 și fig. 1).

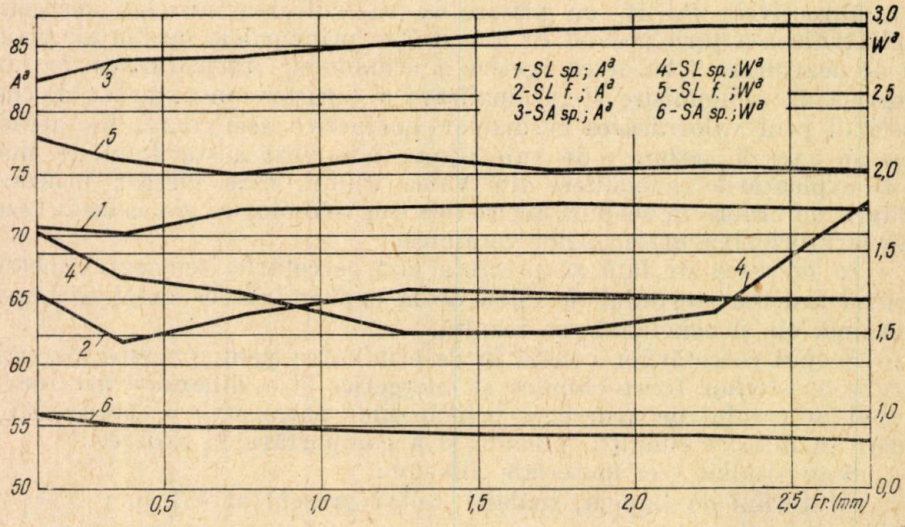


Fig. 1. — Evidențierea fenomenelor de segregare a umidității și cenușii în fracțiile granulometrice.

Tabela 2

Material	Fr. granul. (m.m)	Greutate %	W^a %	A^a %
S.L. sp.	3,0—2,5	0,10	1,80	72,04
	2,5—2,0	0,95	1,12	72,36
	2,0—1,5	13,00	1,05	72,66
	1,5—1,0	27,75	1,07	72,36
	1,0—0,5	26,00	1,25	72,05
	0,5—0,25	8,10	1,37	70,31
	<0,25	24,10	1,62	70,55
S.L. f.	3,0—2,5	0,50	2,02	64,93
	2,5—2,0	1,35	2,05	64,95
	2,0—1,5	14,25	2,03	65,04
	1,5—1,0	16,50	2,12	65,15
	1,0—0,5	19,85	2,00	63,85
	0,5—0,25	7,05	2,10	61,71
	<0,25	40,45	2,21	65,36
S.A. sp.	3,0—2,5	0,45	0,3	86,64
	2,5—2,0	2,05	0,34	86,51
	2,0—1,5	18,95	0,34	86,14
	1,5—1,0	24,50	0,35	85,12
	1,0—0,5	20,75	0,40	84,05
	0,5—0,25	7,05	0,40	83,92
	<0,25	26,15	0,46	82,21

în care R_{88} este restul pe sita de 88 μ, cu observația că s-a folosit în locul sitei 88 μ sita de 90 μ.

Analiza acestor date relevă faptul că la măcinarea tuturor acestor materiale rezultă o mare cantitate de praf (în special în cazul S.L.f.), fapt care constituie un avantaj din punctul de vedere al procesului de ardere.

Fenomenul de segregare nu este important nici în cazul umidității și nici al cenușii, ceea ce reprezintă de asemenea un avantaj din punctul de vedere al procesului de ardere.

În continuare s-a studiat măcinabilitatea acestor materiale, utilizînd metoda sovietică VTI. Conform acestei metode, indicele de măcinabilitate (m_{VTI}) se determină cu ajutorul relației

$$m_{VTI} = 2 \ln \left(\frac{100}{R_{88}}\right)^{2/3}. \qquad (2)$$

S-au obținut următorii indici de măcinabilitate: pentru S.L.sp. $m_{VTI} = 0{,}499$; pentru S.L.f. $m_{VTI} = 1{,}99$; pentru S.A.sp. $m_{VTI} = 0{,}526$, ceea ce reprezintă valori foarte avantajoase.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

Urmărind macroscopic desfășurarea procesului de ardere a unei particule sau a unei mulțimi de particule aflate în condiții identice, se pot distinge trei perioade principale: perioada de întîrziere la aprindere, perioada de ardere a materiilor volatile și perioada de ardere a reziduului cărbunos.

Perioada de întîrziere la aprindere este perioada care precedă arderea materiilor volatile. În timpul desfășurării ei putem deosebi cel puțin două procese diferite : procesul de încălzire și procesul de uscare, care se desfășoară simultan.

În literatura de specialitate [1]—[3], problema este tratată global și vizează în special găsirea unor relații de calcul pentru timpul de întîrziere la aprindere. Ecuația de bilanț a lui Nusselt, completată cu termenul reprezentînd căldura degajată, este reprezentată astfel :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 c_p \gamma \frac{dt_p}{d\tau} = \varphi_r C_r \left[\left(\frac{T_a}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_p}{100}\right)^4\right] 4\pi r^2,$$
$$- 4\pi r \lambda (t_p - t_a) + 4\pi r^2 l K f(c)\, q\, e^{-E/RT_p}, \tag{3}$$

în care r este raza particulei, γ greutatea specifică, c_p căldura specifică, λ conductivitatea termică, φ_r coeficient unghiular de radiație, C_r coeficient de radiație, τ timpul, $t_a(T_a)$ temperatura mediului ambiant particulei, $t_p(T_p)$ temperatura particulei, l grosimea zonei de reacție, K constanta vitezei de reacție, $f(c)$ funcție de concentrații, q căldura de reacție, E energia de activare.

Neglijînd aportul primilor doi termeni din partea dreaptă în momentul aprinderii, vom avea

$$\frac{4}{3}\pi r^3 c_p \gamma \frac{dt_p}{d\tau} = 4\pi r^2 l k f(c)\, q\, e^{-E/RT_p}, \tag{4}$$

ceea ce conduce la expresia

$$\tau_{i.a.} = \frac{\pi \gamma C_p \gamma}{3klf(c)\, q} \int_{T_{p_0}}^{T_a} e^{-E/RT_p} dT. \tag{5}$$

Carabogdan [3] a efectuat studii privind întîrzierea la aprindere a particulelor de combustibili solizi indigeni și propune pentru condiții aerodinamice cvasistaționare

$$\tau_{i.a,w\simeq 0} = k_0 d_{mc}^{0,62}\, T^{-4,05}\, C_{O_2}^{z}, \tag{6}$$

iar pentru o viteză a comburantului $w > 0$

$$\tau_{i.a,w} = \tau_{i.a.w\simeq 0} \cdot T_a^{1,75} \cdot W^r, \tag{7}$$

în care K_0 este un coeficient depinzînd de natura combustibilului, d_{mc}, diametrul mediu corectat, C_{O_2} concentrația în oxigen a comburantului, T temperatura incintei de ardere, T_a temperatura de preîncălzire a comburantului, $z = -0{,}66$, $r = -1{,}1$ pentru combustibili superiori și $z = -0{,}34$, $r = -0{,}41$ pentru combustibili inferiori.

Următoarea perioadă în desfășurarea procesului de ardere este perioada de ardere a materiilor volatile, caracterizată prin timpul de ardere a materiilor volatile (τ_{av}).

Este des întîlnit în literatura de specialitate [6] un model fizic al procesului în care particula de combustibil este imaginată ca un corp poros sferic, înglobînd o sferă concentrică de fluid supus unui proces de schimb de masă prin evaporare și difuzie în masa poroasă.

Conform acestui model fizic și în acord cu teoria lui Darcy și Carman, fluxul de volatile (v_{dv}) printr-o suprafață de rază ($a_0 = d_{0/2}$) va fi

$$v_{dv} = -\frac{r^2}{d_0^2}\frac{P_0}{\eta}\frac{dc}{dr}, \tag{8}$$

în care P_0 este permeabilitatea masei porcase, η viscozitatea volatilelor și dc/dr gradientul radial al concentrației.

În același timp, v_{dv} reprezintă masa de schimb pe unitatea de suprafață a lichidului

$$-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dm}{d\tau},$$

deci

$$v_{dv} = -\gamma_0\frac{V_0}{100}\frac{dr}{d\tau}, \tag{9}$$

de unde rezultă

$$\tau_{dv} = \frac{\gamma_0\frac{V_0}{100}}{8C_0\frac{P_0}{\eta}}d_0^2 = k\frac{V_0}{P_0}d_0^2 = k_d d_0^2. \tag{10}$$

Considerînd cantitatea de volatile (G_v), avem

$$G_v = k_0 d_0^3\frac{V_0}{100}. \tag{11}$$

Se poate calcula viteza de ardere a volatilelor (v_{av}) în ipoteza $\tau_{dv} = \tau_{av}$:

$$v_{av} = \frac{G_v}{\tau_{dv}} = \frac{k_0 d_0^3 V_0}{100\, k_d d_0^2} = k_a d_0. \tag{12}$$

Pe baza modelului fizic amintit, Carabogdan [3] propune pentru calcularea timpului de ardere a materiilor volatile relația

$$\tau_{av} = k_{v_1} d_{mc}^{m_1}, \tag{13}$$

în care $m_1 \simeq 2$, depinzînd într-o oarecare măsură de natura combustibilului, iar k_v un coeficient depinzînd de natura combustibilului de regimul aerodinamic etc., iar pentru viteza de ardere a volatilelor

$$v_{av} = k_{v_2} d_{mc}^{m_2}, \tag{14}$$

în care $m_2 \simeq 1{,}05$, k_{v_2} fiind un coeficient proporțional cu conținutul în volatile al combustibilului respectiv.

Interpretînd cinetic procesul de degajare a volatilelor, Coroiu și Nistor [7] au stabilit existența a trei stadii în desfășurarea procesului degajării volatilelor, corespunzătoare ecuațiilor generale :

$$V_{1,\tau}^{mc} = V_0^{mc} \, e^{-k_{v_1}\tau_{dv_1}}, \tag{15}$$

$$V_{2,\tau}^{mc} = \frac{1}{a_{v_2}} V_0^{mc} \, e^{-k_{v_2}\tau_{dv_2}}, \tag{16}$$

$$V_{3,\tau}^{mc} = \frac{1}{a_{v_3}} V_0^{mc} \, e^{-k_{v_3}\tau_{dv_3}}, \tag{17}$$

care permit calcularea timpului de degajare a volatilelor τ_{dvi} corespunzător fiecărui stadiu :

$$\tau_{dv_1} = \frac{1}{k_{v_1}} \ln \frac{V_0^{mc}}{V_{1,\tau}^{mc}}, \tag{18}$$

$$\tau_{dv_2} = \frac{1}{k_{v_2}} \ln \frac{V_0^{mc}}{a_{v_2} \cdot V_{2,\tau}^{mc}}, \tag{19}$$

$$\tau_{dv_3} = \frac{1}{k_{v_3}} \ln \frac{V_0^{mc}}{a_{v_3} V_{3,\tau}^{mc}}, \tag{20}$$

în care $V_{1,\tau}^{mc}$; $V_{2,\tau}^{mc}$; $V_{3,\tau}^{mc}$ reprezintă conținutul la un moment dat în volatile al combustibilului respectiv, V_0^{mc} conținutul în materii volatile (inițial) exprimate la masa combustibilă, K_{v_1}, K_{v_2}, K_{v_3} constante de viteză.

Calculul vitezei de ardere a volatilelor se face pe baza presupunerii $\tau_{dv} = \tau_{av}$ și a relației

$$\tau_{dv} \simeq \tau_{dv_1} + \tau_{dv_2}, \tag{21}$$

întrucît τ_{dv_3} reprezintă, conform [7], durata procesului de dehidrogenare care are loc concomitent cu procesul de ardere a reziduului cărbunos și pe care-l frînează parțial prin interceptarea fluxului de oxigen spre particulă [1].

Utilizînd relațiile (11), (12), (18), (19), (21), se obține

$$v_{av} = \frac{k_0 d_0^3 V_0^a}{100 \left(\frac{1}{k_{v_1}} \ln \frac{V_0^{mc}}{V_{1\tau}^{mc}} + \frac{1}{k_{v_2}} \ln \frac{V_0^{mc}}{a_{v_2} V_{2\tau}^{mc}} \right)}. \tag{22}$$

Perioada de ardere a reziduului cărbunos reprezintă ultima perioadă a procesului și este caracterizată prin timpul de ardere a reziduului cărbunos (τ_{ar}).

Reziduul cărbunos participă la o serie de reacţii chimice, influenţate de factori ca temperatura, factori aerodinamici, caracteristici geometrice interne şi externe ale particulei, natura combustibilului etc.

Considerînd timpul total de ardere a reziduului cărbunos τ_{ar} ca sumă între timpul necesar realizării contactului fizic comburant — carburant τ_{cf} şi timpul necesar desfăşurării reacţiilor chimice de ardere $\tau_{r.ch.}$:

$$\tau_{ar.} = \tau_{c.f} + \tau_{r.ch.}, \tag{23}$$

şi notînd cu W_m şi W_s viteza globală de ardere raportată la unitatea de masă, respectiv la unitatea de suprafaţă externă:

$$W_m = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}, \tag{24}$$

$$W_s = \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}, \tag{25}$$

vom avea trei situaţii diferite, corespunzătoare principalelor tipuri de ardere:

— ardere cinetică, pentru care $\tau_{c.f} < \tau_{r.ch.}$ în domeniul temperaturilor joase;

— ardere difuzivă, pentru care $\tau_{cf} > \tau_{r.ch.}$ în domeniul temperaturilor înalte;

— ardere difuziv cinetică, pentru care $\tau_{cf} \simeq \tau_{r.ch.}$ în domeniul temperaturilor medii.

Influenţa factorilor temperatură, diametrul particulei, suprafaţă specifică se manifestă diferit pentru cele trei tipuri de ardere şi poate fi rezumată astfel:

$$w_m \sim T^n \cdot \mathrm{d}^p \cdot s^r, \tag{26}$$

$$w_s \sim T^o \cdot \mathrm{d}^t \cdot s^n; \tag{27}$$

— pentru arderea cinetică cînd energia aparentă de activare este E, avem o, $n > 1$; $p \simeq 0$; $r, u > 1$; $t \simeq 1$;

— pentru arderea difuzivă (difuzie internă) avem o, $n \simeq 1$; $r, u \simeq 0$;

— pentru arderea difuziv cinetică, ardere în regim de difuzie externă, cînd energia de activare este $E/2$, se obţine o, $n \simeq \frac{1}{2}$; $p \simeq -2$; $t \simeq -1$; $r, u \simeq 0$.

Procesul de ardere a particulei de combustibil solid este în general caracterizat de consumul de oxigen respectiv (făcînd abstracţie de rolul reacţiilor secundare şi al substanţelor volatile). În acelaşi timp deosebim arderea pe suprafaţa exterioară şi interioară a particulei.

În cazul practic al arderii în condiţiile instalaţiilor industriale (la temperaturi ridicate), rolul preponderent îl are arderea pe suprafaţa exterioară cu creşterea corespunzătoare a aportului reacţiilor secundare.

Consumul de oxigen pe unitatea de suprafață exterioară a particulei este dat de două componente :

— cantitatea de oxigen care reacționează ;

— cantitatea de oxigen care difuzează în masa particulei :

$$q = F_s + D_i \left(\frac{\partial c_i}{\partial n}\right)_s, \tag{28}$$

în care $F_s = F(c_i, T)$ este viteza de reacție la suprafața particulei, $(\partial c_i/\partial n)_s$ gradientul concentrației oxigenului în interiorul particulei și D_i coeficientul de difuzie interioară.

Deoarece F_s și $D_i(\partial c_i/\partial n)_s$ depind de natura combustibilului, mărimea q caracterizează oxireactivitatea combustibilului respectiv.

Exprimînd sub formă cinetică termenii respectivi, vom avea

$$q = \frac{Q}{S_p} = Kf(c) + K\frac{S_i}{S_p} f(c) = K\left(1 + \frac{S_i}{S_p}\right) f(c), \tag{29}$$

în care Q este consumul total de oxigen la arderea particulei, S_p suprafața externă a particulei, $S_i = s_i V_p$ suprafața internă a particulei, V_p volumul particulei.

Dacă se notează

$$\alpha = K\left(1 + \frac{S_i}{S_p}\right) = K\frac{S_p + S_i}{S_p} = K\frac{S}{S_p}, \tag{30}$$

în care S este suprafața totală a particulei, se observă că α nu diferă de constanta procesului cinetic K decît prin raportul suprafețelor. În cazul cînd $D_i(\partial C_i/\partial n)_s$ este neglijabil (particulă impermeabilă), $\alpha = K$, iar $q = Kf(c)$.

În general, ecuația difuziei oxigenului în interiorul unei particule sferice cu care reacționează este

$$D_i\left\{\frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_1 C_i\right\} - m_{02} = 0, \tag{31}$$

în care

$$\Delta_1 C_i = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial C_i}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 C_i}{\partial\varphi^2}, \tag{32}$$

$$m_{02} = KS_i C_i = K_i C_i. \tag{33}$$

Soluția ecuației (31) este

$$C_i = \sum_n A_n I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R)\frac{Y_n(\theta, \varphi_1)}{\sqrt{R}}, \tag{34}$$

în care $I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R)$ este o funcție cilindrică, $\lambda = \sqrt{K_i / D_i}$; $Y_n(\theta, \varphi_1)$ funcție sferică.

Ținînd seama de (28), avem

$$q = \alpha C_R = KC_R + D_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial r}\right)_R, \tag{35}$$

în care

$$C_R = \sum_n A_n I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R) \frac{Y_n(\theta, \varphi_1)}{\sqrt{R}}, \tag{36}$$

iar A_n se determină din condițiile la limită $r = R$ $C = C_R(\theta, \varphi_1)$. Astfel mărimea α poate fi exprimată prin relația

$$\alpha = K + \frac{\lambda D_i \sum_n A_n I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R) \frac{Y_n(\theta, \varphi_1)}{\sqrt{R}} \left[\frac{I'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda R)}{I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R)} - \frac{1}{2\lambda R}\right]}{\sum_n A_n I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, R) \frac{Y_n(\theta, \varphi_1)}{\sqrt{R}}}, \tag{37}$$

care arată că α nu este simetrică față de sferă.

Valorile medii ale lui α sînt foarte apropiate de cele rezultate din (37) pentru $C_R = \text{const}$:

$$\alpha = K + \lambda D_i \left(\operatorname{cotg} \lambda R - \frac{1}{\lambda R}\right), \tag{38}$$

sau

$$\alpha = \lambda D_i \left(\operatorname{cotg} \lambda R - \frac{1}{\lambda R} + \frac{\lambda}{S_i}\right). \tag{39}$$

Determinarea timpului de întîrziere la aprindere, de ardere a volatilelor și de ardere a reziduului cărbunos, precum și a vitezei de ardere a volatilelor și a reziduului cărbunos utilizînd relațiile analitice prezentate anterior, pune problema cunoașterii precise a unei serii întregi de mărimi caracteristice fiecărui material în parte, din care amintim căldura specifică, greutatea specifică, conductivitatea specifică, vîscozitatea (comburant, volatile), permeabilitatea, porozitatea, suprafața specifică, compoziția chimică, conținutul în volatile, apă și cenușă, coeficienții de difuzie, precum și a unor mărimi cinetice : constante de viteză, energii de activare, ordin de reacție.

Determinarea majorității acestor caracteristici nu prezintă dificultăți deosebite, multe dintre ele fiind tabelate. Nu același lucru se poate spune despre coeficienții de difuzie internă, și mărimile cinetice a căror metode de determinare se bazează tocmai pe măsurarea experimentală a mărimilor globale τ_{ia}, τ_{av}, τ_{ar} și, respectiv, v_{av}, v_{ar} și pe cunoașterea precisă a relațiilor analitice fundamentale.

3. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Una dintre metodele moderne care permite determinarea acestor mărimi este metoda termogravimetrică.

Această metodă, folosită în general în cercetarea proceselor fizico-chimice care se desfăşoară cu transfer de masă şi de căldură, a fost aplicată de către autor cu succes la studierea proceselor de combustie.

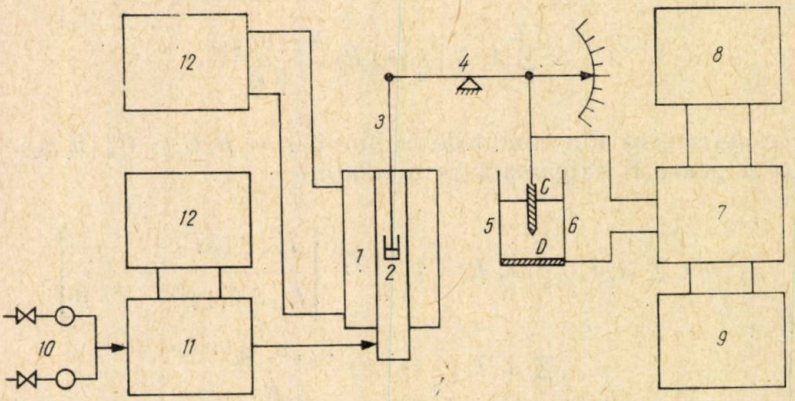


Fig. 2. — Schema generală a instalaţiei termogravimetrice pentru studierea arderii combustibililor solizi.

Instalaţia experimentală este prezentată în figura 2 şi se compune din:

1. — Cuptor electric permiţînd încălzirea incintei de ardere pînă la 1 100°C;
2. — Container pentru probă;
3. — Fir de platină;
4. — Balanţă mecanică cu contragreutăţi, care permite transformarea variaţiei de greutate a probei de cercetat în deplasări pe verticală a electrodului mobil (C);
5. — Traductor electrolitic, care permite, împreună cu dispozitivul de compensare şi detecţie (7), transformarea variaţiilor de greutate, respectiv a deplasărilor pe verticală a electrodului mobil (C), în variaţii de tensiune în potenţiometrul înregistrator;
6. — Electrolit, soluţie 0,017 n KCl;
7. — Dispozitiv de compensare şi detecţie, care permite, împreună cu traductorul electrolitic, transformarea deplasării pe verticală a electrodului mobil în variaţii de tensiune la intrarea în potenţiometrul înregistrator;
8. — Generator de tensiune sinusoidală în gama 20 Hz—20 KHz, care alimentează cu curent alternativ de 4 000 Hz traductorul electrolitic şi dispozitivul de compensare şi de detecţie, permiţînd eliminarea efectelor electrolizei;
9. — Înregistrator potenţiometric electronic $E.P.P\ 09-M\ 1$, care permite înregistrarea variaţiilor de greutate a probei de cercetat traduse în variaţii de tensiune;

10. — Instalația de preparare a comburantului, compusă din butelii de O_2 și N_2, reductoare de presiune, ventile și debitmetre cu capilar;

11. — Preîncălzitor electric pentru comburant;

12. — Termoregulatoare, permițînd încălzirea cu diferite viteze și menținerea la valori fixe a temperaturii incintei de ardere respectiv comburantului.

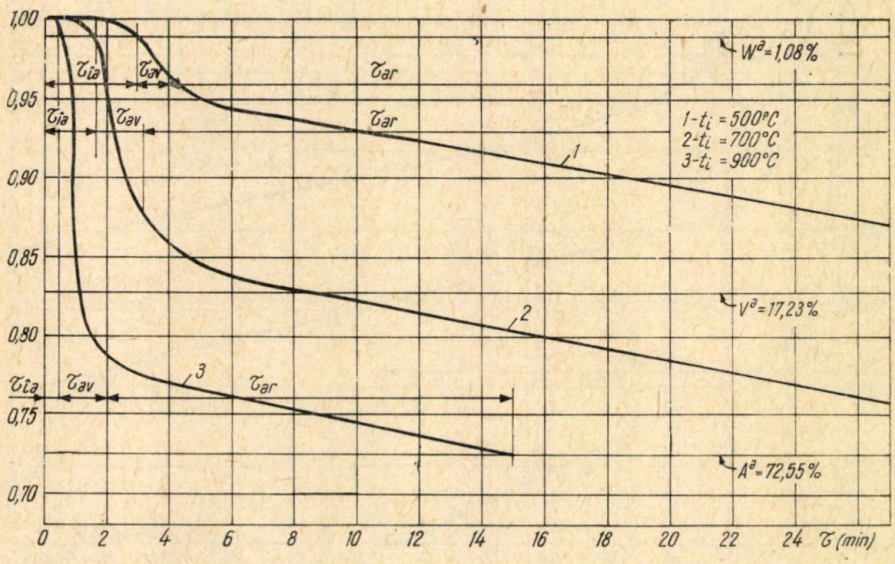


Fig. 3. — Dinamica greutății raportate a reziduului cărbunos în timpul arderii S.L. sp. 2—3 mm, cu evidențierea perioadelor de desfășurare a procesului.

Determinările termogravimetrice s-au făcut pentru fracția granulometrică 2—3 mm a fiecărui material, în condiții aerodinamice cvasistaționare fără preîncălzirea comburantului (aer atmosferic) și la temperaturi ale incintei de ardere de 500, 700 și 900°C.

Proba de cercetat (10 g) se introduce în containerul de cuarț și împreună cu acesta în interiorul incintei de ardere, urmînd apoi înregistrarea automată a variației greutății.

Prin observare directă și cronometrare s-au stabilit de asemenea valorile τ_{ia}, τ_{av}, τ_{ar} pentru fiecare caz în parte.

Rezultate experimentale directe sînt prezentate în figurile 3—5, care reprezintă dinamica greutății raportate a reziduului cărbunos în timpul procesului de ardere. Pe diagrame sînt trasate dreptele orizontale W_0^a, V_0^a, A_0^a, reprezentînd conținutul în umiditate, volatile și cenușă al probelor inițiale. Intervalul dintre W_0^a și A_0^a reprezintă masa combustibilă (MC_0^a) a materialului inițial respectiv, purtătoare a puterii calorice:

$$MC_0^a = 100 - (W_0^a + A_0^a). \tag{40}$$

Timpul de întîrziere la aprindere τ_{ia} se determină prin cronometrarea intervalului de timp scurs între momentul introducerii probei în incinta de ardere și momentul aprinderii materiilor volatile.

Timpul de ardere a materiilor volatile τ_{av} se determină prin cronometrarea intervalului de timp scurs între momentul aprinderii și cel al stingerii materiilor volatile.

Timpul de ardere a reziduului cărbunos τ_{ar} se determină prin cronometrarea intervalului de timp scurs între momentul stingerii volati-

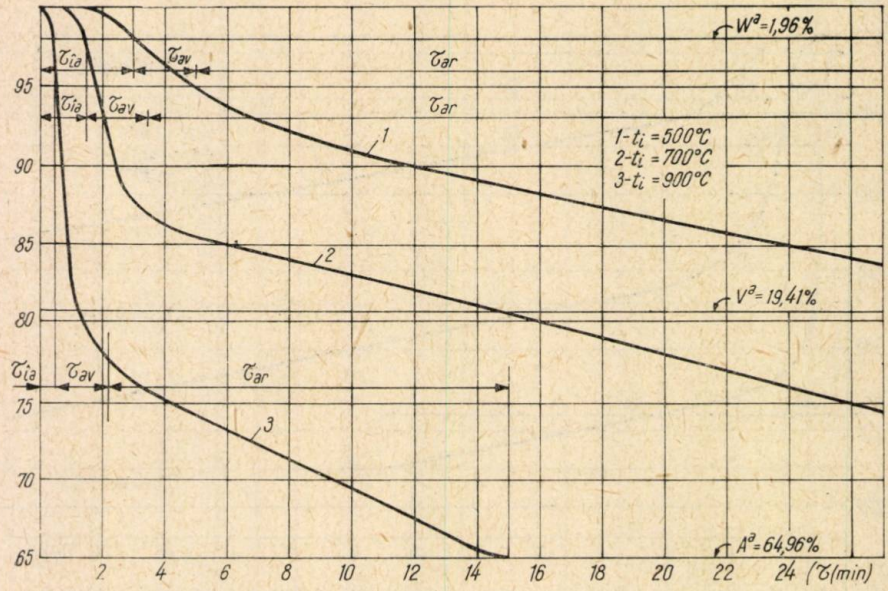


Fig. 4. — Dinamica greutății raportate a reziduului cărbunos în timpul arderii S.L. f. 2—3 mm, cu evidențierea perioadelor de desfășurare a procesului.

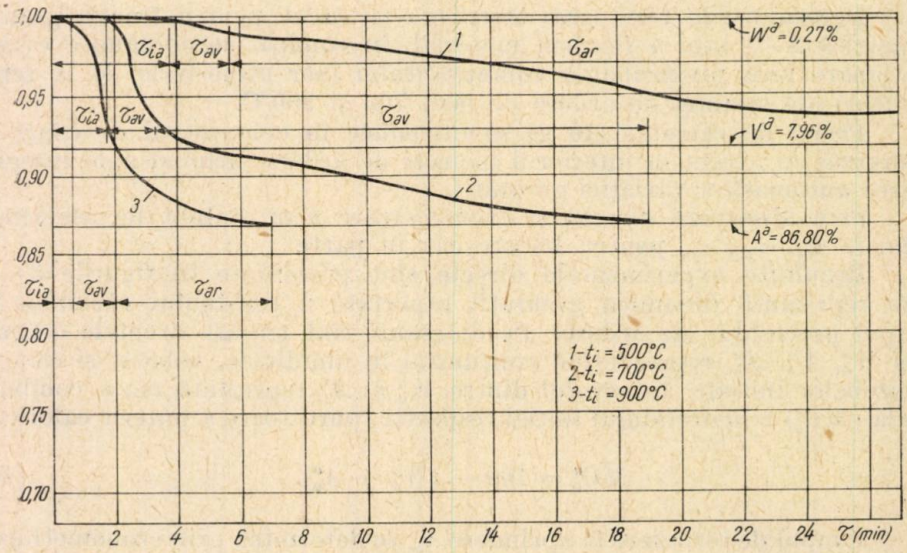


Fig. 5. — Dinamica greutății raportate a reziduului cărbunos în timpul arderii S.A. sp. 2—3 mm, cu evidențierea perioadelor de desfășurare a procesului.

lelor şi sfîrşitul arderii probei de cercetat, care coincide cu momentul aplatisării curbei termogravimetrice respective.

În general, determinarea acestor valori poate fi făcută prin citirea directă a diagramei termogravimetrice, dar observarea directă a aprinderii şi a stingerii volatilelor şi cronometrarea intervalelor respective conduce la valori mai precise pentru aceste mărimi.

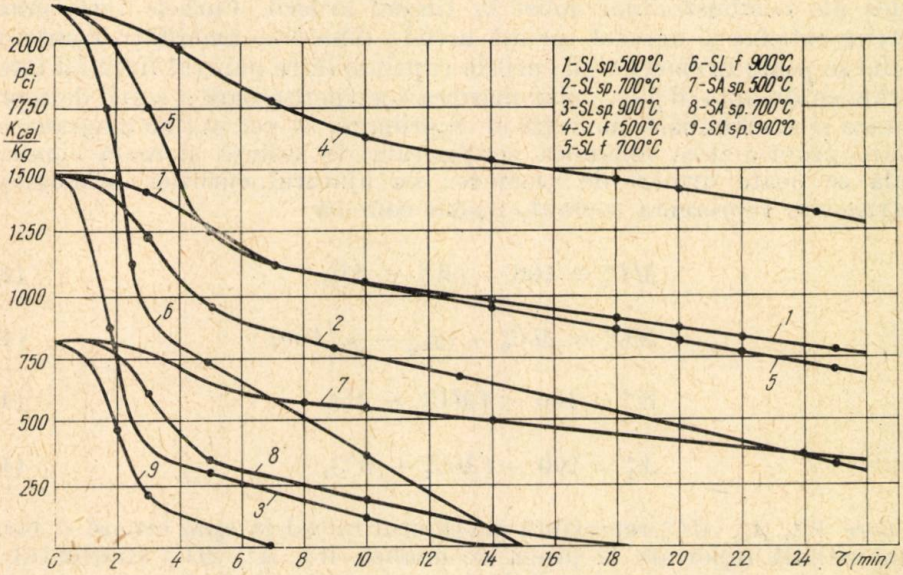


Fig. 6. — Dinamica puterii calorice F^a_{ci} a reziduului cărbunos în timpul arderii S.L. sp., S.L. f., S.A. sp. 2—3 mm, în condiţii aerodinamice cvasistaţionare.

Alura generală a curbelor termogravimetrice poate fi descrisă astfel: după o porţiune orizontală corespunzătoare perioadei de întîrziere la aprindere, curbele îşi măresc panta, racordîndu-se la partea care reprezintă procesul de ardere a materiilor volatile, avînd o pantă maximă pe o lungime apreciabilă, după care urmează racordarea la partea care reprezintă arderea reziduului cărbunos propriu-zis, cu scăderea treptată a coeficientului unghiular la o valoare care se menţine aproximativ constantă pînă la sfîrşitul arderii.

În general se consideră că porţiunea iniţială a curbelor termogravimetrice pînă la intersecţia cu dreapta W^a_0 descrie fenomenul de uscare, cea cuprinsă între dreapta W^a_0 şi punctul de mijloc al racordului cu coeficientul unghiular mai scăzut descrie fenomenul de ardere a materiilor volatile, iar ultima parte, cuprinsă între punctul de racord şi intersecţia cu dreapta A^a_0, reprezintă arderea reziduului cărbunos.

Examinînd alura generală a curbelor termogravimetrice, se observă rolul important pe care-l joacă procesul de ardere a materiilor volatile în cadrul procesului global de ardere a particulelor de combustibili solizi şi influenţa directă şi indirectă pe care o are asupra valorii timpului de ardere integrală τ_{at}, definit ca

$$\tau_{ai} = \tau_{ia} + \tau_{av} + \tau_{ar}, \qquad (41)$$

directă prin valoarea efectivă a lui τ_{ia}, iar indirectă prin faptul că terminarea arderii volatilelor reprezintă punctul de început al arderii reziduului cărbunos, valoarea τ_{ar} fiind puternic influențată de ordonata acestui punct mai ales în cazul unor coeficienți unghiulari reduși.

Din punct de vedere energetic (al calculelor de bilanț), interesează în mod deosebit cunoașterea dinamicii principalelor caracteristici energetice ale combustibililor solizi în timpul arderii. Curbele termogravimetrice satisfac și această cerință astfel: dinamica umidității combustibilului se poate urmări citind curbele cuprinse între punctul inițial și intersecțiile cu dreapta W_0^a sau, prin mărirea corespunzătoare a scării de reprezentare și a schimbării modului de exprimare, se pot obține diagrame de uscare propriu-zise; dinamica conținutului în cenușă și masă combustibilă se poate urmări de asemenea cu ajutorul curbelor termogravimetrice sau reprezenta separat, ținînd cont că

$$MC_\tau^a = 100 - (W_\tau^a + A_\tau^a), \tag{42}$$

$$MC_\tau^a = MC_0^a - (y_{W_0^a} - y_\tau)\,100, \tag{43}$$

$$W_\tau^a = 100 - (MC_\tau^a + A_\tau^a), \tag{44}$$

$$A_\tau^a = 100 - (MC_\tau^a + W_\tau^a), \tag{45}$$

în care W_0^a, A_0^a, MC_0^a reprezintă conținutul inițial în apă, cenușă și masă combustibilă raportate la proba de analiză W_τ^a, A_τ^a, MC_τ^a conținutul în apă, cenușă și masă combustibilă la momentul τ raportate la proba de analiză, $y_{W_0^a}$ ordonata corespunzătoare dreptei W_0^a, iar y_τ ordonata corespunzătoare punctului de intersecție a curbei termogravimetrice propriu-zise, cu perpendiculara pe abscisa τ.

Cu ajutorul acestor elemente și folosind datele analizelor elementare, s-au construit graficele din figura 6, care reprezintă dinamica puterii calorice inferioare raportate la proba de analiză în timpul arderii S.L. sp., S.L. f., S.A. sp. 2—3 mm în condiții aerodinamice cvasistaționare și diferite temperaturi ale incintei de ardere și care urmează ca alură generală curbele termogravimetrice.

4. CONCLUZII

1. Sterilul de mină rezultat de la exploatările carbonifere Lupeni și Anina reprezintă un deșeu industrial neutilizat pînă în prezent în țara noastră.

2. Datorită cantităților mari disponibile, a prețului scăzut de cost și a unor caracteristici tehnice avantajoase, ca putere calorifică apreciabilă (S.L. sp. 1528,9; S.L. f. 2155,7; S.A. sp. 825,8 kcal/kg), indice de măcinabilitate avantajos (S. L. sp. $m_{vTI} = 0{,}499$; S. L. f. $m_{vTI} = 1{,}99$; S.A. sp. $m_{vTI} = 0{,}526$; umiditatea cuprinsă între 0,30 și 2,09%), conținut ridicat în materii volatile la masa combustibilă (S.L. sp. 61,76%; S.L. f. 52,71%; S.A. sp. 55,22%), aceste materiale sînt recomandate

pentru a fi utilizate în scopuri energetice, cu posibilităţi de a folosi cenuşa rezultată pentru fabricarea materialelor ceramice.

3. Cercetarea caracteristicilor procesului de ardere în condiţii aerodinamice cvasistaţionare prin metoda termogravimetrică au condus la determinarea curbelor termogravimetrice, a parametrilor τ_{ia}, τ_{av}, τ_{ar} şi a dinamicii puterii calorifice P^a_{ci} în timpul arderii, care împreună caracterizează favorabil comportarea la ardere a acestor materiale.

BIBLIOGRAFIE

1. V. B. Kantorovici, *Osnovî teorii gorenia i gazificaţii tverdogo topliva*, Moskva, Akad. Nauk SSSR, 1958.
2. L. N. Hitrin, *Fizica gorenia i vzrîva*, Moskva, Izd. Univ., 1957.
3. I. Carabogdan, St. cerc. energ., seria B, *4* (1963); *2* (1966).
4. I. A. Finaev, B. V. Kantorovici, *Legităţi observate în procesele de ardere ale combustibilului solid natural*, Teple i masoperemas, *4*, 164 (1956).
5. F. Z. Ciuhanov, *Osnovî teorii termiceskoi perevabotki topliva*, Akad. Nauk SSSR, otd. teh. nauk, *8*, 7—23 (1954).
6. M. M. Scegolev, *Toplivo topki i kotelnîe ustanovki*, Moskva, 1953.
7. C. Coroiu, I. Nistor, *Dinamica caracteristicilor fizico-chimice ale lignitului din Rovinari în timpul procesului de ardere*, Sesiunea de comunicări ştiinţifice a I.E. al Academiei, Bucureşti, 1968.
8. V. V. Esin ş.a., *Injenero-fiziceski jurnal*, *8* (1958).
9. I. B. Zeldovici, J. Fiz. Him., **14**, *2* (1939).
10. B. D. Kaţnelson, *Gorenie ugolnoi pîli pod davlamiem*, Trudov Tentr. kogloturb, in-ta im I. I. Polzunova Kn. 26 (Topocinîe ustroictva), Leningrad, 1954.
11. T. T. Omari, A. A. Orning, Trans. ASME, *72* (1950).

FLUXUL TERMIC CRITIC ÎN CONDIŢII DE REACTOR NUCLEAR FIERBĂTOR

DE

C. HAIDUC şi V. VINIŢCHI

532.5.536.423.1

Se dau rezultatele cercetărilor efectuate pentru determinarea fluxurilor termice critice q_{cr} şi asupra transferului de căldură la fierberea apei pe elemente de combustibil nuclear cilindrice în condiţii de circulaţie naturală. S-au cercetat influenţa unghiului de înclinaţie a elementului asupra transferului de căldură şi fenomenul de histerezis la fierbere. Pentru determinarea fluxului critic s-a obţinut o nouă ecuaţie criterială valabilă în domeniul de presiuni $1 \leqslant p < 225$ ata, care conţine un criteriu $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$, introdus în această lucrare. Rezultatele obţinute cu această ecuaţie şi cu ecuaţii ale altor autori sînt comparate cu datele experimentale.

Determinarea corectă a fluxului termic critic q_{cr}, adică a fluxului pentru care fierberea cu bule este înlocuită de regimul de fierbere peliculară cvasistabilă, prezintă o importanţă deosebită în efectuarea calculului termic al reactorilor nucleari fierbători.

Avînd în vedere faptul că mărimea q_{cr} reprezintă limita pînă la care poate fi ridicată sarcina termică a elementelor de combustibil nuclear, acest flux termic condiţionează puterea care poate fi obţinută în reactorul fierbător. Valoarea fluxului termic maxim admis q^{max} care se ia în calcule este mai mică decît q_{cr} şi reprezintă $q^{max} = (0{,}8 - 0{,}85)\, q_{cr}$. Ţinînd seama de importanţa acestei probleme, în literatura de specialitate se acordă atenţie mare obţinerii unor ecuaţii criteriale sau empirice pentru determinarea lui q_{cr} la fierberea apei în canale de reactor cu circulaţie naturală sau forţată şi pentru fierbere în volum mare, cum este cazul generatorilor de abur din centrale nucleare-electrice [2], [4], [12].

Cercetările efectuate de autori în acest domeniu au fost axate în primul rînd pe studiul transferului de căldură la fierbere în cazul circulaţiei naturale. În acest scop a fost utilizată o buclă termică experimentală de modelare a acestui proces, folosind încălzirea electrică a elementului respectiv.

În figura 1 se prezintă rezultatele obţinute pentru variaţia fluxului termic q funcţie de diferenţa dintre temperatura peretelui elementului

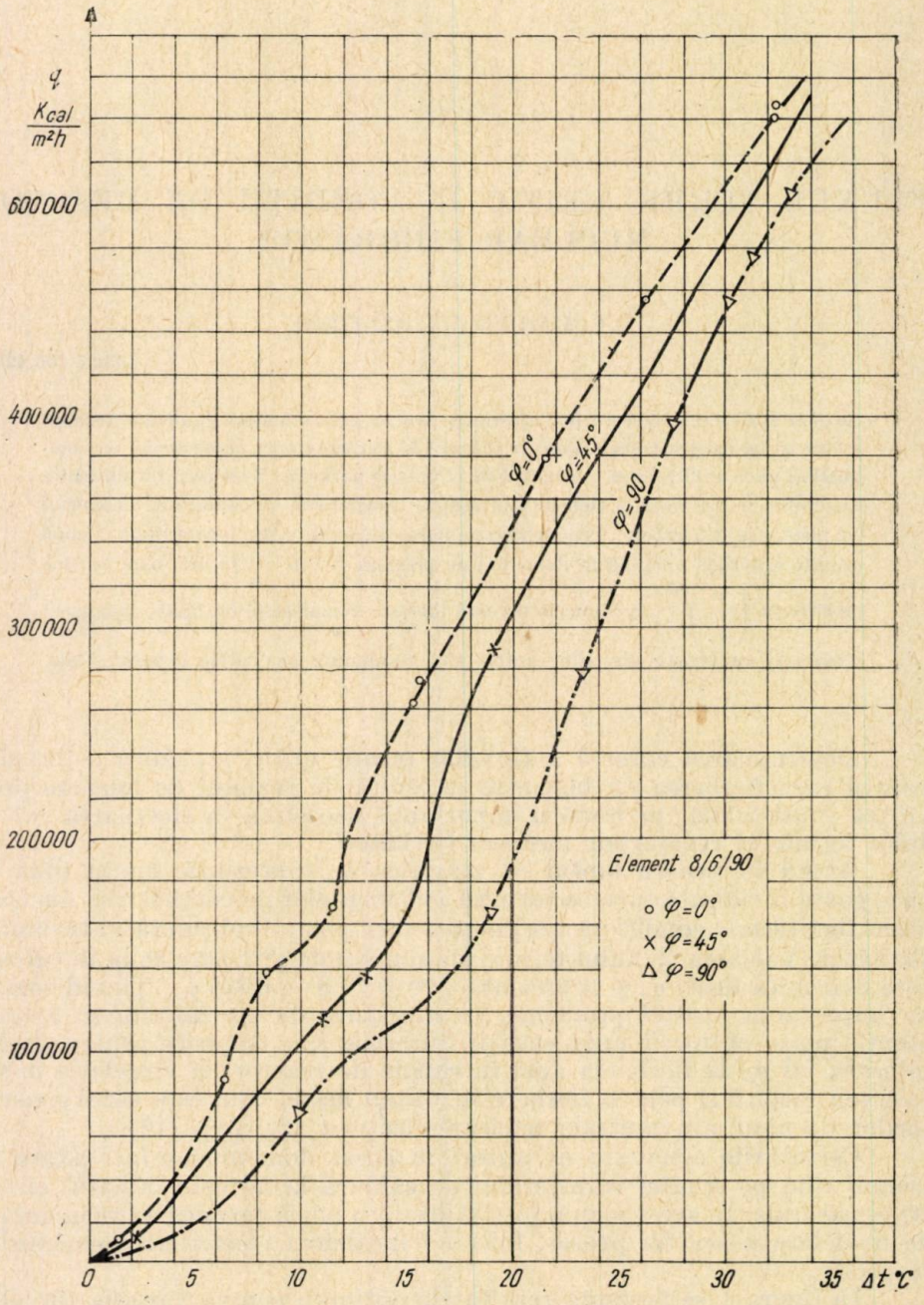


Fig. 1. — Variația fluxului termic la fierberea apei în cazul circulației naturale pe elemente de combustibil cilindrice cu diametrul exterior $d_e = 8$ mm, lungimea $l = 90$ mm, pentru $p = 1$ ata și $\varphi = 0°$; $\varphi = 45°$; $\varphi = 90°$.

și temperatura lichidului Δt pentru diferite unghiuri de înclinație a elementului φ.

Din aceste rezultate se evidențiază faptul că unghiul de înclinație al elementului influențează alura curbei $q = f(\Delta t)$ și valoarea lui q pentru mărimi Δt date. În literatura de specialitate se consideră că φ nu are influență asupra procesului.

Pentru valori Δt scăzute și ridicate influența unghiului de înclinație al elementului φ este mai mică, iar pentru valori Δt medii influența lui φ este mai accentuată.

În general, pentru Δt = const, mărimea q scade cu creșterea lui φ, ceea ce se explică prin schimbarea condițiilor hidrodinamice de spălare a elementului și datorită particularităților procesului de fierbere cu bule pentru diferite valori φ.

Un obiectiv important al cercetărilor îl constituie studierea fenomenului de histerezis la fierbere, influența acestui fenomen asupra diagramelor $q = f(\Delta t)$ și explicația fenomenului. Fenomenul de histerezis la fierbere a fost semnalat de Perroud [14], fără însă a i se da o explicație.

Esența fenomenului de histerezis constă în faptul că drumul pe care se desfășoară procesul în diagrama $q = f(\Delta t)$ poate fi diferit în funcție de temperatura lichidului la care are loc fierberea. În cazul cînd temperatura lichidului este egală cu temperatura de saturație $t_l = t_s$, diagrama $q = f(\Delta t)$ are forma unei parabole, iar în punctul 4 (vezi fig. 2) avem fluxul termic critic q_{cr}.

În cazul cînd în timpul ridicării sarcinii termice $t_l < t_s$, diagrama $q = f(\Delta t)$ trece prin punctele *1*, *2*, *3*, *4*, în timp ce temperatura lichidului variază după curba punctată. Pe porțiunea *1—2* are loc convecția naturală și fierberea superficială la temperaturi mult sub temperatura de saturație. Pe porțiunea *2—3* procesul trece într-un regim de fierbere cu bule tot mai intens și are loc creșterea temperaturii lichidului pînă în apropiere de t_s. Pe porțiunea *3 — 4* are loc un proces intens de fierbere cu bule la temperaturi foarte apropiate de t_s.

În figura 3 se prezintă o curbă de histerezis ridicată experimental pentru un element cu $d_e = 8$ mm, $l = 50$ mm și $\varphi = 90°$.

Alura curbelor de histerezis poate fi dintre cele mai diferite, în funcție de temperaturile lichidului prin care se trece la ridicarea curbei $q = f(\Delta t)$. Această alură depinde și de viteza de ridicare a sarcinii. Pentru viteze mari de ridicare a sarcinii curba de histerezis se deplasează în dreapta, iar suprafața cuprinsă sub această curbă se mărește.

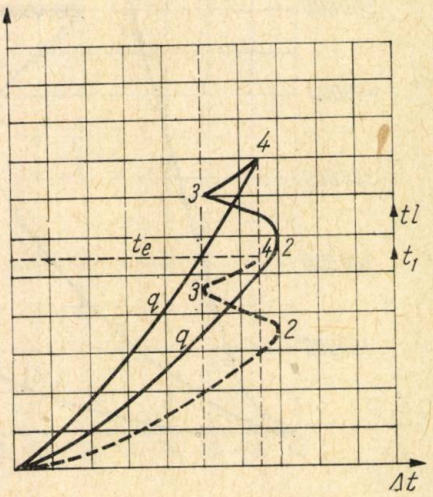


Fig. 2.— Diagrama $q = f(\Delta t)$ și $t_l = f(\Delta t)$ în cazul fenomenului de histerezis la fierbere.

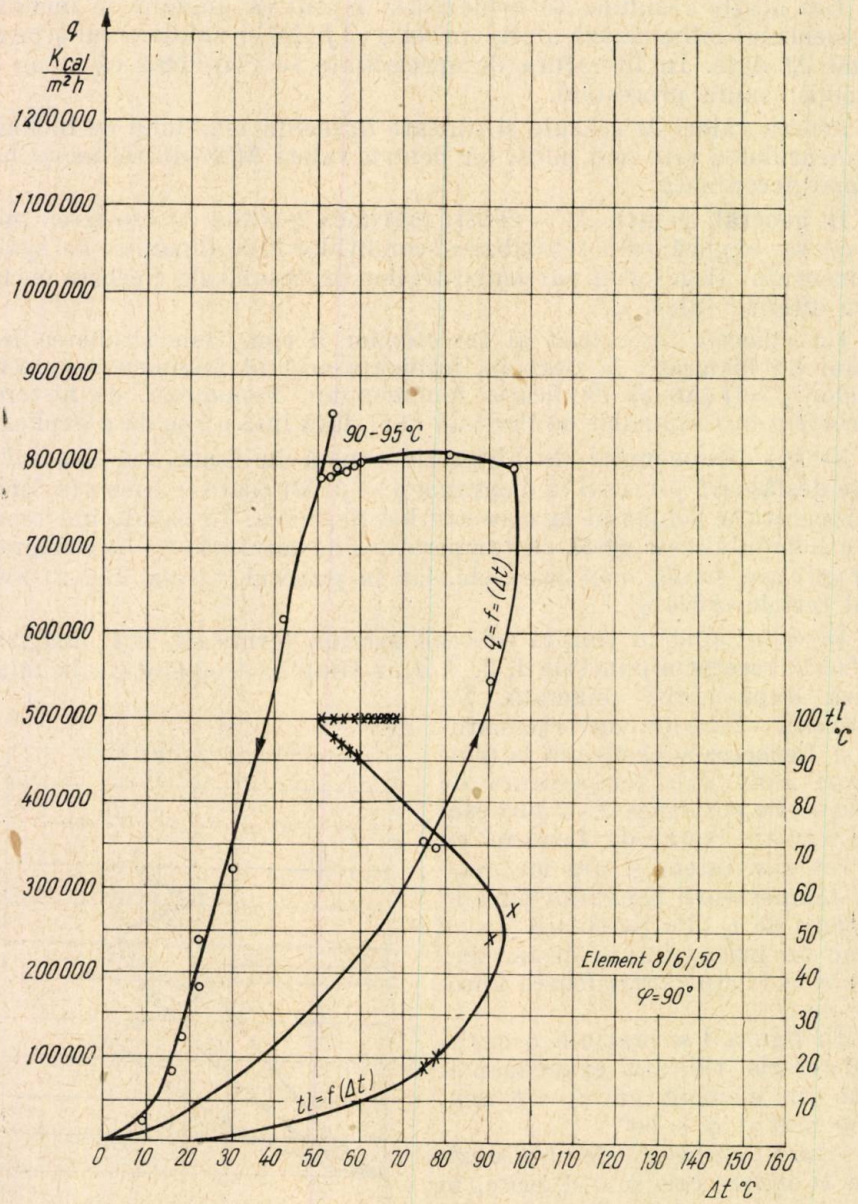


Fig. 3. — Diagrama de histerezis $q = f(\Delta t)$ şi diagrama $t_l = f(\Delta t)$ la fierberea apei pe elemente cilindrice în cazul circulaţiei naturale pentru $p = 1$ ata.

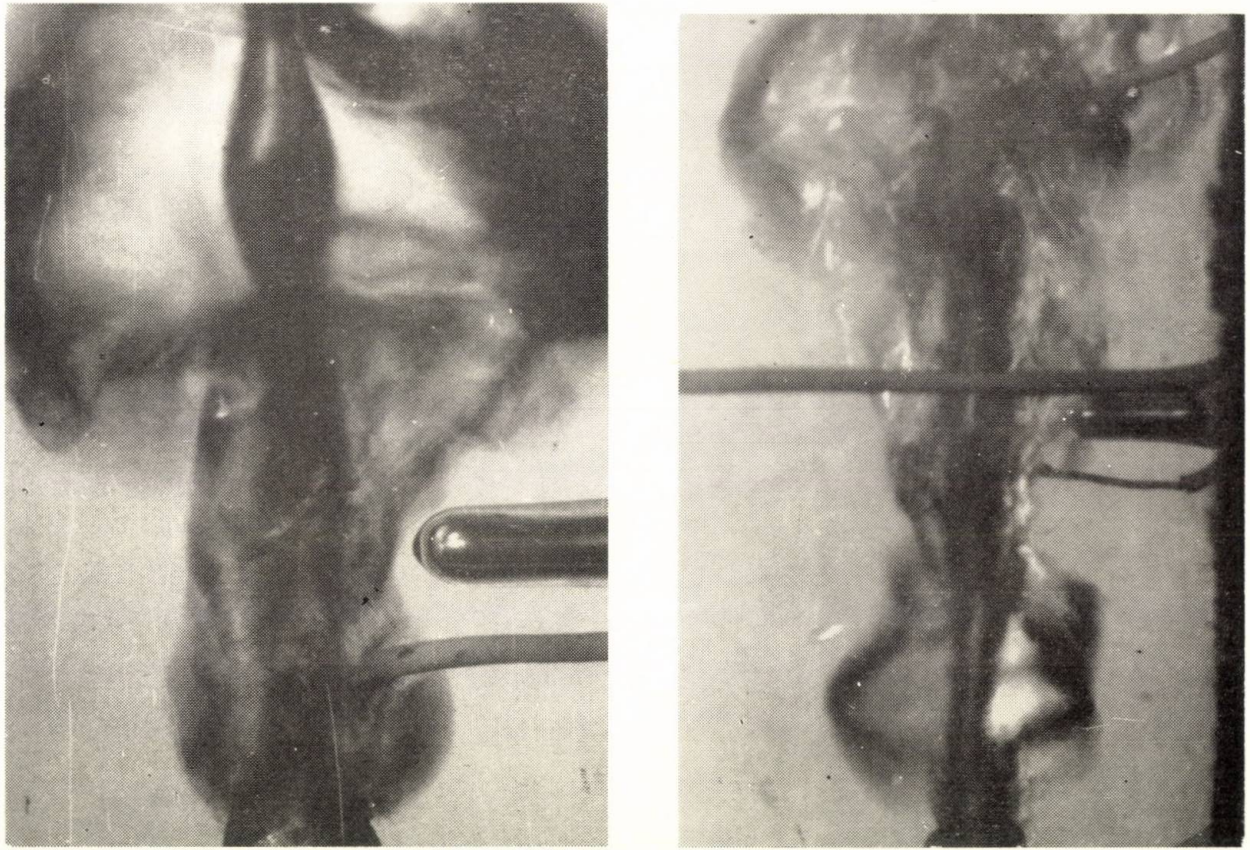


Fig. 4. — Imagini ale procesului intens de fierbere cu bule și de fierbere la flux termic critic în cazul circulației naturale pe elemente cilindrice $d_e = 8$ mm; $\varphi = 90°$; $p = 1$ ata.

Pentru caracteristica fenomenului de histerezis se introduce noțiunea

$$q_h = \frac{1}{\Delta t_0} \oint q(\Delta t)\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

unde q_h caracterizează creșterea cantității medii de căldură cedată pe m^2 și oră pentru 1°C de creșterea diferenței dintre temperatura suprafeței elementului și a lichidului, iar Δt_0 reprezintă plaja de variație a lui Δt. Mărimea q_h poate fi obținută prin planimetrarea suprafeței cuprinse de funcția $q = f(\Delta t)$. Fenomenul de histerezis poate fi caracterizat de asemenea în cazul cînd se cunosc curbele $\alpha = f(\Delta t)$, pornind de la o expresie de forma

$$q'_h = \oint \alpha(\Delta t)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

În acest caz, rezultatul obținut se referă la toată cantitatea de căldură transmisă pe unitatea de suprafață.

În cadrul cercetărilor asupra fluxurilor termice critice, pe lîngă obținerea de date experimentale pe elemente cilindrice netede la presiunea de 1 ata s-a urmărit stabilirea unei ecuații criteriale care să caracteriteze procesul, dată fiind neconcordanța dintre o serie de ecuații prezentate în literatura de specialitate [2]—[13].

La fierberea în regim critic, regimul de fierbere intensă cu bule este înlocuit de un regim de fierbere peliculară cvasistabilă (vezi imaginile din figura 4). Pentru acest regim este caracteristic faptul că, datorită turbulizării intense a stratului-limită, are loc oscilația locală a temperaturii peretelui elementului pe porțiunea superioară a acestuia, situată la distanța de 10—15 mm de capătul superior al acestuia. Acest proces are loc în special datorită înrăutățirii accesului lichidului la suprafața peretelui, condiționată de pelicula de vapori, care acoperă tot mai mult suprafața și care constituie în același timp o rezistență termică.

Regimul turbulent care are loc la fluxul termic critic îl considerăm, spre deosebire de alți autori [2]—[13], ca fiind funcție de viscozitatea lichidului și a vaporilor. În acest caz regimul hidrodinamic din stratul de lichid și de abur care înconjoară elementul poate fi descris de ecuațiile diferențiale de mișcare și de continuitate [6] pentru cele două faze, în care ținem seama de asemenea și de viscozitatea lichidului și aburului.

Pentru diferența dintre presiunea lichidului și a aburului se consideră valabilă ecuația lui Laplace. În stratul-limită se consideră egale tensiunile turbulente tangențiale pentru lichid și vapori [6].

Între vitezele lichidului și ale vaporilor în stratul-limită se consideră că există un coeficient de corelație care caracterizează alunecarea fazei gazoase față de faza lichidă și care este funcție de presiune.

Pe baza acestor ipoteze se scriu ecuațiile de mișcare ale lichidului și ale vaporilor:

$$\boldsymbol{g}\rho - \operatorname{grad} p + \mu\nabla^2 \boldsymbol{w} = \rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{w}, \operatorname{grad})\, \boldsymbol{w}\right], \tag{3}$$

$$\boldsymbol{g}(\rho - \rho'') - \operatorname{grad} p'' + \mu''\nabla^2 \boldsymbol{w}'' = \rho''\left[\frac{\partial \boldsymbol{w}''}{\partial \tau} + (\boldsymbol{w}'', \operatorname{grad})\, \boldsymbol{w}''\right]; \tag{4}$$

ecuaţiile continuităţii pentru lichid şi vapori :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w}'' = 0 ; \tag{6}$$

ecuaţia lui Laplace : condiţia de egalitate a presiunilor din vapori şi lichid, ţinînd seama de influenţa tensiunii superficiale :

$$p = p'' + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right); \tag{7}$$

condiţia de egalitate a tensiunilor turbulente tangenţiale în stratul-limită :

$$\rho(\overline{v_i v_k})_l = \rho''(\overline{v_i'' v_k''})_l ; \tag{8}$$

corelaţia dintre viteza lichidului şi vaporilor în stratul-limită :

$$w_l = a w_l'', \tag{9}$$

în care s-au utilizat următoarele notaţii :

p, p'' — presiunea apei şi a vaporilor,
g — acceleraţia gravitaţională,
ρ, ρ'' — densitatea apei şi a vaporilor,
R_1, R_2 — razele de curbură ale suprafeţei într-un punct dat la limita de separaţie a fazelor,
τ — timpul,
w, w'' — viteza apei şi a vaporilor,
v_i, v_k şi v_i'', v_k'' — componentele vitezei tangenţiale ale apei şi vaporilor în stratul-limită,
a — coeficient funcţie de presiune.

Pornind de la sistemul de ecuaţii (3)—(9) scris sub formă desfăşurată şi trecînd apoi de la operatorii diferenţiali la mărimi finite, obţinem sistemul de ecuaţii

$$g\rho - \frac{\Delta p}{l} + \mu \frac{w}{l^2} = \rho \frac{w}{\tau} + \rho \frac{w^2}{l},$$

$$g(\rho - \rho'') - \frac{\Delta p''}{l} + \mu'' \frac{w''}{l^2} = \rho'' \frac{w''}{\tau} + \rho'' \frac{w''^2}{l^2}, \tag{10}$$

$$\frac{w}{l} = 0,$$

$$\frac{w''}{l} = 0,$$

$$\frac{\Delta p l}{\sigma} = 1,$$

$$\frac{\gamma}{\gamma''} = \frac{w''^2}{w^2},$$

$$w = aw''.$$

În sistemul de ecuații (10), mărimea l reprezintă elementul de lungime, iar $\Delta p = p - p''$.

Din sistemul de ecuații (10) se obține sistemul criteriilor de similitudine echivalent:

$$\left\{ \frac{w^2}{gl}; \frac{g\Delta p}{\gamma w^2}; \frac{w\tau}{l}; \frac{w''\tau}{l}; \frac{\gamma w^2}{\gamma'' w''^2}; \frac{w''^2\gamma''}{gl(\gamma - \gamma'')}, \right.$$

$$\left. \frac{g\Delta p}{(\gamma - \gamma'')\, w''^2}; \frac{\sigma}{(\gamma - \gamma'')\, l^2}; \frac{\mu w''}{\mu'' w}; \frac{\Delta p \cdot l}{\sigma} \right\}. \tag{11}$$

Fluxul termic poate fi exprimat, în funcție de viteza de formare a aburului, prin ecuația

$$q = r\gamma'' w'', \tag{12}$$

de unde rezultă criteriul introdus de Kutateladze

$$\frac{q}{r\gamma'' w''}, \tag{13}$$

care exprimă viteza de formare a vaporilor. Această mărime reprezintă debitul volumetric de abur raportat la unitatea de suprafață.

Ținînd seama de faptul că în cazul circulației naturale viteza lichidului și căderea de presiune sînt determinate numai de procesul de vaporizare, ele nu intră în condițiile determinante. De asemenea, avînd în vedere faptul că procesul de fierbere este un proces continuu, iar timpul de formare a bulelor este foarte scăzut, se poate considera că mărimea τ nu reprezintă un parametru determinant. În acest caz, sistemul de criterii determinante are forma

$$\left\{ \frac{q}{r \cdot \gamma'' \cdot w''}; \frac{w''^2 \cdot \gamma''}{g \cdot l \cdot (\gamma - \gamma'')}; \frac{\sigma}{(\gamma - \gamma'') \cdot l^2}; \frac{\mu \cdot w''}{\mu'' \cdot w} \right\}. \tag{14}$$

După o serie de demonstraţii şi dacă se consideră mărimea l determinantă pentru q_{cr} se obţine sistemul de criterii echivalente

$$\left\{ \frac{q_{cr}^2}{r^2 g\gamma''(\gamma-\gamma'')\, l};\ \frac{\sigma}{(\gamma-\gamma'')\, l^2};\ \frac{\mu w''}{\mu'' w} \right\}, \tag{15}$$

de unde funcţia criterială pentru q_{cr} capătă forma

$$\frac{q_{cr}}{r\sqrt{g\gamma''(\gamma-\gamma'')\, l}} = \left[\frac{\sigma}{(\gamma-\gamma'')\, l^2}\right]^{0,5} \left[\frac{\mu w''}{\mu'' w}\right]^{0,5}. \tag{16}$$

În ecuaţia (16), mărimea liniară l o considerăm a fi egală cu diametrul bulelor care se formează pe element şi care se exprimă

$$d \equiv \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma-\gamma''}}. \tag{17}$$

În acest caz, criteriul

$$\left[\frac{\sigma}{(\gamma-\gamma'')\, d^2}\right]^{0,5} = 1, \tag{18}$$

iar ecuaţia (16) se poate scrie sub forma

$$q_{cr} = A \cdot (3600\, g)^{0,5} \cdot r \cdot (\gamma'')^{0,5} \cdot [(\gamma-\gamma'')\cdot\sigma]^{0,25} \cdot \left(\frac{\mu w''}{\mu'' w}\right)^{0,5}, \tag{19}$$

unde A reprezintă o funcţie de presiune.

După cum rezultă din ecuaţia (19), fluxul termic critic este direct proporţional cu proprietăţile termodinamice ale apei, r, σ, γ, şi aburului, γ'', precum şi cu acceleraţia gravitaţională. Mărimea q_{cr} este de asemenea direct proporţională cu două noi criterii de similitudine $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$ şi $\left(\frac{w''}{w}\right)^{0,5}$, obţinute în această lucrare.

Criteriul $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$ caracterizează influenţa raportului viscozităţii lichidului faţă de viscozitatea aburului asupra lui q_{cr}. Criteriul $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$ are valori importante şi nu poate fi neglijat la determinarea lui q_{cr}. Astfel, de exemplu, pentru apă şi $1 < p < 225$ ata, $4{,}86 < \left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5} < 1{,}285$. Pentru apa grea, valorile criteriului $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$ sînt practic aceleaşi, întrucît proprietăţile termodinamice ale apei grele sînt practic identice cu ale apei.

Criteriul $\left(\frac{w''}{w}\right)^{0,5}$ caracterizează alunecarea fazei gazoase față de faza lichidă la circulația naturală. Această influență asupra lui q_{cr} de asemenea nu poate fi neglijată.

Ținînd seama de faptul că criteriul $\left(\frac{w''}{w}\right)^{0,5}$ nu se cunoaște pentru fluxul termic critic la fierberea apei în cazul circulației naturale pe elemente de combustibil nuclear verticale, includem această influență în coeficientul A. În acest caz, ecuația (19), după verificarea ei prin intermediul rezultatelor experimentale prezentate în figura 5, capătă forma

$$q_{cr} = 188\, Ar(\gamma'')^{0,5}[(\gamma - \gamma'')\,\sigma]^{0,25}\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}, \qquad (20)$$

unde pentru $1 < p < 25$ ata avem

$$A = 1{,}48 + 0{,}06825\,(p - 1),$$

pentru $25 < p < 214{,}8$ ata

$$A = 3{,}118 + 0{,}0714\,(p - 25),$$

iar pentru $214{,}8 < p < 225$ ata

$$A = 5{,}65 + 7{,}9\,(p - 214{,}8).$$

În ecuația (20) funcția A este adimensională, iar coeficientul 188 are dimensiunea $(m/h^2)^{0,5}$, căldura de vaporizare r exprimîndu-se în kcal/kg, γ și γ'' în kg/m^3, iar σ în kgf/m.

Cu ecuația (20) a fost obținută curba din figura 5. În aceeași figură se prezintă de asemenea rezultatele experimentale obținute de diferiți autori și de noi pentru $p = 1$ ata pentru fierbere pe elemente de combustibil cilindrice verticale și circulație naturală.

Din figura 5 rezultă faptul că ecuația (20) descrie foarte bine fenomenul în domeniul de presiuni $1 < p < 225$ ata. Ținînd seama de faptul că datele experimentale se referă la fierbere pe suprafața exterioară a elementelor cilindrice netede cu diametrul $d < 5$ mm, ecuația (20) este valabilă pentru aceste diametre.

În cadrul cercetărilor s-a acordat o mare atenție și analizării ecuațiilor recomandate de alți autori pentru transferul de căldură la fierberea apei pe țevi verticale la circulația naturală. Rezultatele acestei analize sînt prezentate în figura 6.

Din analiza rezultatelor prezentate în figura 6 rezultă erorile date de ecuațiile altor autori față de rezultatele obținute cu ecuația (20), care determină foarte precis mărimea q_{cr} în domeniul de presiuni $1 < p < 225$ ata.

Ecuațiile lui Bortolli, Green, Iackem, Roarty și Ferbe [3], [4] dau valori deosebit de scăzute pentru q_{cr}. În aceste cazuri rezultă că fluxul termic critic nu este funcție de presiune, ceea ce de asemenea nu se poate accepta din punct de vedere fenomenologic.

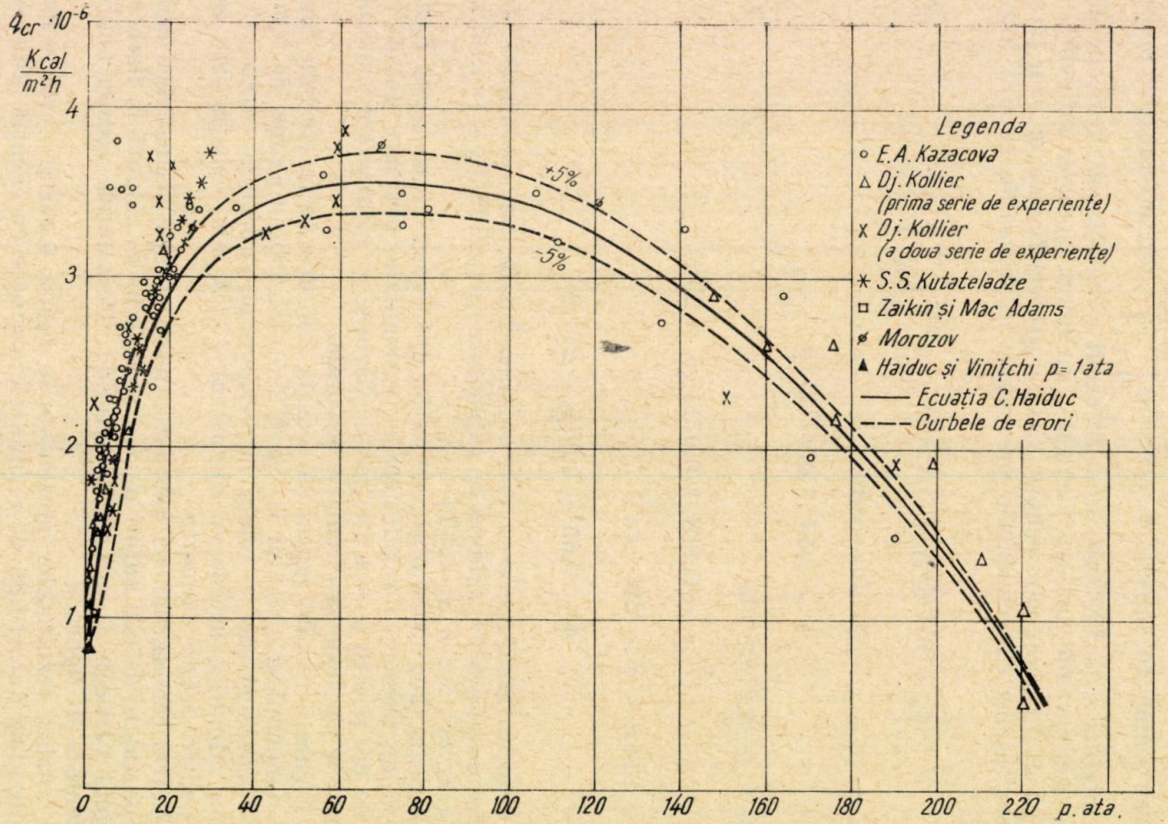


Fig. 5. — Fluxul termic critic la fierberea apei pe elemente de combustibil nuclear cilindrice netede și verticale în cazul circulației naturale pentru $1 < p < 225$ ata obținut cu ecuația (20) și rezultatele experimentale pentru $d_e > 5$ mm.

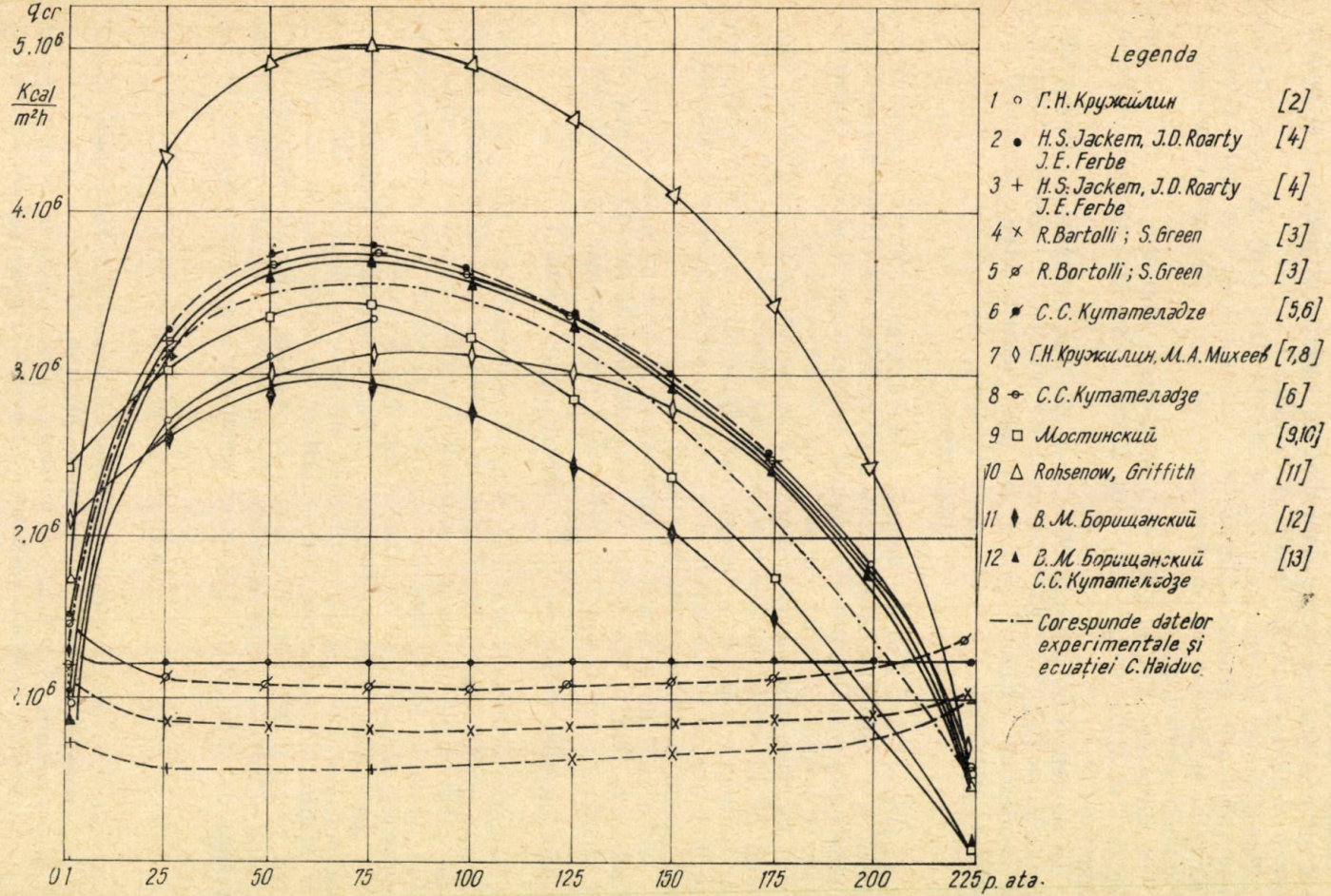


Fig. 6. — Variația fluxului termic critic la fierberea apei pe elemente de combustibil nuclear cilindrice netede și verticale în cazul circulației naturale obținut cu ecuația (20) și cu ecuațiile altor autori; $1 < p < 225$ ata; $d > 5$ mm.

Ecuaţia lui Rohsenow şi Griffith [11] dă valori q_{cr} mult mai ridicate decît cele reale în întreg domeniul de variaţie al presiunii şi numai pentru $p = 225$ ata aceste rezultate coincid.

Ecuaţiile lui Borişanski [12], Mostinskii [9], [10], Krujilin [7] şi Miheev [8] dau în general valori q_{cr} mai scăzute decît cele reale. Ecuaţia lui Krujilin şi Miheev dă în domeniul $140 < p < 225$ ata valori puţin mai ridicate pentru q_{cr}.

În domeniul $1 < p < 25$ ata, rezultatele obţinute cu ecuaţia lui Borişanski şi Kutateladze [13] sînt foarte apropiate de cele obţinute cu ecuaţia (20).

În domeniul de presiuni $25 < p < 225$ ata, ecuaţiile lui Borişanski şi Kutateladze [5], [6], [13] dau rezultate puţin mai ridicate pentru q_{cr} decît rezultatele obţinute cu ecuaţia (20) pentru întreg domeniul de variaţie al presiunii.

CONCLUZII

1. Dependenţa fluxului termic q de diferenţa dintre temperatura peretelui şi a lichidului la fierberea apei în cazul circulaţiei naturale pe elemente cilindrice depinde de unghiul de înclinaţie al acestor elemente. Pentru $\Delta t = \text{const}$, mărimea q scade cu creşterea lui φ.

2. Pe baza experienţelor efectuate în lucrare se dă explicaţia fenomenului de histerezis la fierberea apei pe elemente cilindrice prin studierea alurei de variaţie a temperaturii lichidului şi a schimbării regimului de transfer de căldură la diferite regimuri de fierbere în funcţie de fluxul termic şi de temperatura lichidului.

3. Pornind de la ecuaţiile diferenţiale care caracterizează procesul de fierbere la flux termic critic pe elemente de combustibil nuclear cilindrice netede şi verticale, a fost obţinută o nouă ecuaţie criterială pentru q_{cr} şi s-a introdus criteriul $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$ pentru acest fenomen.

Ecuaţia criterială stabilită asigură determinarea fluxului termic critic cu o precizie mai ridicată decît o serie de ecuaţii date de alţi autori şi este valabilă pentru reactori nucleari fierbători cu circulaţie naturală într-un domeniu foarte larg de variaţie a presiunii $1 < p < 225$ ata şi diametre ale elementelor de combustibil $d_e > 5$ mm.

4. În lucrare a fost efectuată analiza rezultatelor obţinute pentru q_{cr} cu ecuaţia (20) faţă de rezultatele obţinute cu ecuaţiile altor autori şi cu rezultatele experimentale proprii şi din literatura de specialitate pentru $1 < p < 225$ ata. S-a stabilit că ecuaţia criterială obţinută verifică bine rezultatele experimentale, iar o serie de ecuaţii criteriale din literatura de specialitate dau erori pronunţate în determinarea lui q_{cr}.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Haiduc, V. Viniţchi, S. Ghilea, G. Teodorescu, *Procesul de fierbere în reactori nucleari energetici*, memoriu la Institutul de energetică, 1967.

2. S. S. Kutateladze, G. I. Bobrovici, *Primenenie metoda podobia dlea obobşcenia experimentalnih dannih o kr iticeskih teplovih potokah v kipeaşcei jidkosti*, Atomnia energhia, *12* (1960).

3. D. Kollier, *Obzor rabot po teploobmenu k dvuhfaznîm sistemam*, Moskva, Izd. Inostr. Lit. 1962.
4. H. S. Iackem, I. D. Roarty, I. E. Ferbe, Trans. ASME, **80**, *2* (1958).
5. I. Ia. Erșov, A. M. Kubaeva, *Vlianie stepeni nedogreva na koeffițient teplootdaci pri kipenii*, Izvestia vîșșih ucebnîh zavedenii, Energhetica, *11* (1962).
6. S. S. Kutateladze, *Teploperedacea pri kondensații i kipenii*, Mașghiz, 1952.
7. G. N. Krujilin, *Izvestia Akademii Nauk SSSR*, O.T.N., *7* (1948); *5* (1949).
8. M. A. Miheev, *Bazele transmisiei căldurii*, Edit. energetică de stat, 1953.
9. N. M. Kuznețov, B. A. Burakov, *Teploenerghetika*, *6* (1964).
10. N. M. Kuznețov, B. A. Burakov, *Issledovanie kriticeskih teplovîh potokov pri kipenii difenila i okisi difenila v bolșom obiome*, Teploenerghetika, *1* (1966).
11. W. Rohsenow, P. Griffith, *Corelation of Maximum Heat Transfer Data for Boiling of Saturated Liquids*, Chemical Eng. Progr. Symp., Ser. 52, *18*, 48 (1966).
12. V. M. Borișanski, Energomașinostroenie, *7* (1958).
13. S. S. Kutateladze, V. M. Borișanski, *Spravocinik po teploperedace*, Leningrad—Moskva, Gosenergoizdat, 1958.
14. P. Perroud de la Harpe, A. Rebière S., Rapport CEA Nr. 1853, 1961.

INFLUENŢA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ASUPRA CARACTERISTICEI UNIVERSALE A COMPRESORULUI CENTRIFUG

DE

V. PIMSNER şi ST. ŞTEFAN

621.515

Din analiza metodelor de calcul a caracteristicii universale a compresorului centrifug rezultă posibilitatea exprimării analitice a influenţei parametrilor funcţionali la diverse regimuri de funcţionare. Se constată însă că datele din literatură nu pot reda satisfăcător influenţa arhitecturii interioare a compresorului, exprimată prin coeficienţi experimentali. Întrucît soluţia constructivă este practic aceeaşi la o familie de compresoare, în lucrare se determină, pe baza datelor obţinute experimental, expresia analitică a caracteristicii universale a unor compresoare centrifuge, foarte utilizate în ţară la supraalimentarea motoarelor diesel, constatîndu-se o bună precizie în exploatarea datelor pe compresoare de aceeaşi familie constructivă.

Parametrii care determină performanţele şi calităţile de exploatare ale unui compresor centrifug la un anumit regim de funcţionare sînt gradul total de comprimare $\pi_c^* = \frac{p_c^*}{p_0}$, sau puterea specifică, ca şi randamentul compresorului η_c^*. Se defineşte astfel caracteristica normală, sau de debit, relaţia analitică sau grafică care redă variaţia parametrilor π_c^* şi η_c^* în funcţie de debitul masic de fluid $\dot{m}_c$ şi de viteza de rotaţie a compresorului n pentru fiecare grupă de valori a parametrilor de stare a fluidului de lucru (p_0, T_0) din amontele compresorului, adică

$$\pi_c^*,\ \eta_c^* = f(\dot{m}_c,\ n,\ p_0,\ T_0), \tag{1}$$

ceea ce comportă cunoaşterea unei duble mulţimi de caracteristici pentru a cuprinde totalitatea regimurilor de funcţionare ale compresorului. Pentru a înlătura acest dezavantaj se utilizează caracteristica universală, la care performanţele compresorului sînt exprimate în funcţie de parametrii deduşi pe baza teoriei similitudinii, astfel încît un punct din diagramă reprezintă totalitatea regimurilor asemenea, cu toate că para-

metrii de stare iniţială a fluidului de lucru sau regimul de funcţionare al compresorului s-au modificat.

Stabilirea criteriilor de similitudine ale maşinilor cu palete şi domeniile de automodelare ale diverselor criterii [1], [2] au permis determinarea relaţiilor care exprimă variaţia gradului de comprimare π_c^* şi a randamentului η_c^* în funcţie de parametrii de similitudine ai debitului masic $\bar{m}_c$ şi ai vitezei de rotaţie $\bar{n}$, încît caracteristica universală e reprezentată de relaţia

$$\pi_c^*(\bar{P}_c),\ \eta_c^* = f(\bar{m}_c,\ \bar{n}). \tag{2}$$

Pentru simplificarea relaţiilor de calcul, în cazul unei precizii satisfăcătoare se renunţă la forma adimensională a parametrilor prin eliminarea mărimilor constante, operaţie valabilă în special în cazul utilizării aceluiaşi fluid de lucru. În acest caz, parametrii de similitudine pot fi consideraţi că au următoarea expresie:

$$\bar{n} = \frac{n}{\sqrt{T_0}};\ \bar{m}_c = \frac{\dot{m}_c\sqrt{T_0}}{p_0};\ \bar{P}_c = \frac{P_c}{p_0\sqrt{T_0}} \tag{3}$$

sau, raportîndu-i la condiţiile normale ($t_0 = 0°C$ şi $p_0 = 760$ mm col Hg), obţinem

$$\bar{n} = n\sqrt{\frac{288}{T_0}};\ \bar{m}_c = \dot{m}_c\frac{760}{p_0}\sqrt{\frac{T_0}{288}};\ \bar{P}_c = P_c\frac{760}{p_0}\sqrt{\frac{288}{T_0}}. \tag{3'}$$

Complexitatea curgerii şi a transformărilor energetice ale fluidului de lucru în compresor pot fi exprimate cu multă greutate prin relaţii de calcul a căror valabilitate este condiţionată de exactitatea determinării parametrilor experimentaţi care redau intensitatea unui anumit fenomen. De aceea caracteristica universală şi cea normală se determină pe cale experimentală la bancul de probă, ceea ce nu permite o analiză prealabilă a performanţelor scontate.

Din această cauză s-au efectuat cercetări matematice urmărind determinarea prealabilă a caracteristicii compresorului centrifug în funcţie de performanţele sale la regim nominal şi de parametrii săi funcţionali şi constructivi.

Calculul caracteristicii compresorului centrifug necesită stabilirea pierderilor prin frecări la regimul nominal, urmată de determinarea variaţiei lor cu regimul de lucru al compresorului în funcţie de parametrii de similitudine precizaţi întrucît lucrul mecanic transmis de rotor fluidului de lucru este

$$l_{sp} = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1 = u_2^2\left(\varphi_{2u} - \bar{D}_1\frac{c_{1u}}{u_2}\right), \tag{4}$$

în care $\varphi_{2u} = \frac{c_{2u}}{u_2}$ este raportul componentei tangențiale a vitezei absolute c_2 a fluidului din rotor și viteza tangențială a rotorului, și întrucît $c_{2u} = \mu c_{2u\infty} = \mu (u_2 - c_{2r} \operatorname{ctg} \beta_2)$, rezultă că problema principală constă în determinarea judicioasă a coeficientului μ în diverse regimuri de lucru sau a lui φ_{2u}, care, după datele din literatură, depinde de soluția constructivă a rotorului [3]. Astfel [4] se consideră că

$$\varphi_{2u} = 1 - \frac{\pi}{z_r} \sin \beta_{2f} - \frac{c_{2r}}{u_2} \operatorname{ctg} \beta_{2f} \tag{5}$$

sau [5]

$$\varphi_{2u} = \frac{1 - \frac{c_{2r}}{u_2} \operatorname{ctg} \beta_{2f}}{1 + \frac{a + 1{,}2 \sin \beta_{2f}}{z_r \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)}}, \tag{6}$$

unde $a = 1{,}1 \ldots 1{,}36$ este un coeficient al formei constructive, z_r numărul paletelor rotorului și β_{2f} unghiul de fixare a paletei la ieșirea din rotor. Deși valorile obținute din cele două relații diferă între ele cu 4—6%, se poate admite că ele redau suficient de corect cinematica curgerii. Între coeficienții φ_{2u} și φ_{2r} există o relație practic liniară funcție de z_r și de unghiul β_{2f}, dar și de unghiul β_1, dacă

$$\frac{l}{t_m} = \frac{\left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right) z}{\pi \left(1 + \frac{D_1}{D_2}\right) \sin \beta_m}, \tag{7}$$

în care l este lungimea paletei, t_m pasul diametrului mediu, iar $\beta_m = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2)$ funcție de raportul b_1/b_2, de soluția constructivă a bordului de atac, de jocul dintre rotor și difuzor etc.

Analiza critică a datelor experimentale și a relațiilor prezentate demonstrează că nu există o metodă suficient de exactă și de completă pentru a determina influența soluției constructive asupra gradului de comprimare la regim nominal [6], cu atît mai puțin la alte regimuri de funcționare, ceea ce nu permite analiza influenței unei anumite forme constructive, a jocurilor dintre stator si rotor etc., problemă deosebit de importantă pentru proiectarea judicioasă a compresoarelor centrifuge.

Cauza principală a variației gradului de comprimare și pierderile prin frecări sînt condiționate în mare măsură de soluția constructivă a compresorului. Într-adevăr, coeficientul pierderilor prin frecări,

$$\beta_f = \frac{P_f}{\dot{m} \varphi_{2u} u_2^2}, \tag{8}$$

exprimînd puterea consumată prin frecări P_f în funcţie de puterea specifică a compresorului, scoate în evidenţă indirect influenţa arhitecturii interioare a instalaţiei, căci [7]

$$P_f = K_2 \rho_2 D_2^2 \left(\frac{u_2^2}{100}\right)^3 \left(1 + \frac{5e}{D_2}\right) [\text{kW}], \tag{9}$$

în care $K_2 = f\left(R_2, \frac{b_2}{D_2}\right)$, iar e este grosimea discului la diametru D_2; în condiţii constructive optime şi pentru o prelucrare deosebită se obţine în final

$$\beta_f = \frac{0{,}172}{1000\ \tau_2 \varphi_{2u} \frac{b_2}{D_2} \frac{c_{r2}}{u_2}}, \tag{8'}$$

funcţie de principalele rapoarte constructive şi funcţionale ale compresorului.

Deşi la regimuri de funcţionare diferite de cel nominal se poate analiza cu suficientă exactitate influenţa parametrilor funcţionali [8], influenţa parametrilor constructivi necesită încă numeroase determinări experimentale, în special pentru noile soluţii constructive cu debite relativ reduse şi viteze de rotaţie ridicate.

Pentru o anumită soluţie constructivă, cunoscînd β_f şi β_{sc} (coeficientul scăpărilor de fluid) la regimul nominal, se determină pentru diverse valori ale lui φ_{2r} mărimile

$$\beta_{sc}^v = \beta_{sc} \cdot \frac{\varphi_{2r}}{\varphi_{2r}^v} \sqrt{\frac{\varphi_{2u}^v}{\varphi_{2u}}}, \tag{10}$$

în care v indică un anumit regim diferit de cel nominal, iar [6]

$$\beta_f^v = \beta_f \cdot \frac{\varphi_{2r} \cdot \varphi_{2u}}{\varphi_{2r}^v \cdot \varphi_{2u}^v}, \tag{11}$$

φ_{2u} determinîndu-se cu una dintre relaţiile prezentate. Gradul de reacţiune al rotorului este precizat de expresia

$$\rho = 1 - \frac{\varphi_{2u}^2 + \varphi_{2r}^2}{2\varphi_{2u}(1 + \beta_f + \beta_{sc})}, \tag{12}$$

iar creşterea temperaturii este

$$\Delta T = \frac{K-1}{KR}(1 + \beta_k + \beta_{sc}) \cdot \varphi_{2u} u_2^2, \tag{13}$$

cu ajutorul cărora se determină puterea şi gradul de comprimare a compresorului. De remarcat că relaţiile sînt satisfăcătoare pentru valori mari ale coeficienţilor φ_{2r} şi $\frac{b_2}{D_2}$, în caz contrar $\beta_f + \beta_{sc}$ poate creşte sensibil pentru ca relaţiile utilizate să prezinte abateri sensibile, necesitînd coeficienţi de corecţie deduşi experimental, care să exprime forma şi grosimea bordului de atac al paletelor, construcţia paletei şi a difuzorului de ieşire etc.

Utilizarea unei metode analitice de calcul a caracteristicii [3] permite obţinerea unei precizii superioare dacă sînt cunoscute valorile coeficienţilor care precizează soluţia constructivă a compresorului atît la regimul nominal de funcţionare, cît în special la alte regimuri, ceea ce reprezintă o prealabilă determinare experimentală.

În cadrul Institutului de energetică al Academiei R.S. România au fost determinate experimental numeroase caracteristici universale ale diverselor compresoare centrifuge utilizate la supraalimentarea unei game foarte largi de motoare cu ardere internă, cuprinse între 130 şi 1000 CP, şi s-a constatat prin compararea datelor obţinute că există o concordanţă satisfăcătoare între valorile raportate ale gradului de comprimare şi a randamentului în funcţie de turaţie şi debit masic, raportarea efectuîndu-se la valorile regimului nominal pentru compresoare de soluţii constructive apropiate între ele, chiar dacă parametrii funcţionali principali variau sensibil între ei.

Determinarea analitică a curbelor caracteristicii universale deduse experimental permite, în primul rînd, determinarea oricărui regim de lucru şi analiza funcţionării ansamblului turbină-compresor, ca şi adaptarea sa în condiţii optime la regimurile motorului, exprimîndu-se relaţiile de calcul ale întregului ciclu, iar în al doilea rînd se poate studia comportarea unui nou tip de compresor de dimensiuni, debite şi turaţii diferite, însă de soluţie constructivă similară, ceea ce se utilizează curent la fabricaţia unei familii de compresoare din motive tehnologice, constructive etc.

Pentru exemplificare, ca şi pentru viitoarele calcule, au fost alese din clasa compresoarelor mici compresorul motorului de 130 CP, iar din clasa compresoarelor mijlocii compresorul grupului de supraalimentare VTR-200, urmînd a fi comparat cu compresorul grupului VTR-250.

Fiind determinate experimental caracteristicile universale ale compresoarelor şi apreciindu-se regimul nominal de funcţionare, s-a urmărit determinarea expresiei analitice a fiecărei curbe de viteză de rotaţie constantă sau de randament constant, în funcţie de debitul masic şi de gradul de comprimare raportate, utilizîndu-se metoda celor mai mici pătrate, datorită preciziei superioare obţinute în comparaţie cu alte me-

tode de calcul. Esenţa metodei celor mai mici pătrate constă în aproximarea a N observaţii $(x_i, y_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ cu un polinom de gradul $m < n$:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \tag{14}$$

polinom care să minimalizeze funcţia

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2. \tag{15}$$

Pentru determinarea minimului se efectuează $\dfrac{\partial f}{\partial a_k} = 0$ pentru $0 \leqslant K \leqslant m$, de unde rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+m} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+j}. \tag{16}$$

Dacă notăm

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k; \quad T_k = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k,$$

sistemul (16) devine

$$\sum_{j=0}^{m} a_j S_{k+j} = T_k \ (0 \leqslant K \leqslant m), \tag{17}$$

denumit „sistem normal" de $m + 1$ ecuaţii lineare. Se demonstrează că determinantul coeficienţilor $\Delta = |S_{k+j}| \neq 0$ ceea ce înseamnă că problema este principial rezolvată. În comparaţie cu cazul prezentat, familiile de observaţii ale curbelor caracteristicii universale a compresorului centrifug prezintă o variabilă suplimentară Z_r cu $1 \leqslant r \leqslant p$, aproximarea efectuîndu-se cu expresia

$$Z(x, y) = \sum_{i,\, j=0}^{m} c_{ij} x^i y^j. \tag{18}$$

Repetînd procedeul de minimalizare, se obţine un nou sistem normal, prin a cărui rezolvare se obţin coeficienţii c_{ij}.

Pentru aproximarea familiei de curbe caracteristice a compresoarelor grupurilor studiate s-a folosit relaţia

$$Z(x, y) = a_1 + a_2 y + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 y^3 + a_7 xy^2 + a_8 x^2 + \\ + a_9 x^2 y + a_{10} x^3. \tag{19}$$

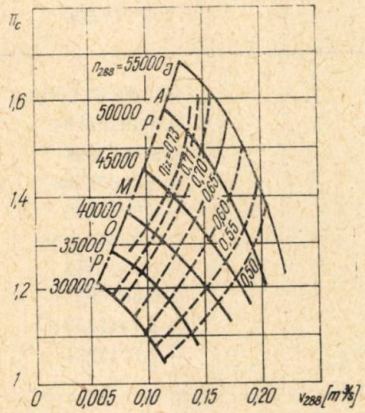


Fig. 1. — Caracteristica universală a compresorului TS-1.

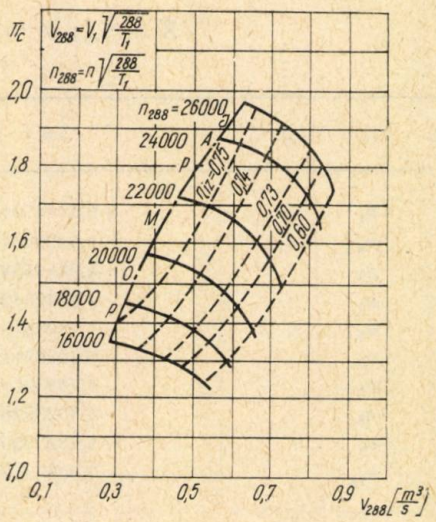


Fig. 2. — Caracteristica universală a compresorului VTR-200.

Paralel s-a determinat şi polinomul de aproximaţie pentru curbele de pompaj, de forma

$$y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3. \tag{20}$$

Cum caracteristicile reprezintă relaţii funcţionale dimensionale (vezi fig. 1 şi 2), pentru generalizare s-a lucrat cu mărimi adimensionale de forma

$$\left.\begin{aligned} \bar{\pi}_c &= \bar{\pi}(\bar{n}, \bar{V}_{288}), \\ \bar{\eta}_{iz} &= \bar{\eta}_{iz}(\bar{V}_{288}, \bar{\pi}_c)_2 \\ \bar{\pi}_c &= \bar{\pi}_c(\bar{n}) \text{ pentru curba de pompaj,} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

cu

$$\bar{\pi}_c = \frac{\pi_c}{\pi_{cr}}; \quad \bar{\eta}_{iz} = \frac{\eta_{iz}}{\eta_{izr}}; \quad \bar{n} = \frac{n}{n_r}; \quad \bar{V}_{288} = \frac{V_{288}}{V_{288r}}, \tag{22}$$

iar (π_{cr}, η_{izr}, n_r, V_{288r}) reprezintă mărimile caracteristice a punctului de referinţă luat la intersecţia dintre curba de pompaj şi curba de turaţie maximă constantă.

Din curbele efectuate după un program bazat pe metoda celor mai mici pătrate s-au obţinut următoarele valori pentru coeficienţii $a_i (1 \leqslant i \leqslant 10)$ din (19) pentru cele două familii de curbe :

$$Z = \overline{\pi}_c ; \; x = \overline{n} ; \; y = \overline{V}_{288},$$

$$Z = \overline{\eta}_{iz} ; \; x = \overline{\pi}_c ; \; y = \overline{V}_{288} :$$

$\overline{\pi}_c = \overline{\pi}_c(\overline{n}, \overline{V}_{288})$	TS-1	VTR-200
a_1	+0,47147018	+0,0015339849
a_2	−0,6499064	−0,39203114
a_3	+0,93645582	+1,8112808
a_4	−0,21420426	+0,39372708
a_5	+1,7868913	−0,5753272
a_6	+0,43995112	+0,030654068
a_7	−1,7143057	−1,2847442
a_8	−1,3323928	−0,60760731
a_9	+1,2823030	+2,7347453
a_{10}	−0,0066959915	−1,1042731

$\overline{\eta}_{iz} = \overline{\eta}_{iz}(\overline{\pi}_c, \overline{V}_{288})$	TS-1	VTR-200
a_1	− 5,0414615	−14,781422
a_2	− 3,5397343	+ 0,49097152
a_3	+22,837505	+57,742654
a_4	− 0,76452129	− 6,1651689
a_5	+10,333132	+12,192794
a_6	− 0,32033819	+ 0,88213876
a_7	+ 2,0666242	+ 3,7251713
a_8	− 30,390533	−77,113256
a_9	− 9,2366335	−10,918999
a_{10}	+15,161909	+35,037712

şi coeficienţii $b_i (0 \leqslant i \leqslant 3)$ din (20) în varianta $Z = \overline{\pi}_c ; \; x = \overline{n}$ pentru curbele de pompaj

$\overline{\pi}_c = \overline{\pi}_c(\overline{n})$	TS-1	VTR-200
b_0	+0,54844849	+2,8540763
b_1	+0,21687554	−9,5122928
b_2	+0,11711085	+13,004488
b_3	+0,11966306	−5,3445182

Abaterile absolute maxime $|\Delta\bar{\pi}_c|$; $|\Delta\bar{\eta}_{iz}|$ ale datelor experimentale față de polinomul de aproximare sînt prezentate în figurile 3 și 4, care arată o precizie satisfăcătoare pentru majoritatea cazurilor practice.

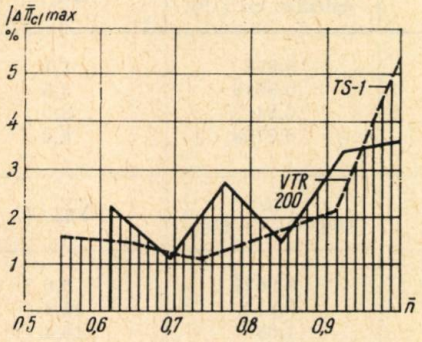


Fig. 3. — Variația procentuală a gradului de comprimare raportat în funcție de turația raportată pentru compresoarele TS-1 și VTR-200.

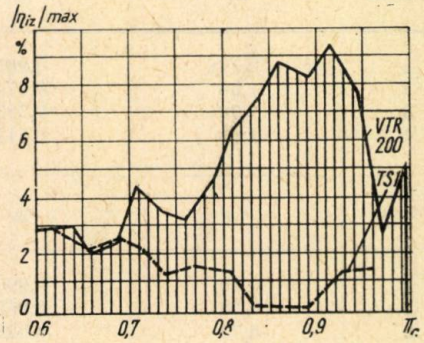


Fig. 4. — Variația procentuală a randamentului izentropic al compresorului în funcție de gradul de comprimare raportat al compresorului.

Pentru a determina în ce măsură relațiile obținute pentru caracteristica universală raportată a compresorului grupului VTR-200 poate fi extinsă și la alte compresoare de construcție similară, este necesară

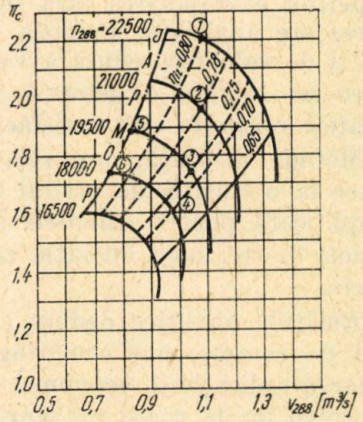


Fig. 5. — Caracteristica universală a compresorului VTR-250.

determinarea abaterii între valorile experimentale și cele rezultate din calcul. În acest scop, pe caracteristica compresorului VTR-200 se aleg punctele de control 1—2 (fig. 5), iar ca punct de reper se stabilește punctul de intersecție a curbelor de pompaj și de turație constantă maximă, caracterizat de mărimile

$$n_r = 23.000\left[\frac{\text{rot}}{\text{min}}\right]: \eta_{izr} = 0{,}808;\ V_{288r} = 1{,}045\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right];\ \pi_{cr} = 2{,}275.$$

Se obţin următoarele rezultate:

Punctul	π_c	$\overline{\pi}_c$	$\overline{\pi}_c$ calculat cu (19)	$\lvert\Delta\overline{\pi}_c\rvert$ %
1	2,198	0,9655	0,978	1,1
2	1,98	0,871	0,8946	2,5
3	1,78	0,783	0,846	8,0
4	1,63	0,717	0,7758	8,2
Punctul	η_{iz}	$\overline{\eta}_{iz}$	$\overline{\eta}_{iz}$ calculat cu (19)	$\lvert\Delta\overline{\eta}_{iz}\rvert$ %
1	0,80	0,990	0,9621	3,0
2	0,78	0,965	0,812	15,1
3	0,75	0,928	1,08	16,4
4	0,70	0,865	1,03	19,1
Punctul	π_c	$\overline{\pi}_c$	$\overline{\pi}_c$ calculat cu (20)	$\lvert\Delta\overline{\pi}_c\rvert$ %
5	1,885	0,828	0,8741	5,5
6	1,7425	0,767	0,8191	6,8

Se constată o bună precizie a valorilor gradului de comprimare, care permit extrapolarea fără rezerve a relaţiilor obţinute la familia de compresoare analizată. Precizia mai redusă a randamentului este justificată şi de valoarea redusă a variaţiilor de entalpie a fluidului de lucru, ceea ce nu asigură o determinare precisă a valorilor primare; totuşi, rezultatele obţinute sînt satisfăcătoare în aplicaţiile curente.

Metoda utilizată, deşi relativ simplă pentru calcule, cu toate că conduce la o ecuaţie de gradul al treilea cu numeroşi coeficienţi, poate fi simplificată pentru calculele orientative, renunţîndu-se la coeficienţii cu valori foarte mici, operaţie care trebuie efectuată pentru fiecare caz în parte.

Relaţiile analitice deduse exprimă caracteristica universală a unei familii de compresoare centrifuge de aceeaşi soluţie constructivă, care au o largă aplicaţie în economia noastră naţională şi care permit analiza comportării lor la toate regimurile lor de lucru.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Pimsner, C. A. Vasilescu, G. A. Rădulescu, *Energetica turbomotoarelor cu ardere internă*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1964.
2. Г. Ю. Степанов, *Основы теории лопаточных машин, комбинированных и газотурбинных двигателей*. Москва, Машгиз, 1957.
3. V. Pimsner, *Asupra unei metode de determinare a caracteristicii universale a compresorului centrifug*, St. cerc. energ. electr., 5, *1*, 137—154 (1965).

4. A. Stodola, *Dampf und Gasturbinen*, vol. I, Viena, Springer-Verlag, 1924.
5. C. Pfleiderer, *Strömungsmaschinen*, vol. I, Berlin, Springer-Verlag, 1957.
6. В. Ф. Рис, *О возможностях теоретического определения к. п. д. и характеристик компрессорных машин центробежного типа*, Энергомашиностроение, *10* (1962).
7. А. И. Степанов, *Центробежные и осевые насосы*, Москва, Машгиз, 1960.
8. V. Pimsner, *Interdependența dintre parametrii funcționali și performanțele compresorului centrifug*, St. cerc. energ. electr., **16**, *3* 625—685 (1966).

DISTRIBUŢIA PRESIUNII ÎN INJECTOARELE CU CAMERĂ DE TURBIONARE. INFLUENŢA RAPORTULUI $z \cdot f_i / d_c^2$. ROLUL FRECĂRII

DE

B. POPA

621.694

Cunoaşterea cîmpului real de presiune stabilizat în injectoarele cu cameră de turbionare oferă posibilitatea determinării căderii de presiune prin orificiile tangenţiale şi poate servi la determinarea diametrului turbionului de aer în apropierea plăcii frontale a camerei. De asemenea această presiune statică modifică procesul de retur.

Dintre factorii care influenţează distribuţia presiunii, în lucrare se studiază influenţa raportului secţiunilor orificiilor tangenţiale la pătratul diametrului camerei injectorului.

Totodată se pune în evidenţă rolul frecării, care modifică distribuţia presiunii pe placa frontală a camerei.

1. INTRODUCERE

O largă răspîndire în ultimul timp au primit în evoluţia lor injectoarele mecanice, în special cele cu cameră de turbionare, datorită consumului mic de energie reclamat pentru pulverizarea combustibilului faţă de pulverizarea cu fluide auxiliare (aer sau abur), funcţionării silenţioase a gabaritului redus, siguranţei în exploatare şi simplicităţii construcţiei, fiind folosite la arderea combustibililor lichizi cu punct de fierbere ridicat şi calitate inferioară.

Aceste tipuri de injectoare au fost studiate privind mai ales proprietăţile lor de pulverizare, unghiul jetului debitat, fineţea şi repartiţia spaţială a pulverizării, coeficientul de debit etc., deci caracteristicile realizate la ieşirea din injector [2]—[7] etc.

În ciuda numărului mare de lucrări apărute pînă în prezent privind aspectele arătate mai sus, unele procese din camera de turbionare, ca studiul cîmpului de variaţie a presiunii în curentul de lichid vîscos angajat în curgerea turbionară, precum şi factorii care influenţează această repartiţie au fost prea puţin abordate.

Şt. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 567—582, 1970

Cunoaşterea cîmpului real de presiune duce la posibilitatea determinării căderii de presiune prin orificiile de intrare tangenţială, $\Delta p_i = p_{al} - p_i$, p_{al} fiind presiunea de alimentare a combustibilului lichid, iar p_i presiunea fluidului la intrare în camera de turbionare (fig. 1).

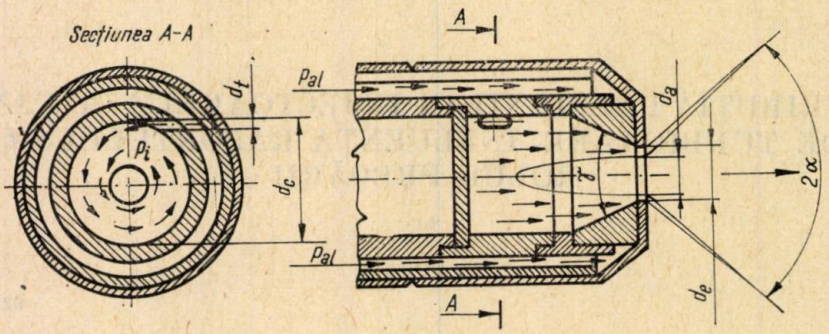


Fig. 1. — Schiţa injectorului cu cameră de turbionare.

Cunoaşterea cîmpului de presiune pe peretele frontal posterior poate servi şi la determinarea indirectă a diametrului turbionului de aer în apropierea acestui perete. În direcţia radială, presiunea scade spre axa camerei de turbionare, ajungînd în apropierea acestei axe egală cu presiunea mediului ambiant. Dublul razei vectoare a punctului de suprapresiune zero reprezintă diametrul turbionului de aer la acest perete.

Importanţa teoretică şi funcţională a cunoaşterii presiunilor pe peretele frontal este evidentă în cazul injectoarelor cu reglarea debitului prin întoarcere. Dependenţa presiunilor statice de diametrul şi de poziţia de amplasare a orificiului de întoarcere şi legătura dintre valorile presiunilor şi procesul de curgere turbionară din camera injectorului justifică abordarea problemei.

2. FACTORII CARE INFLUENŢEAZĂ REPARTIŢIA PRESIUNII

Legea variaţiei vitezei tangenţiale pe direcţia radială a camerei de turbionare este exprimată de relaţia

$$w_t \cdot D^n = \text{const},$$

D fiind diametrul de rotire al fluidului.

Exponentul n înglobează abaterile cîmpului vitezelor fluidului real faţă de distribuţia vitezelor în cazul curgerii fluidului ideal, pentru turbionul liber putînd lua valori între $0 < n < 1$.

Valorile mici ale lui n dovedesc pierderi mai mari în procesul curgerii în camera de turbionare, în opoziţie cu valorile apropiate de unitate ale acestui exponent, care sînt de preferat şi care arată pierderi minime de presiune şi de viteze tangenţiale maxime la ieşirea din diuza injectorului.

Pierderile de energie sînt influențate de dimensiunile geometrice ale injectorului, și anume lungimea mare a camerei de turbionare, un diametru d_c de asemenea mare al camerei de turbionare față de diametrul de ieșire d_e și diametrul mic al fantelor tangențiale.

Cercetări întreprinse [8], [9] au dovedit că hidrodinamica curentului de lichid vîscos în aceste injectoare mecanice, ca și repartiția presiunii în cameră, este influențată de următoarele simplexuri ale parametrilor geometrici principali, care influențează totodată și valorile lui n (valori indicate a se apropia de unitate):

— raportul dintre diametrul diuzei la ieșire d_e și diametrul camerei de turbionare d_c, adică d_e/d_c;

— cîtul dintre secțiunea canalelor tangențiale $z \cdot f_t$ și pătratul diametrului camerei de turbionare d_c^2, adică $z \cdot f_t/d_c^2$.

Mărind valorile acestor simplexuri, se obțin valori mai mari ale lui n. În cazul creșterii valorilor acestor parametri peste limitele $d_e/d_c \geqslant 0{,}25$ și $z \cdot f_t/d_c^2 \geqslant 0{,}1$, rezultă pentru n valori care pot fi considerate constante și egale cu 0,8.

Prezenta lucrare își propune a studia experimental, dintre factorii care modifică repartiția presiunii pe pereții camerei de turbionare, influența raportului $z \cdot f_t/d_c^2$ și rolul frecării lichidului.

3. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Schema de alimentare a injectorului experimental și metodica de măsurare a presiunii de alimentare și a celei pe peretele posterior al camerei rezultă din figura 2.

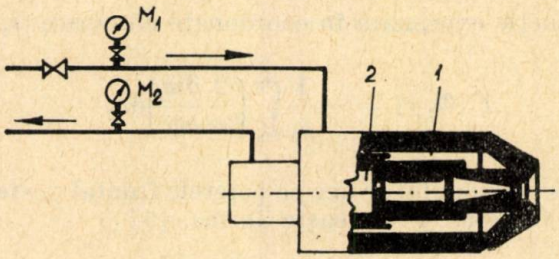


Fig. 2. — Metodica măsurării presiunii.

Presiunea statică, dezvoltată la raza r de la axa camerei, este condusă prin oficiu de diametru corespunzător (amplasat la această rază pe peretele din fund al camerei de turbionare) într-un spațiu închis, fiind apoi măsurată cu manometrul M_2.

Metoda dă rezultate bune, cu un grad înalt de reproductibilitate, aplicînd o tehnologie adecvată a camerelor de turbionare și o precizie necesară de execuție și de amplasare a orificiilor de captare a presiunilor.

Relația teoretică a expresiei adimensionale a raportului presiunilor indică dependența acestui raport de caracteristica geometrică A, raza

camerei de turbionare r_x şi raza diuzei de ieşire r_e sub forma [9]

$$\frac{p_x}{p_0} = f(A, r_e, r_x) + \eta F(\Phi, r) \tag{1}$$

sau

$$\frac{p_x}{p_0} = T + \eta F(\Phi, r), \tag{2}$$

în care (fig. 3) p_x reprezintă presiunea teoretică curentă la raza r_x, p_0 presiunea teoretică de alimentare, η — coeficientul de viscozitate dinamică,

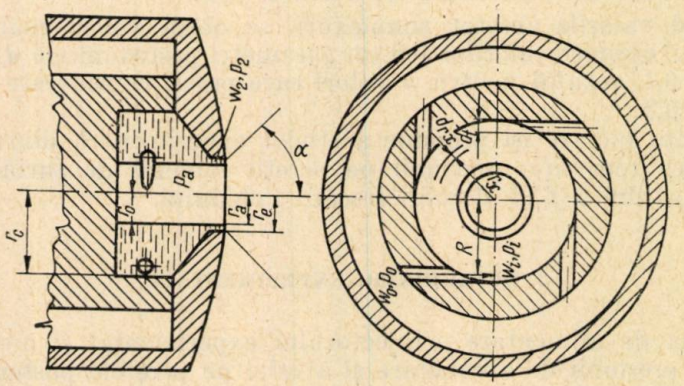


Fig. 3. — Camera de turbionare a unui injector fără întoarcere.

iar $F(\Phi, r)$ o funcţie exprimată în coordonate cilindrice (r, Φ, z), de forma

$$F(\Phi, r) = -\frac{1}{p_0}\int_{r_0}^{r_x}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial w_t}{\partial \Phi}\right)dr, \tag{3}$$

unde r_0 este raza turbionului de aer pe peretele frontal posterior al camerei.

Termenul teoretic T cunoaşte forma [9]

$$T = \frac{2b^2}{1+b}\left(\frac{1}{b} - \frac{r_e^2}{r_x^2}\right) = \frac{1-2u^2}{1-u^2} - \frac{(1-2u^2)^2}{1-u^2}\cdot\frac{r_e^2}{r_x^2}, \tag{4}$$

b fiind caracteristica turbionului de aer $b = \frac{r_a^2}{r_e^2}$, iar u o funcţie definită prin relaţiile

$$A = \frac{1-2u^2}{2u^3}, \tag{5}$$

$$b = 1 - 2u^2. \tag{6}$$

Dependența dintre caracteristica geometrică A și cea a turbionului de aer b cunoaște forma [6]

$$A = \frac{b\sqrt{2}}{(1-b)\sqrt{1-b}}. \tag{7}$$

Cercetările experimentale au fost conduse spre evidențierea acelorași variabile și parametri necesari pentru a ajunge la relații comparabile între relațiile teoretice și cele experimentale.

Măsurătorile efectuate au studiat influența caracteristicii geometrice A (modificînd raportul adimensional $z \cdot f_i/d_c^2$) pentru diferite distanțe radiale r_p asupra raportului p/p_{al}, în condițiile unui diametru de ieșire d_e păstrat constant, adică

$$\frac{p}{p_{al}} = f(A, r_p) = f\left(\frac{z \cdot f_i}{d_c^2}, r_p\right), \tag{8}$$

în care p reprezintă presiunea curentă măsurată la raza r_p, p_{al} este presiunea de alimentare măsurată și z numărul orificiilor tangențiale de admisie, avînd fiecare secțiunea f_i, $zf_i = S_i$.

Pentru cele patru camere de turbionare experimentate avînd valorile $A = 0{,}77$; 1,58; 1,84 și 2,47, iar orificiile tangențiale $d_i = 3{,}01$; 2,22; 2,08 și 1,81, dimensiunile lor geometrice au respectat condițiile $d_e/d_c \geqslant 0{,}25$ și $z \cdot f_i/d_c^2 \geqslant 0{,}1$, dimensiuni geometrice notate simbolic pe fiecare diagramă după schema

d_e	d_i
d_c	—

Astfel, pentru aceeași presiune de alimentare și diferite camere s-au determinat și s-au trasat curbele $p = f(r_p)$, obținîndu-se figura 4. Modificînd presiunea de alimentare, curbele capătă alura din figurile 5—7.

Introducînd reprezentarea adimensională p/p_{al}, rezultă pentru fiecare presiune de alimentare și diferite raze curente r_p măsurate valori tabelare din care s-au reprezentat pentru patru distanțe radiale adoptate, $r_p = 1{,}5$; 2,5; 3,5 și 4,5, curbele $p/p_{al} = f(p_{al})$. Aceasta arată că și expresia p/p_{al} depinde încă de presiunea de alimentare, element de care a trebuit să se țină seama mai jos (fig. 8—11).

Acest fenomen poate fi explicat de următoarea expresie a debitului:

$$D = S_i \beta_{tr} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{al} - p_{rc})} = S_i \beta_r \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{al}}, \tag{9}$$

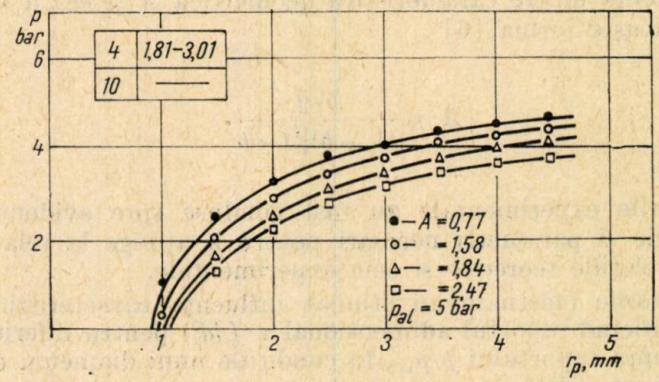


Fig. 4. — Curbele variației presiunii pe peretele frontal posterior al camerei, funcție de distanța radială, la presiunea de alimentare de 5 bar și diferite caracteristici geometrice.

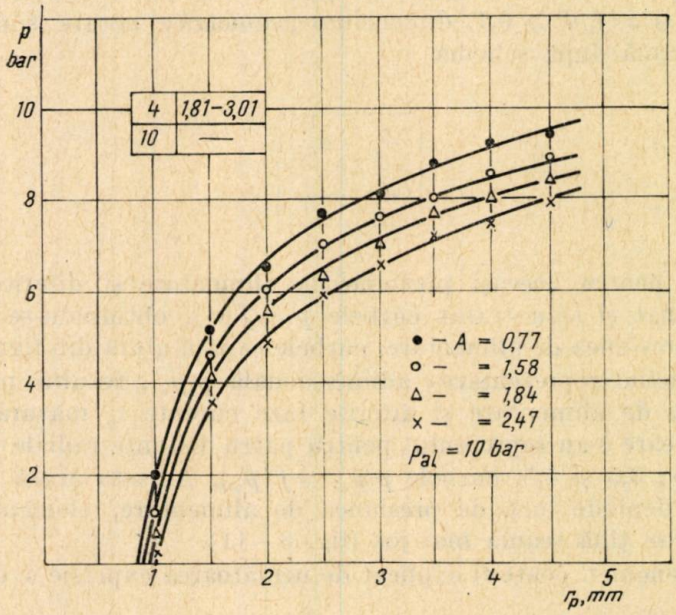


Fig. 5. — Curbele variației presiunii pe peretele frontal posterior al camerei, funcție de distanța radială, la presiunea de alimentare de 10 bar și diferite caracteristici geometrice.

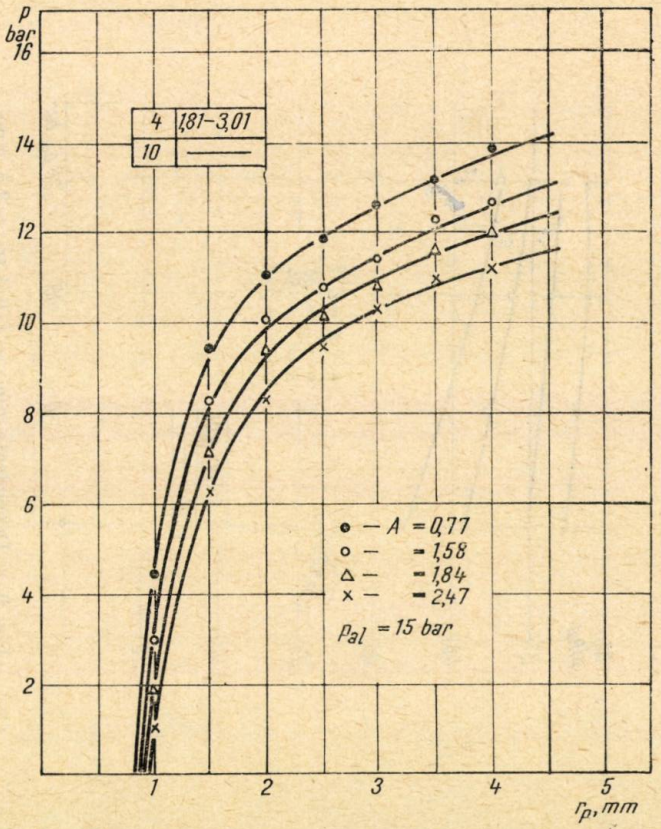


Fig. 6. — Curbele variaţiei presiunii pe peretele frontal posterior al camerei, funcţie de distanţa radială, la presiunea de alimentare de 15 bar şi diferite caracteristici geometrice.

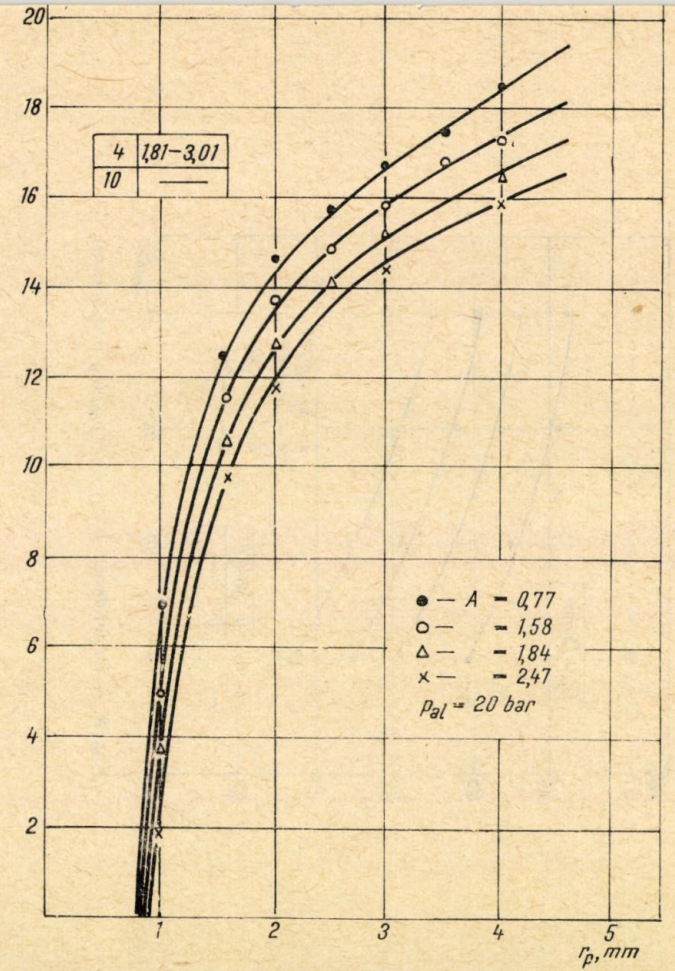


Fig. 7. — Curbele variaţiei presiunii pe peretele frontal posterior al camerei, funcţie de distanţa radială, la presiunea de alimentare de 20 bar şi diferite caracteristici geometrice.

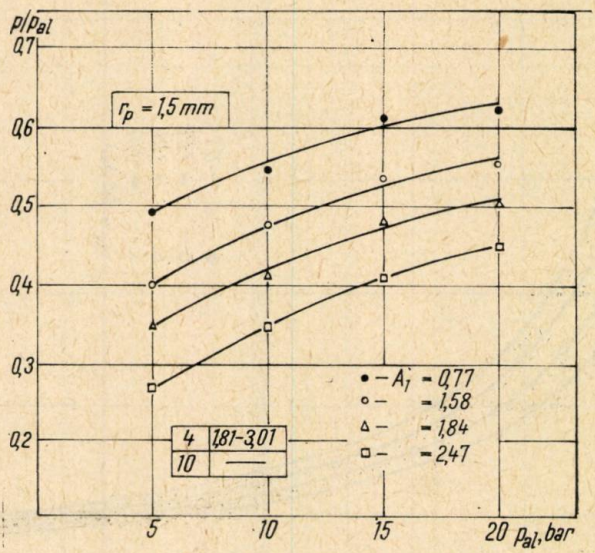


Fig. 8. — Dependența $p/p_{al} = f(p_{al})$ ($r_p = 1{,}5$ mm).

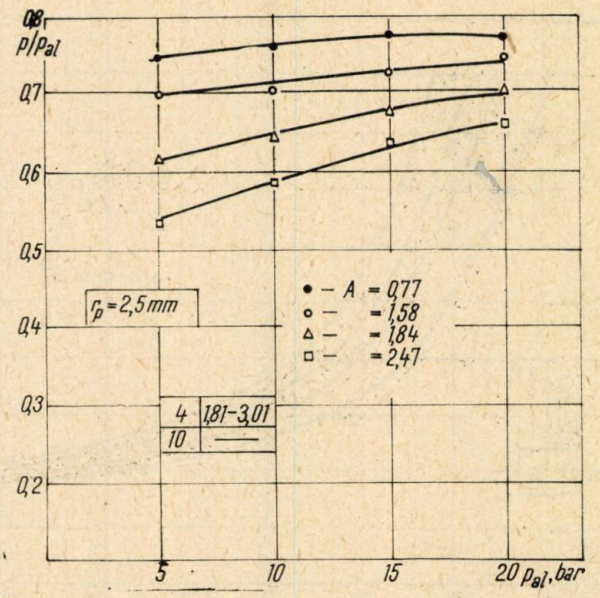


Fig. 9. — Dependența $p/p_{al} = f(p_{al})$ ($r_p = 2{,}5$ mm).

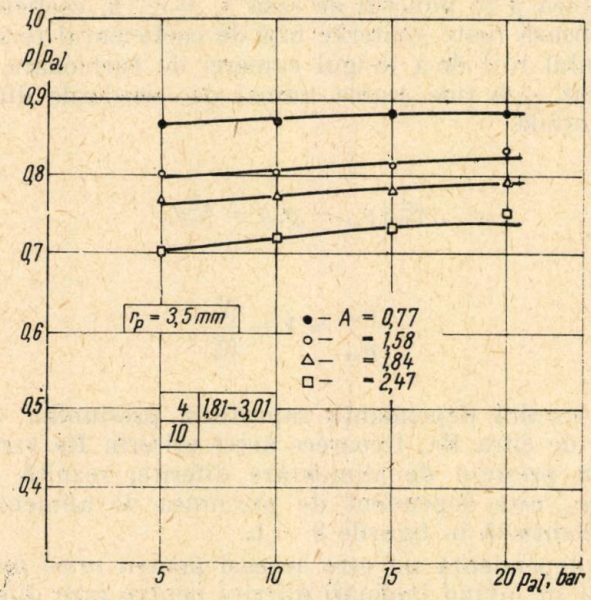


Fig. 10. — Dependența $p/p_{al} = f(p_{al})$ ($r_p = 3{,}5$ mm).

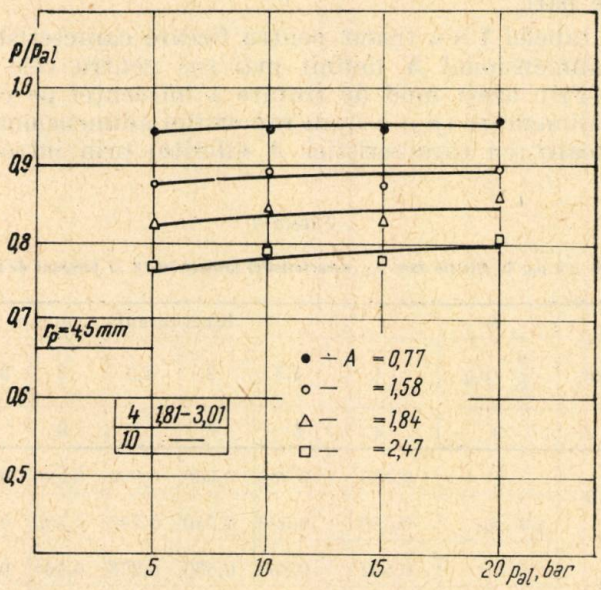


Fig. 11. — Dependența $p/p_{al} = f(p_{al})$ ($r_p = 4{,}5$ mm).

p_{rc} fiind presiunea p în punctul de rază $r_p = r_c$, β_r coeficientul de debit real care înglobează toate abaterile față de coeficientul teoretic β datorită utilizării fluidului real de-a lungul camerei de turbionare, iar β_{tr} coeficientul de debit care ține seama numai de pierderile din secțiunea de admisie tangențială.

Deci

$$\beta_{tr}^2 (p_{al} - p_{rc}) = \beta_r^2 p_{al}$$

sau

$$\frac{p_{rc}}{p_{al}} = 1 - \frac{\beta_r^2}{\beta_{tr}^2}. \tag{10}$$

De aici rezultă dependența raportului presiunilor de coeficientul de debit, deci de cifra Re. Deoarece acest criteriu Re variază la aceeași cameră pentru presiuni de alimentare diferite, rezultă că și raportul presiunilor p/p_{al} este dependent de presiunea de alimentare, așa cum de fapt se evidențiază în figurile 8—11.

Această dependență nu este aceeași pentru orice distanță radială, curbele de mai sus avînd înclinări diferite pentru raze diferite. Influența presiunii de alimentare p_{al} asupra raportului adimensional p/p_{al} se propune a se reda printr-o relație de forma

$$p/p_{al} = K (p/p_{al})_{p_{al}} = 20 \text{ bar}, \tag{11}$$

coeficientul K adoptîndu-se convențional unitar la presiunea de alimentare de 20 de bari.

În baza tabelei 1 s-a trasat pentru fiecare caracteristică A factorul de corecție adimensional K definit mai sus pentru cele patru raze r_p (fig. 12—15). Prin acest mod de tratare a influenței pe care o prezintă presiunea de alimentare (p_{al}) asupra raportului adimensional p/p_{al} pentru diferite injectoare (cu caracteristici A diferite) prin introducerea facto-

Tabela 1

Calculul valorii $p/k.p_{al}$ la diferite raze r_p, caracteristici geometrice A și presiuni de alimentare p_{al}

A Simbol	p_{al}, bar	k / $\frac{p}{k} \cdot p_{al}$	Raza curentă r_p în mm							
			1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,77 ●	5	k	0,430	0,785	0,880	0,960	0,990	0,960	0,950	0,990
		$p/k.p_{al}$	0,350	0,630	0,740	0,782	0,850	0,900	0,935	0,955
	10	k	0,572	0,880	0,880	0,978	0,960	0,987	0,990	0,995
		$p/k.p_{al}$	0,350	0,630	0,740	0,782	0,850	0,900	0,935	0,955

Tabela 1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	15	k	0,760	0,952	0,990	0,999	0,985	0,981	0,990	0,999
		$p/k.p_{at}$	0,350	0,630	0,740	0,782	0,850	0,900	0,935	0,955
	20	k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		$p/k.p_{at}$	0,350	0,630	0,740	0,782	0,850	0,900	0,935	0,955
	5	k	0,350	0,707	0,689	0,939	0,964	0,952	0,980	0,983
		$p/k.p_{at}$	0,200	0,565	0,675	0,740	0,800	0,835	0,870	0,895
	10	k	0,576	0,832	0,890	0,977	0,960	0,975	0,980	0,988
1,58		$p/k.p_{at}$	0,200	0,565	0,675	0,740	0,800	0,835	0,870	0,895
○	15	k	1,000	0,930	0,980	0,967	0,960	0,995	0,980	0,995
		$p/k.p_{at}$	0,200	0,565	0,675	0,740	0,800	0,835	0,870	0,895
	20	k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		$p/k.p_{at}$	0,200	0,565	0,675	0,740	0,800	0,835	0,870	0,895
	5	k	0,200	0,679	0,835	0,870	0,910	0,945	0,942	0,970
		$p/k.p_{at}$	0,100	0,515	0,635	0,700	0,760	0,800	0,840	0,850
	10	k	0,600	0,815	0,890	0,933	0,930	0,969	0,955	0,963
1,84		$p/k.p_{at}$	0,100	0,515	0,635	0,700	0,760	0,800	0,840	0,850
△	15	k	1,000	0,911	0,980	0,971	0,963	0,987	0,960	0,995
		$p/k.p_{at}$	0,100	0,515	0,635	0,700	0,760	0,800	0,840	0,850
	20	k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		$p/k.p_{at}$	0,100	0,515	0,635	0,700	0,760	0,800	0,840	0,850
	5	k	—	0,600	0,773	0,825	0,880	0,940	0,940	0,963
		$p/k.p_{at}$	—	0,450	0,595	0,660	0,715	0,745	0,790	0,800
	10	k	—	0,778	0,825	0,893	0,930	0,966	0,950	0,975
2,47		$p/k.p_{at}$	—	0,450	0,593	0,660	0,715	0,745	0,790	0,800
×	15	k	—	0,903	0,934	0,953	0,955	0,986	0,946	0,967
		$p/k.p_{at}$	—	0,450	0,595	0,660	0,715	0,745	0,790	0,800
	20	k	—	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		$p/k.p_{at}$	—	0,450	0,595	0,660	0,715	0,745	0,790	0,800

Caracteristicile constructive ale injectorului				Proprietăţile fizice ale combustibilului folosit				
d_c, mm	d_e, mm	d_r, mm	z	Felul comb.	t, °C	η, P	σ, dyn/cm	ρ, g/cm^3
10	4	—	4	Motorină	20	0,054	27,5	0,852

rului de corecție adimensional K, rezultă independența raportului $p/K \cdot p_{al}$ față de presiunea de alimentare la diferite raze ale peretelui posterior al camerei de turbionare r_p.

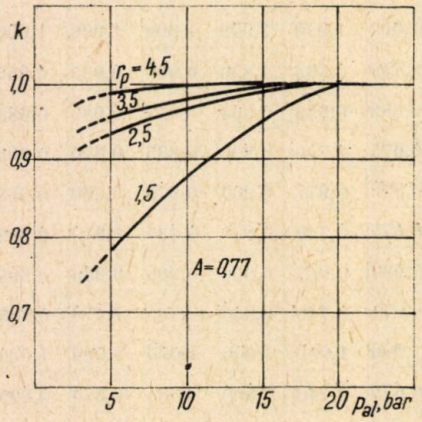


Fig. 12. — Valoarea $K = f(p_{al})$ pentru diferite distanțe radiale și caracteristica $A = 0{,}77$, $d_t = 3{,}01$.

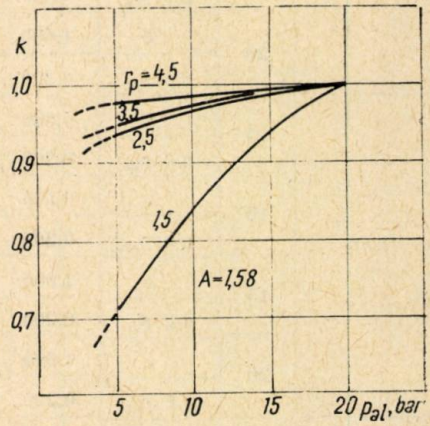


Fig. 13. — Valoarea $K = f(p_{al})$ pentru diferite distanțe radiale și caracteristica $A = 1{,}58$, $d_t = 2{,}22$.

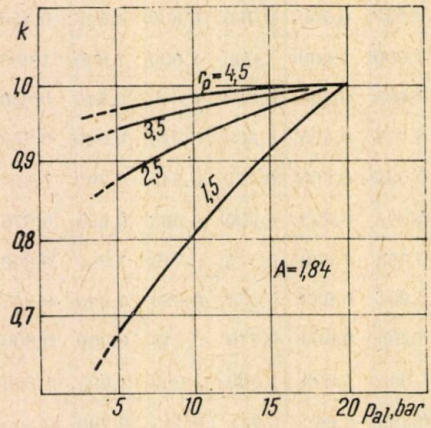


Fig. 14. — Valoarea $K = f(p_{al})$ pentru diferite distanțe radiale și caracteristica $A = 1{,}84$, $d_t = 2{,}08$.

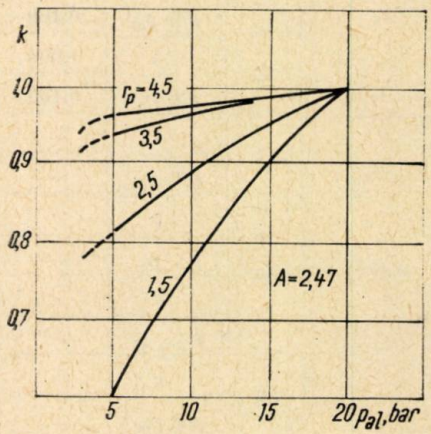


Fig. 15. — Valoarea $K = f(p_{al})$ pentru diferite distanțe radiale și caracteristica $A = 2{,}47$, $d_t = 1{,}81$.

Figura 16 confirmă acest lucru, trasîndu-se curbele $p/K \cdot p_{al} = f(r_p)$ pentru diferite mărimi A, aceasta fiind familia de curbe căutată, curbe valabile pentru orice presiuni de alimentare ($p_{al} = 5-20$ de bari).

Ele arată că raportul adimensional al presiunilor, corectat cu factorul K, variază funcție de caracteristica geometrică A, și anume descrește pentru valori crescătoare ale lui A.

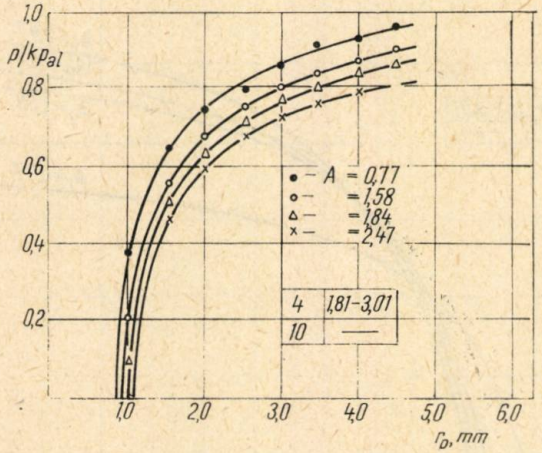


Fig. 16. — Curbele $p/K \cdot p_{al} = f(r_p)$ pentru diferite camere A.

4. EVALUAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE CU PRIVIRE LA DISTRIBUȚIA PRESIUNII ÎN FLUIDUL VÎSCOS DIN CAMERA DE TURBIONARE. COMPARAREA ACESTORA CU VALORILE TEORETICE

Curbele experimentale (fig. 16) pot fi comparate cu expresia teoretică (2), care redă adimensional raportul presiunilor p_x/p_0. Această ecuație cuprinde un termen teoretic T și un altul care ține seama de frecare $\eta F(\Phi, r)$.

Calculul termenului teoretic T poate fi făcut pentru diferitele valori ale lui A corespunzătoare camerelor de turbionare analizate, $A_1 = 0{,}77$; $A_2 = 1{,}58$; $A_3 = 2{,}47$, fie folosind parametrul intermediar u, relațiile (4), (5) și (6) cu care se găsesc valorile corespunzătoare ale caracteristicii turbionului de aer $b_1 - b_4$, sau aceste valori b se determină cu ajutorul calculatorului matematic (relația 7).

Avînd valorile teoretice ale caracteristicii turbionului $(b_1 - b_4)$ pentru camerele turbionare analizate $A_1 - A_4$, pentru același diametru de ieșire $d_e = 4$ mm și raze diferite $r_x = 1-5$ mm, se poate trasa familia de curbe $T = f(r_x)$, reprezentate în figura 17.

Valorile negative ale expresiei T sînt valori lipsite de sens fizic, iar intersecția lor cu abscisa marchează puncte de raze r_{min} care corespund razei teoretice a turbionului de aer pe peretele camerei de turbionare.

Curbele $T = f(r_x)$ se întretaie, iar poziția lor relativă în zona $2 < r_x < 5$ este diferită de cea a curbelor experimentale (fig. 16), aceasta

dovedind influenţa pregnantă a frecării, adică a termenului $\eta F(\Phi, r)$ şi a abaterii ipotezelor teoretice faţă de condiţiile reale de curgere.

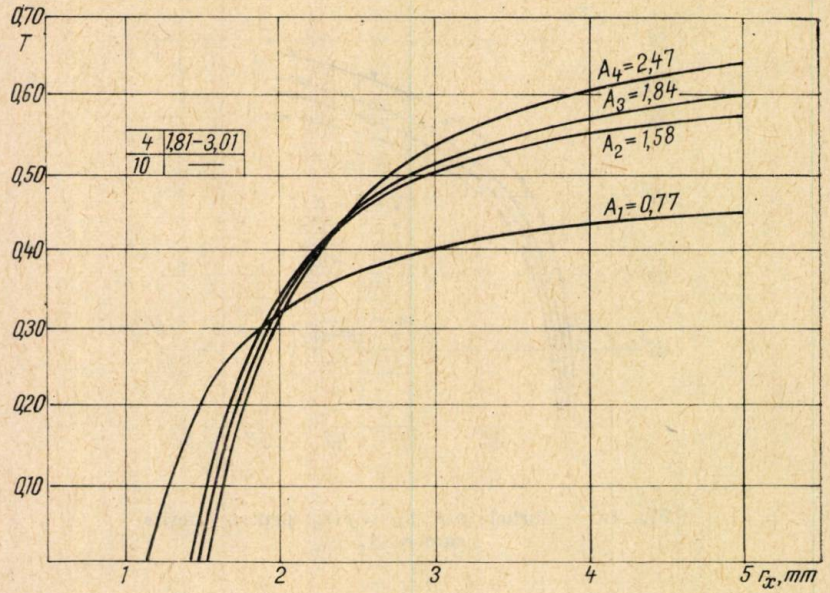


Fig. 17. — Variaţia termenului $T = f(r_x)$.

Reluînd valoarea p_x/p_0 rezultată din ecuaţiile teoretice, aceasta se poate confrunta cu valorile măsurate $p/K \cdot p_{ai}$, adică

$$\frac{p_x}{p_0} \simeq \frac{p}{K \cdot p_{ai}} = T + \eta F(\Phi, r). \tag{12}$$

Calculul şi reprezentarea termenului $\eta F(\Phi, r)$ care înglobează frecarea, rezultat din ecuaţia (12), se face cu ajutorul diagramelor (fig. 17 şi 16), obţinîndu-se figura 18, care redă funcţia $\eta F(\Phi, r) = f(r_x)$ pentru diferite valori ale caracteristicii geometrice A.

Alura acestor curbe arată pregnant influenţa frecării, care depinde în mare măsură de valoarea caracteristicii geometrice A. Pentru aceeaşi rază r_x, termenul $\eta F(\Phi, r)$ creşte o dată cu scăderea valorii caracteristice A. De asemenea pentru valori mai mari ale razei, aceste curbe se redresează, devenind aproape paralele, domenii în care frecarea ca valoare este influenţată numai de caracteristica geometrică a injectorului.

În acest mod s-a reuşit a evidenţia gradul diferit de influenţă a termenului care conţine frecarea pentru diferite forme, deci şi valori ale caracteristicii geometrice A în procesul de curgere al injectoarelor cu cameră turbionară.

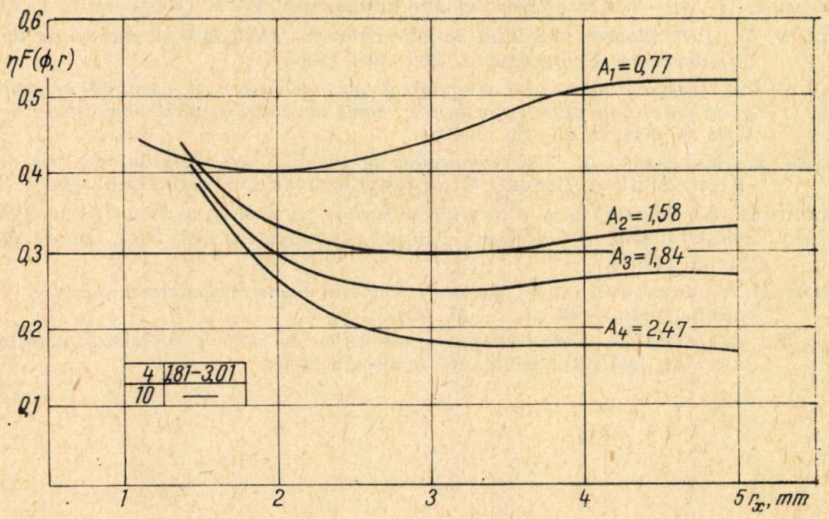


Fig. 18. — Variația termenului $\eta F(\Phi, r) = f(r_x)$.

5. CONCLUZII

Lucrarea a abordat studiul cîmpului presiunilor în masa fluidului injectoarelor cu cameră turbionară, evidențiind din mulțimea factorilor care pot modifica acest cîmp rolul raportului adimensional $z \cdot f_i/d_c^2$. Determinările experimentale pun în evidență spectrul distribuției presiunii în curentul turbionar.

Influența complexului $z \cdot f_i/d_c^2$, modificat prin variația diametrului orificiilor tangențiale, arată că la aceeași presiune de alimentare, o dată cu creșterea secțiunilor orificiilor tangențiale, deci cu micșorarea caracteristicii geometrice A, presiunile înregistrate sînt mai mari.

Lucrarea demonstrează teoretic și experimental că raportul adimensional al presiunilor curente p/p_{al} depinde de presiunea de alimentare.

Prin introducerea factorului de corecție K s-au determinat curbele $p/K \cdot p_{al} = f(r_p)$, valabile pentru orice presiune de alimentare la diferite geometrii A ale camerei injectorului.

Cercetările au evidențiat rolul pregnant și influența frecării care modifică distribuția presiunii în masa de fluid, frecare influențată atît de caracteristica A, cît și de raza turbionului.

Pentru distanțe $r > 3{,}5$ mm, adică zone îndepărtate de miezul de aer, termenul care exprimă frecarea depinde numai de forma geometrică a camerei.

BIBLIOGRAFIE

1. Abramovici, G. N., *Statia v sbornike Promîșlennaia aerodinamika*, Izd. biuro novoi tehniki TAGI, Moskva, 1944.
2. Bowen, I. G., *The spill pressure-jet atomizer*, Journal of the Institute of Fuel (Londra), **XXXV**, *262*, 484—495 (1962).

3. GEBHARDT, H., *Die Tropfengrössen bei Drallzerstäubung*, BWK (Düsseldorf), *8* (1958).
4. GHIA, V. V., *Determinarea unghiului de pulverizare la injectoarele cu cameră de turbionare cu întoarcere*, Energetica, *9*, 389—394 (1966).
5. GHIA, V. ş.a., *Influenţa numărului de ajutaje tangenţiale asupra coeficientului de debit şi unghiul conului de pulverizare la injectoarele cu camere de turbionare*, St. cerc. energ., seria B, **XII**, *1*, 23—35 (1962).
6. GIFFEN, E., MURASZEW, A., *The Atomization of Liquid Fuels* (Zerstäubung von flüssigen Krafts-Stoffen), Londra, Mc. Grow Chapman and Hall, Ltd., 1953.
7. KAPITANIAK, A., *The influence of chosen construction parameters on the performance of spill-controll pressure-jet atomizers*, Journal of the Institute of Fuel, Londra, **XL**, *312*-26—35 (1967).
8. PAVLOV, C. A., STAROJUK, Ia, P., *Rasceot i konstruirovanie mehaniceskih forsunok*, Energomaşinostroenie, **12**, *3*, 8—11 (1966).
9. POPA, B., *Contribuţii la studiul cîmpului presiunilor în camera turbionară a injectoarelor mecanice*, Institutul politehnic Timişoara, 1969.

ÎMBUNĂTĂŢIREA PERFORMANŢELOR MOTOARELOR DE AUTOVEHICUL FUNCŢIONÎND LA ALTITUDINI VARIABILE, PRIN CORECTAREA AVANSULUI LA DECLANŞAREA SCÎNTEII ELECTRICE *)

DE

C. A. VASILESCU şi I. ŞTEFAN

621.43

Sînt situaţii destul de frecvente în care autovehiculele echipate cu motoare cu aprindere prin scînteie circulă pe drumuri de altitudine variabilă. Ca urmare a altitudinii variabile se modifică presiunea şi temperatura exterioară, avînd drept efect variaţia puterii motorului şi a consumului specific de combustibil.
În continuare se examinează cauzele care duc la afectarea performanţelor motorului; se propune şi se justifică corectarea valorii avansului la declanşarea scînteii electrice în funcţie de altitudine în vederea îmbunătăţirii acestor performanţe. Datele experimentale se referă la motorul de autocamion românesc SR-211, fabricat de uzina de autocamioane din Braşov.

1. INFLUENŢA ÎNĂLŢIMII ASUPRA FUNCŢIONĂRII MOTORULUI CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

Atît presiunea, cît şi temperatura aerului scad o dată cu ridicarea în înălţime. În condiţiile atmosferei standard, variaţia presiunii şi a temperaturii mediului exterior sînt redate în figura 1; faţă de aceste date care se referă la aerul atmosferei, remarcăm că în cazul drumurilor aflate la diverse altitudini prezenţa solului poate influenţa temperatura straturilor de aer aflate în imediat contact cu acesta.

Variaţia condiţiilor exterioare modifică puterea motorului, care scade într-o primă aproximaţie proporţional cu densitatea aerului, astfel că la 3000 m, spre exemplu, puterea motorului reprezintă numai 75% din puterea sa în condiţiile de la nivelul mării (vezi fig. 1).

*) Lucrare prezentată la „Conferinţa de motoare cu ardere internă", Bucureşti, 1970.

În afară de variaţia puterii datorită densităţii aerului se modifică coeficientul de umplere, dozajul, tendinţa de detonaţie şi durata arderii. Coeficientul de umplere scade cu înălţimea însă în mică măsură [1], la altitudinea de 3000 m fiind 0,93 din valoarea de la nivelul mării. Această scădere se datoreşte măririi pierderilor relative din sistemul de admisie

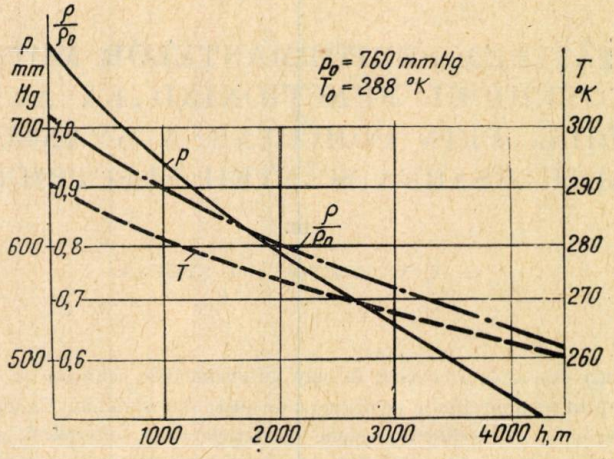


Fig. 1. — Variaţia presiunii p, temperaturii T şi a raportului densităţilor $\frac{\rho}{\rho_0}$ cu înălţimea h în cadrul atmosferei standard; p_0, T_0, ρ_0 — valori la $h = 0$ m.

şi creşterii cantităţii de gaze reziduale rămase în camera de ardere; scăderea coeficientului de umplere contribuie şi ea la o uşoară micşorare a puterii motorului.

Dozajul tinde să se îmbogăţească cu altitudinea, la 3000 m fiind cu circa 16% mai mare decît în condiţiile de la nivelul mării, iar la 1500 m cu 7,5%, deoarece debitul de combustibil rămîne practic constant şi debitul masic de aer scade. Într-o primă etapă, această tendinţă de creştere a dozajului are un efect pozitiv, în sensul că se îmbunătăţeşte procesul de ardere, deci se corectează într-o oarecare măsură efectul scăderii presiunii exterioare; în continuare se va resimţi mărirea consumului specific de combustibil. Ca urmare, practic s-a introdus corecţia dozajului prin corectoare altimetrice numai în cazul autovehiculelor care funcţionează pe drumuri de mare înălţime. Altitudinea influenţează substanţial valoarea avansului la limita de detonaţie, care se măreşte, deoarece cantitatea de amestec proaspăt din cilindru scade, iar cantitatea relativă de gaze reziduale creşte, diluîndu-se astfel amestecul proaspăt. În figura 2 se prezintă date determinate în condiţii de cale după metoda Borderline [1]; aceste curbe arată o scădere apreciabilă a tendinţei la detonaţie o dată cu mărirea înălţimii de funcţionare. În această discuţie nu s-a

luat în considerare eventuala înrăutățire a condițiilor de răcire a motorului în înălțime, situație care ar favoriza apariția detonației.

Durata arderii poate fi caracterizată prin durata procesului de dezvoltare a căldurii. Determinări efectuate în condiții de laborator prin

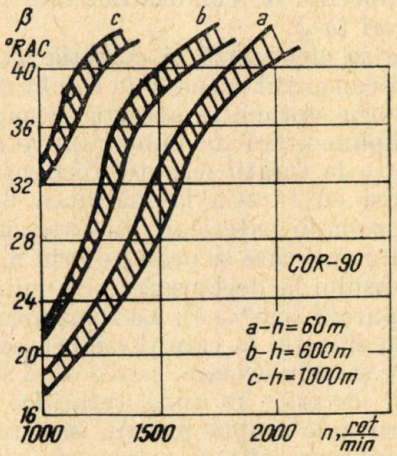


Fig. 2. — Curbele avansului la limita de detonație (β — avans la declanșarea scînteii electrice; n — turație) determinate experimental la diferite altitudini cu motorul SR-211, montat pe autocamionul SR-131.

prelucrări de diagrame indicate arată (fig. 3) o creștere de pînă la 30% a duratei procesului de dezvoltare a căldurii dacă înălțimea se mărește pînă la 3000 m. Se face observația că la aceste determinări, efectuate în condiții de banc, nu s-a reușit să se realizeze valoarea dorită a contrapresiunii la evacuare; de asemenea în interpretarea datelor nu s-a procedat la un tratament statistic riguros, adică nu s-a eliminat în totalitatea ei influența dispersiei ciclice.

Durata procesului de dezvoltare a căldurii se mărește în principal datorită următoarelor influențe:

— micșorarea vitezei de ardere determinată de valoarea mai scăzută a presiunii gazelor în cilindru;

— micșorarea vitezei de ardere determinată de creșterea procentului de gaze reziduale în camera de ardere;

— mărirea relativă a pierderilor termice.

Este știut că o restabilire parțială a duratei normale a procesului de dezvoltare a căldurii în motorul cu aprindere prin scînteie poate fi făcută prin varierea avansului la declanșarea scînteii electrice și propunerea acestei lucrări constă tocmai în introducerea unei corecții a valorii avansului în funcție de altitudine, în sensul măririi acestuia dacă înălțimea de funcționare crește.

Se analizează în principiu efectele corectării diferitelor influențe ale înălțimii asupra performanțelor motorului. În figura 4 se prezintă

modul în care variază puterea (a_1) şi consumul specific de combustibil (a'_1) cu înălţimea h, în cazul în care motorul nu este prevăzut cu corecţie altimetrică a dozajului. Se observă că atît puterea, cît şi consumul specific de combustibil sînt afectate mult de creşterea înălţimii. Dacă se aplică corecţia altimetrică a dozajului, puterea creşte în mică măsură (a_2); în schimb, consumul specific de combustibil este micşorat în mai mare măsură la înălţimi mari (a'_2).

În cazul în care se efectuează şi corecţia avansului cu înălţimea, atît puterea (a_3), cît şi consumul specific de combustibil sînt îmbunătăţite (a'_3), obţinîndu-se valorile optime în această situaţie.

O posibilitate suplimentară de îmbunătăţire a performanţelor motorului în înălţime apare la turaţii scăzute. În figura 5 se prezintă modul în care variază puterea cu turaţia la înălţimea de la nivelul mării h_0 (curba a_1); datorită presiunii exterioare ridicate, în zona turaţiilor scăzute apare regimul detonant, care se ocoleşte prin micşorarea pentru acest domeniu a valorii avansului la declanşarea scînteii electrice, ceea ce conduce la o reducere a puterii (curba b). La înălţimea h se obţine o putere mai redusă (a_2); dar, în situaţia în care presiunea exterioară este scăzută, detonaţia nu mai apare şi, prin urmare, este posibil să se mărească avansul la declanşarea scînteii electrice în zona turaţiilor scăzute; acest lucru va avea un efect relativ mic asupra puterii, însă va conduce la o micşorare vizibilă a consumului specific de combustibil (curba a''_2 din fig. 5).

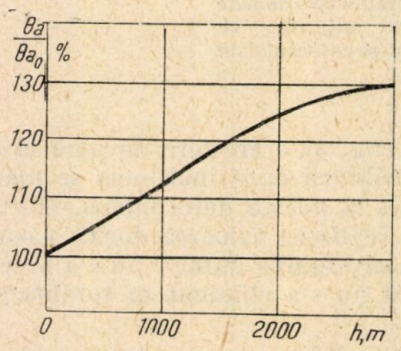


Fig. 3. — Variaţia duratei procesului de dezvoltare al căldurii θ_a în funcţie de înălţimea h; θ_{a_0} — durata procesului de dezvoltare al căldurii la înălţimea mării.

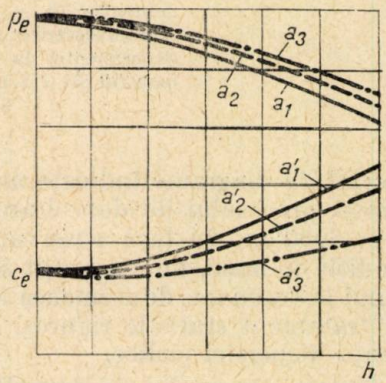


Fig. 4. — Variaţia puterii P_e şi a consumului specific de combustibil c_e pentru diferite reglaje ale carburaţiei şi ale aprinderii.

2. STUDIUL CORECŢIEI AVANSULUI LA DECLANŞAREA SCÎNTEII ELECTRICE ÎN FUNCŢIE DE ALTITUDINE

Să examinăm cum se prezintă cîmpul optim de reglaj al avansului pentru un motor cu aprindere prin scînteie funcţionînd în altitudine.

Conform celor arătate mai sus, rezultă necesitatea de a mări avansul la declanşarea scînteii electrice o dată cu înălţimea; pe de altă parte, dacă se scade sarcina motorului, avansul se măreşte, astfel că valoarea lui

va depinde (la turație n constantă) de mărimea depresiunii de conducta de aspirație Δp și de înălțimea h. Cum o anumită valoare maximă a avansului la declanșarea scînteii electrice de 50—55° RAC nu poate fi depășită, se va constata tendința plafonării la aceste valori (fig. 6).

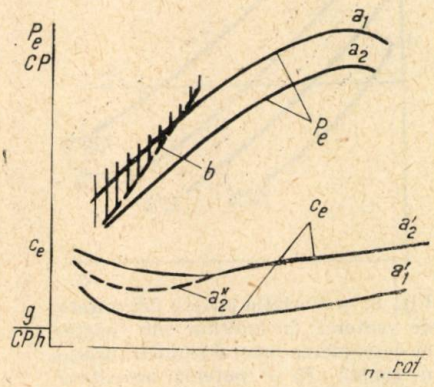


Fig. 5. — Efectul corecției altimetrice a avansului la declanșarea scînteii electrice la turații scăzute asupra puterii P_e și consumului specific de combustibil c_e.

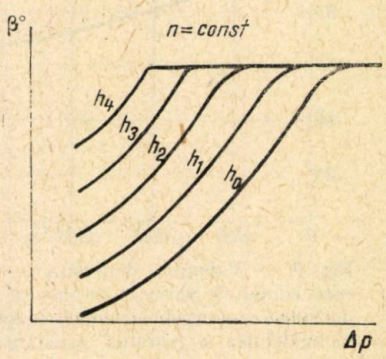


Fig. 6. — Variația avansului la declanșarea scînteii electrice β în funcție de depresiunea din conducta de aspirație Δp (sarcină) și de înălțimea h.

Față de această necesitate de a se mări valoarea avansului la declanșarea scînteii electrice cu înălțimea să examinăm cum reacționează dispozitivele uzuale pentru varierea avansului.

La turație constantă, acestea sînt influențate de depresiunea existentă în carburator. Se poate constata ușor că, pe măsură ce densitatea aerului scade, pentru aceeași deschidere a clapetei carburatorului depresiunea de comandă se micșorează și, prin urmare, valoarea avansului tinde să scadă o dată cu creșterea înălțimii. În figura 7 se prezintă scăderea valorii depresiunii de comandă în funcție de înălțime pentru o deschidere constantă a clapetei carburatorului.

În plus, mai apare un efect suplimentar datorat rezistențelor la înaintare. Pentru ca autovehiculul să se deplaseze cu o anumită viteză de înaintare, este nevoie o anumită putere independentă de înălțime (dacă se neglijează variația rezistenței aerului), fie ea P_r (fig. 8). În același timp, puterea dezvoltată de motor pentru o anumită deschidere a clapetei carburatorului scade o dată cu înălțimea. Prin urmare, așa cum se observă în figura 8, o dată cu funcționarea în altitudine motorul autovehiculului va trebui să lucreze la deschideri ale clapetei carburatorului din ce în ce mai mari, ceea ce are drept efect micșorarea avansului la declanșarea scînteii electrice.

Se observă deci că dispozitivele uzuale de variere a avansului la declanșarea scînteii electrice acționează în înălțime în sensul reducerii acestuia în loc să asigure creșterea valorii sale.

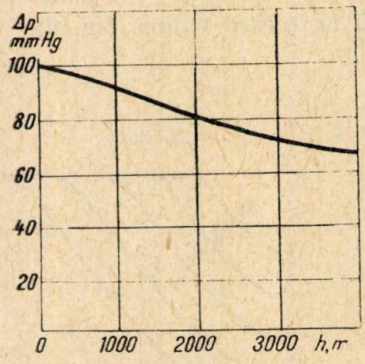


Fig. 7. — Valoarea depresiunii Δp care comandă varierea avansului la declanşarea scînteii electrice în funcţie de înălţimea h (sarcină constantă).

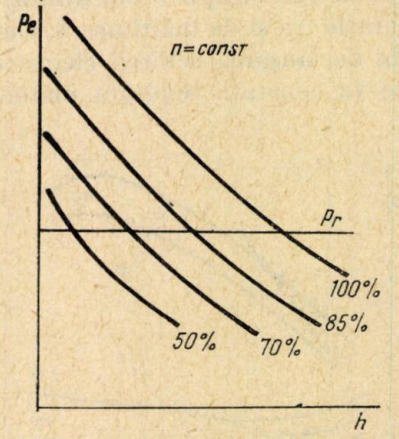


Fig. 8. — Variaţia puterii dezvoltate de motor P_e în înălţime h în funcţie de deschiderea obturatorului la turaţie n const; P_r — puterea necesitată pentru deplasarea autovehiculului.

3. REZULTATELE EXPERIMENTALE

Cercetările experimentale s-au efectuat pe un banc de probe special amenajat, funcţionarea în altitudine simulîndu-se prin regimuri de sarcini parţiale şi corectarea prin relaţii de corecţie a valorilor astfel obţinute [2]; motorul încercat este de tipul SR-211. Din diagramele care arată varierea puterii P_e şi a consumului specific de combustibil c_e în funcţie de valoarea avansului β pentru o anumită deschidere a obturatorului, o anumită turaţie n şi la diferite înălţimi h (fig. 9 *a*), se poate stabili valoarea avansului la declanşarea scînteii electrice optim în funcţie de înălţime (fig. 9 *b*), avans care creşte cu înălţimea, tinzînd apoi să se plafoneze.

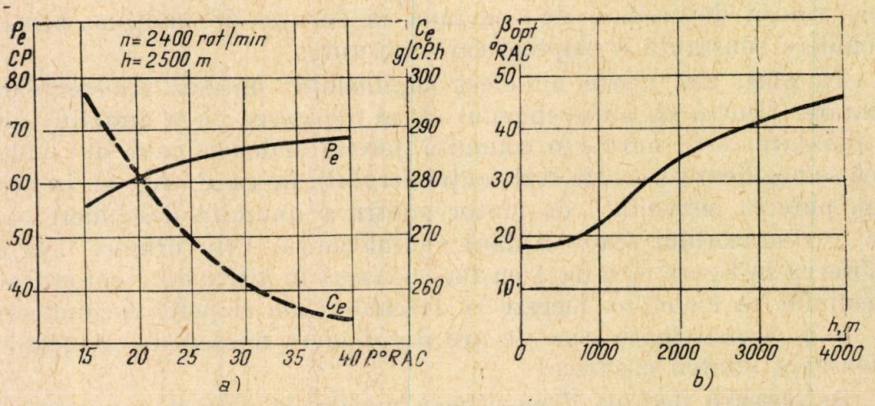


Fig. 9. — Variaţia puterii P_e şi a consumului specific efectiv de combustibil c_e cu avansul la declanşarea scînteii electrice $\beta(a)$; variaţia avansului optim la declanşarea scînteii electrice β_{opt} cu altitudinea $h(c)$.

Pentru a se asigura această variație cu înălțimea a avansului la declanșarea scînteii electrice s-a conceput completarea distribuitorului de scîntei electrice cu un dispozitiv simplu automat, dispozitiv care face obiectul unor brevete în țară și în străinătate.

Ca urmare a introducerii corecției cu altitudinea a valorii avansului la declanșarea scînteii electrice, alura de variație a acestuia se va modifica față de situațiile azi întîlnite. În figura 10 *a* s-a desenat, la turație constantă, variația puterii efective în altitudine la diverse sarcini; așa cum s-a mai arătat, pe măsură ce altitudinea de funcționare crește se observă că sarcina motorului va crește pentru a da puterea necesitată pentru învingerea rezistențelor de înaintare (curba *1*), la înălțimea h_r atingîndu-se plina sarcină. În figura 10 *b* se prezintă modul de variere al avansului la declanșarea scînteii electrice în funcție de altitudine pentru diferite sarcini. Datorită scăderii valorii depresiunii de comandă cu înălțimea, ca urmare a deschiderii obturatorului carburatorului, avansul se va micșora cu aceasta (curbele *2*), astfel că un dispozitiv automat va da, la încărcare constantă a motorului, variația avansului la declanșarea scînteii electrice după curba *3*. Constatările prezentate arată, în schimb, că valoarea avansului la declanșarea scînteii electrice trebuie să crească cu înălțimea (curbele *4*), astfel că în aceleași condiții dispozitivul de corecție al avansului la declanșarea scînteii electrice în funcție de înălțime va conduce la variația avansului după curba *5*. Se observă că în special la altitudini mari, există diferențe sensibile între valoarea avansului utilizat azi și cel recomandat de acest studiu. Folosirea avansului corectat în înălțime conduce la o evidentă îmbunătățire a performanțelor motorului, rezultatele de banc arătînd pentru 3 000 m o mărire a puterii motorului cu 9% și o scădere a consumului specific de combus-

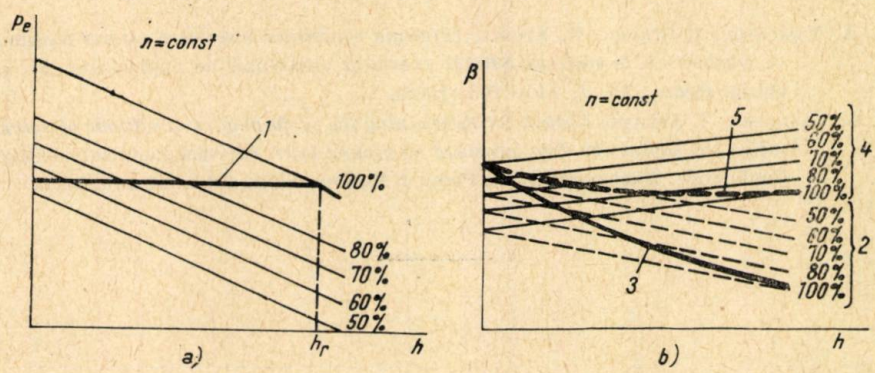


Fig. 10. — Variația puterii P_e cu altitudinea h la turație constantă, încărcarea motorului fiind constantă (*a*); variația avansului β la declanșarea scînteii electrice cu înălțimea h (*c*).

tibil cu 12%. În plus, măsurătorile au arătat o importantă reducere a oxidului de carbon și a concentrației de hidrocarburi nearse din gazele de ardere, cantități de compuși poluanți cu tendință de creștere în înălțime datorită scăderii temperaturii maxime a ciclului. Fără a avea date experimentale, se poate totuși bănui că restabilirea duratei normale

de desfăşurare a procesului de ardere va influenţa favorabil şi durabilitatea motorului, deoarece uzurile la nivelul segmenţilor, solicitarea termică a supapelor şi vicierea uleiului vor fi mai reduse dacă s-a reuşit să se micşoreze durata procesului de degajare a căldurii.

4. CONCLUZII

Prezenta comunicare arată :

a) pentru a restabili durata corectă a procesului de dezvoltare a căldurii este necesară mărirea avansului la declanşarea scînteii electrice în funcţie de altitudine pînă la valoarea sa optimă pentru fiecare caz în parte ;

b) pentru a se executa această comandă este necesar un dispozitiv automat ;

c) dispozitivul automat de comandare a variaţiei avansului cu altitudinea are şi rolul de a combate tendinţa manifestată de dispozitivele existente pe distribuitoarele de scîntei electrice care tind să scadă valoarea avansului la declanşarea scînteii electrice cu altitudinea ;

d) corectarea avansului la declanşarea scînteii electrice cu altitudinea îmbunătăţeşte performanţele motorului, contribuie la scăderea tendinţei la uzură şi diminuează cantitatea produşilor poluanţi din gazele de ardere.

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. Vasilescu, I. Ştefan, N. Stoica, *Influenţa condiţiilor exterioare asupra consumului de combustibil la motorul SR-211* (variaţia altitudinii de exploatare), St. cerc. energ. electr., **16**, *1*, 149—163 (1966).

2. C. A. Vasilescu, I. Ştefan, *Method for determining the performances at altitude of spark ignition car engines by data measured on ground level*, Internal Combustion Engines Conference, Bucharest, 1967, Paper I-28, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.

EXPRESII GENERALE ALE POTENȚIALULUI VECTOR PENTRU CÎMPURILE MAGNETICE CVASISTAȚIONARE CU SIMETRIE AXIALĂ

DE

I. R. CIRIC

517.9 : 621.31

În ecuația vectorială de tip Helmholtz satisfăcută de potențialul vector al cîmpului magnetic cvasistaționar cu simetrie axială din interiorul conductoarelor în regim permanent sinusoidal, variabilele se separă în aceleași condiții ca în ecuația scalară Helmholtz, prin urmare în următoarele sisteme de coordonate curbilinii ortogonale de rotație : cilindrice, sferice, ale sferoidului alungit, ale sferoidului turtit şi parabolice. Ca şi în cazul ecuației scalare Laplace, prin efectuarea unor transformări de funcție corespunzătoare, în ecuația vectorială de tip Laplace satisfăcută de potențialul vector din exteriorul conductoarelor variabilele se pot separa, în plus față de cazul ecuației de tip Helmholtz, atît în coordonate toroidale, cît şi în coordonate bisferice.

În lucrare se obțin expresii generale ale potențialului vector pentru interiorul conductoarelor şi pentru exteriorul lor în principalele sisteme de coordonate curbilinii ortogonale de rotație.

1. INTRODUCERE

În numeroase probleme de curenți turbionari (încălzire prin inducție, ecranare electromagnetică, levitație electromagnetică), de efect pelicular, de efect de proximitate etc., este necesar să se determine cîmpul magnetic cvasistaționar [1] în prezența unor conductoare masive imobile, întregul sistem prezentînd simetrie de rotație în raport cu o axă (*simetrie axială*).

Pentru determinarea cîmpului magnetic cvasistaționar al unor astfel de sisteme, trebuie să se țină seama de următoarele particularități ale acestora :

— suprafețele de discontinuitate ale cîmpului din exteriorul şi din interiorul conductoarelor sînt, ca şi suprafețele conductoarelor înseşi, suprafețe de rotație în raport cu o axă comună;

— conductoarele şi mediul din afara conductoarelor sînt constituite din materiale liniare, izotrope şi omogene pe porţiuni din punct de vedere magnetic şi electric, fără magnetizaţie permanentă, dielectricul din exteriorul conductoarelor fiind perfect izolant;

— cîmpul magnetic este un *cîmp magnetic cu simetrie axială* [2], avînd liniile de cîmp conţinute în planele determinate de axa de simetrie a sistemului considerat, spectrul cîmpului magnetic fiind acelaşi în oricare dintre aceste plane.

Proprietăţile cîmpului magnetic cvasistaţionar cu simetrie axială atît pentru regimul permanent sinusoidal, cît şi pentru regimul tranzitoriu sînt analizate în lucrarea [2], în care se stabilesc şi condiţiile de determinare univocă a soluţiilor ecuaţiilor cîmpului.

În lucrarea de faţă se consideră numai regimul permanent sinusoidal al cîmpului, regim care interesează în mod deosebit în aplicaţiile practice.

2. ECUAŢIILE CÎMPULUI MAGNETIC CVASISTAŢIONAR CU SIMETRIE AXIALĂ

Ecuaţiile cîmpului magnetic cvasistaţionar în medii liniare, izotrope şi omogene cu permeabilitatea μ şi conductivitatea σ se scriu în regim permanent sinusoidal de pulsaţie ω sub forma

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu \underline{\boldsymbol{H}} \quad (j \equiv \sqrt{-1}), \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\mu \underline{\boldsymbol{H}}) = 0, \tag{3}$$

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \sigma \underline{\boldsymbol{E}} \text{ (în dielectric } \sigma = 0), \tag{4}$$

în care $\underline{\boldsymbol{H}}$ şi $\underline{\boldsymbol{E}}$ sînt intensităţile cîmpului magnetic şi, respectiv, electric, $\underline{\boldsymbol{J}}$ este densitatea curentului electric de conducţie, iar notaţia cu bară dedesubt simbolizează reprezentarea în complex a mărimilor respective în regimul permanent sinusoidal considerat [1] ($\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\, e^{j\omega t} \underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\}$ etc., $\boldsymbol{r}$ fiind vectorul de poziţie al punctului curent din cîmp, iar t timpul).

Determinarea cîmpului se poate face comod cu ajutorul potenţialelor electrodinamice (reprezentate în complex), care se introduc ţinînd seama de ecuaţiile (3) şi (2) prin relaţiile

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{A}}, \tag{5}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}} = -\operatorname{grad} \underline{V} - j\omega \underline{\boldsymbol{A}}, \tag{6}$$

unde $\underline{\boldsymbol{A}}$ este *potenţialul magnetic vector*, iar $\underline{V}$ *potenţialul electric scalar*.

Cîmpul magnetic cu simetrie axială $\left(\underline{H}_\varphi \equiv 0, \ \frac{\partial \underline{\boldsymbol{H}}}{\partial \varphi} \equiv 0\right)$ se poate scrie sub forma

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{u}_z \underline{H}_z(z, r) + \boldsymbol{u}_r \underline{H}_r(z, r), \tag{7}$$

în care r, φ, z sînt coordonatele cilindrice circulare ale unui punct curent (fig. 1), drept axă Oz fiind aleasă tocmai axa de simetrie a sistemului, iar $\boldsymbol{u}_z$ și $\boldsymbol{u}_r$ sînt versorii orientați în sensul de creștere al coordonatelor z, respectiv r. Fără a particulariza acest cîmp magnetic, se poate alege un potențial vector strict tangențial ($\underline{A}_z = 0$, $\underline{A}_r = 0$), independent de coordonata $\varphi \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{A}}}{\partial \varphi} = 0\right)$ și deci strict solenoidal,

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{u}_\varphi \underline{A}(z, r), \quad \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{A}}{\partial \varphi} = 0, \tag{8}$$

$\boldsymbol{u}_\varphi$ fiind versorul orientat în sensul de creștere al coordonatei φ. Relația (5) se poate scrie deci sub forma

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \operatorname{grad}(r\underline{A}) \times \boldsymbol{u}_\varphi \begin{cases} \underline{H}_z = \dfrac{1}{\mu} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (r\underline{A})}{\partial r}, \\ \underline{H}_r = -\dfrac{1}{\mu} \dfrac{\partial \underline{A}}{\partial z}, \end{cases} \tag{9}$$

care asigură verificarea ecuației (3) fără să introducă vreo restricție asupra cîmpului (7).

Vectorul $\underline{\boldsymbol{H}}$ satisface în interiorul conductoarelor ecuația vectorială de tip Helmholtz

$$\Delta \underline{\boldsymbol{H}} - \gamma^2 \underline{\boldsymbol{H}} = 0, \tag{10}$$

iar în exteriorul conductoarelor ecuația vectorială de tip Laplace

$$\Delta \underline{\boldsymbol{H}} = 0, \tag{11}$$

unde s-a notat

$$\gamma \equiv (j\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + j) = \frac{1}{\delta}(1 + j), \tag{12}$$

δ fiind adîncimea echivalentă de pătrundere a cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor [3].

Ţinînd seama de relaţiile (5), (6) şi (8), rezultă că potenţialele electrodinamice satisfac ecuaţiile

$$\Delta \underline{\boldsymbol{A}} - \gamma^2 \underline{\boldsymbol{A}} = \mu\sigma \operatorname{grad} \underline{V}, \tag{13}$$

$$\Delta \underline{V} = 0 \tag{14}$$

în interiorul conductoarelor şi

$$\Delta \underline{\boldsymbol{A}} = 0, \tag{15}$$

$$\Delta \underline{V} = 0 \tag{16}$$

în dielecticul din exteriorul conductoarelor (presupus neîncărcat cu sarcini electrice).

Pentru cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al sistemelor cu simetrie axială [2], potenţialul electric scalar $\underline{V}$ este constant în interiorul conductoarelor nealimentate cu curent din exterior (*pasive*) şi depinde liniar de coordonata unghiulară φ în interiorul conductoarelor alimentate cu curent din exterior (*active*). În acest caz, ecuaţiile (10), (11), (13) şi (15) se scriu în coordonate cilindrice circulare corespunzător sub forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r}\right) - \gamma^2 \underline{H}_r = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z}\right)\right] - \gamma^2 \underline{H}_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r}\right) = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial z}\right)\right] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A})\right] + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial z^2} - \gamma^2 \underline{A} = \begin{cases} \mu\sigma \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}\underline{V}}{\mathrm{d}\varphi} & \text{în conductoarele active,} \quad (13') \\ 0 & \text{în conductoarele pasive,} \quad (13'') \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A})\right] + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial z^2} = 0. \tag{15'}$$

Ecuaţiile satisfăcute de vectorul $\underline{\boldsymbol{H}}$ sînt, în general, mai complicate şi se utilizează mai rar. Cele mai utilizate pentru determinarea cîmpurilor magnetice cvasistaţionare cu simetrie axială sînt ecuaţiile satisfăcute de potenţialul vector ((13'') şi (15')).

Odată cunoscute soluțiile generale ale ecuațiilor satisfăcute de potențialul vector, determinarea completă a acestuia se face impunînd condițiile de trecere pe suprafețele de discontinuitate ale cîmpului. Pe suprafețele conductoarelor *reale* [2], aceste condiții se scriu sub forma

$$\frac{1}{\mu_{ex}} \frac{\partial}{\partial n_\nu} (r\underline{A}_{ex}) - \frac{1}{\mu_{in}} \frac{\partial}{\partial n_\nu} (r\underline{A}_{in}) = 0, \tag{17}$$

$$\underline{A}_{ex} - \underline{A}_{in} = 0, \tag{18}$$

în care $\frac{\partial}{\partial n_\nu}$ simbolizează derivata după normala exterioară pe suprafețele conductoarelor, iar indicii *ex* și *in* se referă la valorile din exteriorul și, respectiv, din interiorul conductoarelor. Pe suprafețele conductoarelor *perfecte* [2], condiția (17) se transcrie sub forma

$$-\frac{1}{r} \frac{1}{\mu_{ex}} \frac{\partial}{\partial n_\nu} (r\underline{A}_{ex}) = \underline{J}_s, \tag{19}$$

care servește pentru determinarea densității $\underline{J}_s$ a pînzelor de curent de pe suprafețele acestor conductoare; pentru conductoarele perfecte înțepate de către axa de simetrie a sistemului, condiția de trecere (18) devine

$$\underline{A}_{ex} = \underline{A}_{in} = 0. \tag{20}$$

Condițiile de trecere de tipul (17) exprimă saltul componentelor tangențiale ale intensității cîmpului magnetic, iar condițiile de trecere de tipul (18) exprimă conservarea componentelor normale ale inducției magnetice.

Avînd potențialul vector, se poate obține imediat intensitatea cîmpului magnetic în interiorul și în exteriorul conductoarelor (cu relațiile (9)), densitatea curentului electric în coductoare (cu relația (1)) și intensitatea cîmpului electric în interiorul conductoarelor (cu relația (4)).

Observații. a) Soluția generală a ecuației neomogene (13′) se poate obține, în principiu, adăugînd soluția particulară $\underline{A}_p = \frac{\underline{K}_p}{r}$ la soluția generală a ecuației omogene, constanta $\underline{K}_p$ urmînd a fi determinată împreună cu celelalte constante de integrare din condițiile problemei considerate.

b) Soluțiile ecuației (15′) (de tip Laplace) se pot obține de multe ori direct din soluțiile ecuației omogene (13″) (de tip Helmholtz), făcînd în acestea din urmă $\gamma = 0$.

3. SEPARAREA VARIABILELOR ÎN ECUAȚIILE POTENȚIALULUI VECTOR

O metodă exactă pentru integrarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale liniare cu coeficienți constanți este metoda separării variabilelor. O condiție necesară, dar nu și suficientă pentru a putea aplica

această metodă este ca toate suprafețele de discontinuitate ale cîmpului (de exemplu suprafețele conductoarelor situate în cîmp) să fie suprafețe de coordonate într-un sistem oarecare de coordonate curbilinii ortogonale atît în privința domeniului dintr-o parte, cît și în privința domeniului din cealaltă parte a fiecărei suprafețe, astfel încît să se poată pune condițiile de trecere corespunzătoare (de tipul condițiilor (17) și (18)).

Pentru a putea utiliza metoda separării variabilelor mai este necesar ca sistemul de coordonate curbilinii ortogonale în care se lucrează să satisfacă anumite condiții. În cele ce urmează se pun în evidență în mod direct condițiile în care se pot separa variabilele în ecuațiile potențialului vector (13'') și (15') referitoare la sistemele cu simetrie axială.

Transformarea generală cu ajutorul căreia se poate exprima legătura dintre sistemele de coordonate curbilinii ortogonale de rotație și sistemul de coordonate cilindrice circulare este [4]

$$z + jr = f(\alpha + j\beta), \tag{21}$$

în care α și β sînt parametri ai unor familii de suprafețe de rotație (a căror axă este tocmai axa Oz), ortogonale între ele și față de semiplanele $\varphi = \text{const.}$

În sistemul de coordonate α, β, φ, pătratul elementului de arc al unei curbe este

$$(\delta s)^2 = f'(\alpha + j\beta) f'(\alpha - j\beta) [(d\alpha)^2 + (d\beta)^2] + r^2 (d\varphi)^2, \tag{22}$$

iar parametrii lui Lamé corespunzători sînt

$$h_\alpha^2 = h_\beta^2 = f'(\alpha + j\beta) f'(\alpha - j\beta) = |f'|^2, \; h_\varphi^2 = r^2. \tag{23}$$

Ecuația (13'') se transcrie în coordonatele α, β, φ sub forma

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\varphi \underline{A}) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\varphi \underline{A}) \right] - \gamma^2 \underline{A} = 0. \right. \tag{24}$$

Metoda separării variabilelor pentru integrarea ecuației (24) constă în căutarea unor soluții avînd forma produsului $F(\alpha) G(\beta)$ dintre două funcții de cîte o singură variabilă independentă. Înlocuind acest produs în (24) și împărțind cu $F(\alpha) G(\beta)$ (se caută soluții diferite de zero), se obține

$$\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[F' + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \alpha} F \right] + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[G' + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \beta} G \right] - \gamma^2 h_\alpha h_\beta = 0. \tag{25}$$

Rezultă că, pentru ca variabilele α și β să poată fi separate în ecuația potențialului vector scrisă sub forma (24), funcția $f(\alpha + j\beta)$ trebuie să fie astfel încît să fie îndeplinite următoarele *condiții* :

— expresiile $\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial \alpha}$ și $\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial \beta}$ să fie funcții numai de cîte o singură variabilă, α și, respectiv, β :

$$\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial \alpha} = F_1(\alpha), \tag{26}$$

$$\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial \beta} = G_1(\beta), \tag{27}$$

condiții echivalente cu condiția ca h_φ să fie produsul unei funcții numai de α printr-o funcție numai de β ;

— produsul $h_\alpha h_\beta$ să fie sau funcție numai de α, sau funcție numai de β, sau suma a două funcții una numai de α și cealaltă numai de β :

$$h_\alpha h_\beta = F_2(\alpha) + G_2(\beta). \tag{28}$$

În aceste condiții, din ecuația (25) rezultă că

$$F'' + F_1 F' + F_1' F - \gamma^2 F_2 F = \pm \lambda^2 F \tag{29}$$

și simultan

$$G'' + G_1 G' + G_1' G - \gamma^2 G_2 G = \mp \lambda^2 G, \tag{30}$$

în care λ^2 este o constantă reală și pozitivă deocamdată nedeterminată. Ecuațiile diferențiale ordinare (29) și (30) se scriu dezvoltat sub forma

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\alpha^2} + F_1(\alpha)\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} + [F_1'(\alpha) - \gamma^2 F_2(\alpha)]F = \pm \lambda^2 F, \qquad (29') \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\beta^2} + G_1(\beta)\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\beta} + [G_1'(\beta) - \gamma^2 G_2(\beta)]G = \mp \lambda^2 G. \qquad (30') \end{array}\right.$$

Prin urmare, dacă funcția $f(\alpha + \mathrm{j}\beta)$ (21) satisface tuturor condițiilor enumerate mai sus (26)—(28), ecuația (24) a potențialului vector din interiorul conductoarelor se poate trata cu metoda separării variabilelor.

Pentru ca separarea variabilelor să se poată face în ecuația mai simplă (15′) a potențialului vector din exteriorul conductoarelor, ecuație care se scrie cu ajutorul coordonatelor α, β, φ sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_\varphi \underline{A})\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial}{\partial \beta}(h_\varphi \underline{A})\right] = 0, \tag{31}$$

funcția $f(\alpha + \mathrm{j}\beta)$ trebuie să fie astfel încît să fie satisfăcute doar condițiile (26)—(27), nemaifiind necesară satisfacerea condiției suplimentare (28).

Mulțimea valorilor λ și a constantelor de integrare corespunzătoare soluțiilor ecuațiilor (29′)—(30′), cu ajutorul cărora se construiește soluția generală $\underline{A}(\alpha, \beta) = \int_{\lambda} F_\lambda(\alpha) G_\lambda(\beta)$ a ecuației (24), se determină din condițiile (de frontieră și de trecere, de regularitate) care se impun în fiecare problemă în parte.

4. SOLUȚII GENERALE ALE ECUAȚIILOR POTENȚIALULUI VECTOR

În cele ce urmează se consideră diferite domenii de formă particulară, mărginite de suprafețe de coordonate corespunzătoare principalelor sisteme de coordonate curbilinii ortogonale de rotație, și se stabilesc expresiile generale ale potențialului vector din interiorul conductoarelor și din exteriorul acestora.

4.1. *Coordonatele cilindrice circulare* se utilizează *în cazul domeniilor mărginite de suprafețele unor cilindri circulari drepți coaxiali sau de suprafețele plane perpendiculare pe axa de simetrie.* Funcția $f(\alpha + j\beta)$ este banală în acest caz :

$$z + jr = z + jr, \tag{32}$$

coordonatele α, β, φ fiind chiar coordonatele cilindrice z, r, φ (fig. 1). Ecuația potențialului vector în interiorul conductoarelor pasive este (13″), iar în exteriorul conductoarelor (15′). Parametrii lui Lamé sînt

$$h_\alpha = h_\beta = 1, \quad h_\varphi = r; \tag{33}$$

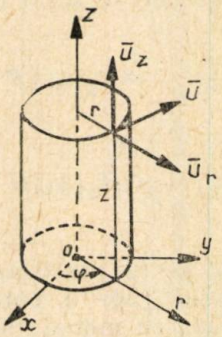


Fig. 1. — Sistemul de coordonate cilindrice circulare.

condițiile (26)—(28) fiind satisfăcute, în ambele ecuații variabilele se separă. Dacă se consideră, de exemplu, $F_2 = 0$, ecuațiile (29) și (30) devin, respectiv,

$$F''(z) \mp \lambda^2 F(z) = 0, \tag{34}$$

$$G''(r) + \frac{1}{r} G'(r) + \left(\pm\lambda^2 - \gamma^2 - \frac{1}{r^2} \right) G(r) = 0. \tag{35}$$

Observînd că ecuația (35) este de tip Bessel, soluțiile ecuațiilor (34) și (35) se vor scrie sub forma

$$\begin{cases} F_\lambda(z) = C_\lambda e^{\lambda z} + D_\lambda e^{-\lambda z}, & (36) \\ G_\lambda(r) = M_\lambda J_1(r\sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}) + N_\lambda Y_1(r\sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}), & (37) \end{cases}$$

pentru semnul superior al lui λ^2, și sub forma

$$\begin{cases} F_\lambda(z) = C_\lambda \cos \lambda z + D_\lambda \sin \lambda z, & (38) \\ G_\lambda(r) = M_\lambda I_1(r\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}) + N_\lambda K_1(r\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}), & (39) \end{cases}$$

pentru semnul inferior al lui λ^2; J_1 și Y_1 sînt *funcțiile Bessel* de speța întîi, respectiv a doua, de ordinul întîi, iar I_1 și K_1 *funcțiile Bessel modificate* de speța întîi, respectiv a doua, de ordinul întîi.

Soluțiile corespunzătoare ecuației (15′) se obțin din (36)—(39), făcînd $\gamma = 0$.

Pentru domeniul care conține axa de simetrie $r = 0$, constantele N_λ sînt nule, deoarece funcțiile Bessel de speța a doua Y_1 și K_1 sînt infinit de mari pentru argumente zero. Pentru domenii extinse pînă la infinit, constanta M_λ din (39) este nulă, funcția Bessel modificată de speța întîi I_1 tinzînd spre infinit atunci cînd argumentul acesteia tinde spre infinit.

4.2. *Coordonatele sferice* se folosesc *pentru domenii mărginite de suprafețele unor sfere concentrice.* Funcția (21) este în cazul acesta

$$z + jr = e^{\ln R + j\theta}, \qquad (40)$$

coordonatele α, β, φ fiind legate de coordonatele sferice R, θ, φ (fig. 2) prin relațiile

$$\alpha \equiv \ln R, \quad \beta \equiv \theta, \quad \varphi \equiv \varphi. \qquad (41)$$

Parametrii lui Lamé se scriu sub forma

$$h_\alpha = h_\beta = R, \quad h_\varphi = R \sin \theta. \qquad (42)$$

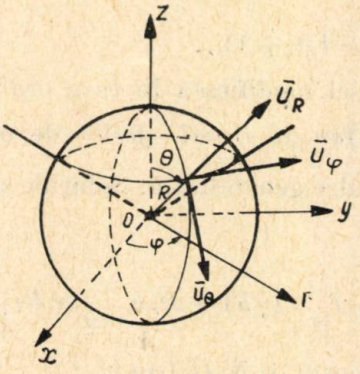


Fig. 2. — Sistemul de coordonate sferice.

Condiţiile (26)—(28) sînt satisfăcute, deci se pot separa variabilele în ambele ecuaţii ale potenţialului vector ((24) şi (31)). Se observă că

$$F_1 = 1,\ G_1 = \operatorname{ctg}\theta;\quad F_2 = R^2,\ G_2 = 0. \tag{43}$$

Ecuaţia potenţialului vector în interiorul conductoarelor (24) se scrie sub forma

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial \underline{A}}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\underline{A})\right] - \gamma^2\underline{A} = 0, \tag{44}$$

iar ecuaţiile (29′) şi (30′) devin

$$\left[\begin{array}{l} R^2\dfrac{\mathrm{d}^2F^{(R)}}{\mathrm{d}R^2} + 2R\dfrac{\mathrm{d}F^{(R)}}{\mathrm{d}R} - \gamma^2R^2F^{(R)} = \pm\lambda^2F^{(R)}, \qquad (45)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\theta} - \dfrac{1}{\sin^2\theta}G = \mp\lambda^2G, \qquad (46)\end{array}\right.$$

în care s-a introdus notaţia $F^{(R)}(R) \equiv F(\ln R)$. Efectuînd schimbările de funcţie şi de variabilă

$$F^{(R)}R^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{F},\ \cos\theta = w \tag{47}$$

şi alegînd semnul superior al lui λ^2, ecuaţiile (45)—(46) devin

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2\mathfrak{F}}{\mathrm{d}R^2} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{F}}{\mathrm{d}R} - \left[\gamma^2 + \dfrac{\lambda^2+\frac{1}{4}}{R^2}\right]\mathfrak{F} = 0, \qquad (45')\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[(1-u^2)\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u}\right] + \left(\lambda^2 - \dfrac{1}{1-u^2}\right)G = 0. \qquad (46')\end{array}\right.$$

Se observă că pentru

$$\lambda^2 = l(l+1), \tag{48}$$

ecuaţia (45′) este o ecuaţie Bessel modificată în care ordinul funcţiilor Bessel modificate este $\left(l+\frac{1}{2}\right)$ (*funcţii Bessel sferice* de ordinul l), iar ecuaţia (46′) este o ecuaţie Legendre generalizată. Soluţiile acestor ecuaţii se scriu deci sub forma

$$\left[\begin{array}{l} F_l^{(R)}(R) = R^{-\frac{1}{2}}\left[C_l\,I_{l+\frac{1}{2}}(\gamma R) + D_l K_{l+\frac{1}{2}}(\gamma R)\right], \qquad (49)\\[2ex] G_l(\theta) = M_l P_l^1(\cos\theta) + N_l Q_l^1(\cos\theta), \qquad (50)\end{array}\right.$$

în care P_l^1 și Q_l^1 sînt *funcțiile Legendre asociate* de speța întîi, respectiv a doua, de indici l și 1.

Pentru exteriorul conductoarelor ($\gamma = 0$), ecuația (45′) devine o ecuație de tip Euler:

$$R^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{F}}{\mathrm{d}R^2} + R \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}R} - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \mathcal{F} = 0, \tag{51}$$

rezultînd în locul soluției (49) soluția

$$F_l^{(R)}(R) = C_l R^l + D_l R^{-(l+1)}. \tag{52}$$

Avînd în vedere că domeniile conțin axa de simetrie $\theta = 0$, $\theta = \pi$, rezultă că $N_l = 0$ și că l trebuie să fie un număr întreg pozitiv ($l \equiv n$). Pentru domeniul care conține originea sistemului de axe de coordonate ($R = 0$), $D_l = 0$, iar pentru domeniul care se extinde pînă la infinit $C_l = 0$.

Potențialul vector se scrie deci atît pentru interiorul conductoarelor, cît și pentru exteriorul acestora sub forma

$$\underline{A}(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(R)}(R)\, P_n^1(\cos\theta). \tag{53}$$

4.3. *Coordonatele sferice* R, θ, φ se utilizează și *în cazul domeniilor mărginite de pînzele unor suprafețe conice coaxiale* $\theta = const$ ($\theta \neq \pi$) (fig. 2). În acest caz nu mai există nici un motiv pentru a se considera că l (48) este un număr întreg pozitiv, deoarece domeniile (cu excepția unuia singur) nu conțin semiaxa $\theta = \pi$ și deci funcția $P_l^1(\cos\theta)$ este mărginită oricare ar fi l.

Alegînd de data aceasta constanta de separare (întotdeauna reală) de forma

$$-\lambda^2 = l(l+1) < 0, \tag{54}$$

rezultă că

$$l = \mathrm{j}p - \frac{1}{2}, \text{ cu } p \text{ real.} \tag{55}$$

Soluțiile ecuațiilor (45)—(46) au forma

$$\left[\begin{array}{l} F_p^{(R)}(R) = R^{-\frac{1}{2}} \left[C_p I_{\mathrm{j}p}(\gamma R) + D_p K_{\mathrm{j}p}(\gamma R)\right], \qquad (56) \\ G_p(\theta) = M_p P^1_{\mathrm{j}p-\frac{1}{2}}(\pm\cos\theta) + N_p Q^1_{\mathrm{j}p-\frac{1}{2}}(\pm\cos\theta), \qquad (57) \end{array}\right.$$

în care intervin funcțiile Bessel modificate de ordin imaginar și de argument complex, precum și funcțiile Legendre asociate de indici inferiori $\mathrm{j}p - \frac{1}{2}$ (*funcțiile conice*).

Pentru domeniile (conductoare sau neconductoare) care conţin una din semiaxele $\theta = 0$, $\theta = \pi$, trebuie ca $N_p = 0$. Funcţiile $P^1_{jp-\frac{1}{2}}(+\cos\theta)$ se utilizează în domeniul care conţine semiaxa $\theta = 0$, iar funcţiile $P^1_{jp-\frac{1}{2}}(-\cos\theta)$ se utilizează în domeniul care conţine semiaxa $\theta = \pi$ (deoarece $P^1_{jp-\frac{1}{2}}(-1) = \infty$ [4]). Aceste funcţii nu formează un sistem de funcţii ortogonale.

Pentru exteriorul conductoarelor ($\gamma = 0$), ecuaţia în R admite soluţii de tipul

$$F_p^{(R)}(R) = C_p R^{jp-\frac{1}{2}} + D_p R^{-\left(jp+\frac{1}{2}\right)}, \tag{58}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$F_p^{(R)}(R) = R^{-\frac{1}{2}} [C'_p \cos(p \ln R) + D'_p \sin(p \ln R)]. \tag{58'}$$

La rezolvarea problemelor trebuie studiată cu atenţie vecinătatea originii sistemului de axe de coordonate, $R = 0$.

Pentru punerea condiţiilor de trecere pe suprafeţele de separaţie $\theta = \text{const}$, este necesar să se dezvolte funcţiile Bessel modificate de ordin imaginar şi de argument complex, $I_{jp}(\gamma R)$ şi $K_{jp}(\gamma R)$, după sistemul complet de funcţii ortogonale $\begin{Bmatrix}\cos(p\ln R)\\ \sin(p\ln R)\end{Bmatrix}$

4.4. *Coordonatele toroidale* α, β, φ [5], [6] se introduc cu ajutorul funcţiei

$$z + jr = jc \operatorname{cth} \frac{\alpha + j\beta}{2} \tag{59}$$

şi sînt legate de coordonatele cilindrice z, r, φ prin relaţiile

$$z = \frac{c \sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad r = \frac{c \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{60}$$

Parametrii lui Lamé sînt

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_\varphi = \frac{c \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{61}$$

Se constată că condiţiile (26)—(28) *nu* sînt satisfăcute şi, prin urmare, *nu* se poate efectua separarea variabilelor în ecuaţiile scrise sub formele care decurg din (24) (pentru interiorul conductoarelor) şi din (31) (pentru exteriorul conductoarelor).

Dacă însă se efectuează schimbarea de funcție

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{\frac{1}{2}}\, \underline{U}(\alpha, \beta), \tag{62}$$

ecuația satisfăcută de funcția $\underline{U}(\alpha, \beta)$ va fi

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth}\alpha \frac{\partial \underline{U}}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha}\right)\underline{U} = \begin{cases} \dfrac{\gamma^2 c^2 \underline{U}}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2} \\ \text{în conductoare,} \\ 0 \text{ în afara conductoarelor.} \end{cases} \tag{63}$$

Se observă că, după transformarea (62), în ecuația corespunzătoare exteriorului conductoarelor (de tip Laplace) variabilele *se separă*; chiar

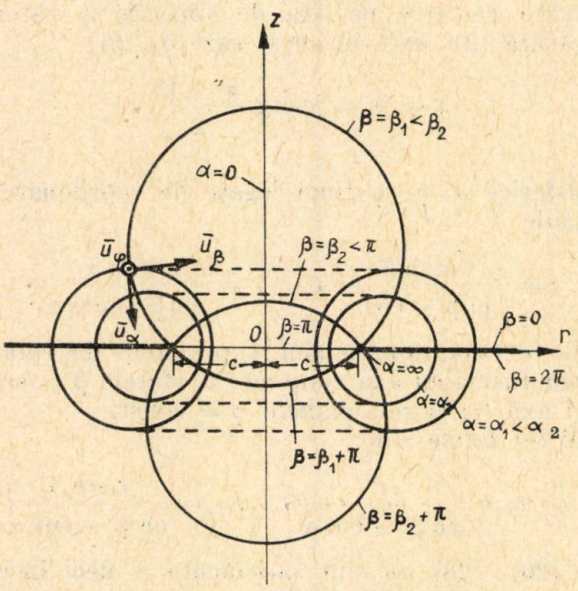


Fig. 3. — Sistemul de coordonate toroidale.

în această situație însă, în ecuația corespunzătoare interiorului conductoarelor (de tip Helmholtz) variabilele *nu se separă*.

Expresia generală a potențialului vector în mediul neconductor ($\gamma = 0$) este *pentru domeniile mărginite de toruri* $\alpha = const$ (fig. 3)

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{\frac{1}{2}} \begin{matrix} P^1_{n-\frac{1}{2}} \\ Q^1_{n-\frac{1}{2}} \end{matrix} \operatorname{ch}\alpha \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\beta, \tag{64}$$

în care n este un număr întreg datorită periodicității după variabila β; în soluția (64) apar funcțiile Legendre asociate de indici $n - \frac{1}{2}$ și 1 și de argument ch α (*funcțiile toroidale* sau *inelare*). Pentru domeniul care conține cercul $\alpha = +\infty$, în soluție nu intervin funcțiile $P^1_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch}\,\alpha)$, iar pentru domeniul care conține axa de simetrie $\alpha = 0$ în soluție nu intervin funcțiile $Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch}\,\alpha)$.

La studiul sistemelor care conțin domenii mărginite de toruri trebuie să se țină seama că aceste domenii nu sînt întotdeauna simplu conexe.

Cu ajutorul coordonatelor toroidale se poate determina și cîmpul magnetic *în domeniile (neconductoare) mărginite la exterior de sfere* $\beta = const$ *care se intersectează* (fig. 3).

4.5. *Coordonatele bisferice* (*coordonatele bipolare în spațiu*) se pot utiliza *în cazul domeniilor mărginite de suprafețele unor sfere care nu se intersectează*, avînd centrele pe axa de simetrie a sistemului (fig. 4). Funcția de legătură (21) este în acest caz [5], [6]

$$z + \mathrm{j}r = \mathrm{j}c\,\text{ctg}\,\frac{\alpha + \mathrm{j}\beta}{2}, \tag{65}$$

coordonatele bisferice α, β, φ fiind legate de coordonatele cilindrice z, r, φ prin relațiile

$$z = \frac{c\,\text{sh}\,\beta}{\text{ch}\beta - \cos\alpha}, \qquad r = \frac{c\sin\alpha}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}. \tag{66}$$

Suprafețele de coordonate sînt suprafețele de rotație $\alpha = \text{const}$, avînd forma unor fusuri cu axa comună Oz, sferele $\beta = \text{const}$ avînd centrele pe aceeași axă Oz și semiplanele $\varphi = \text{const}$.

Parametrii lui Lamé sînt

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}, \qquad h_\varphi = \frac{c\sin\alpha}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}. \tag{67}$$

Condițiile (26)—(28) *nu* sînt satisfăcute și deci în ecuațiile scrise sub formele care decurg din (24) și (31) *nu* se pot separa variabilele. Dacă însă se face schimbarea de funcție

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = (\text{ch}\,\beta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}\,\underline{U}(\alpha, \beta), \tag{68}$$

ecuația satisfăcută de funcția $\underline{U}(\alpha, \beta)$ este

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial\beta^2} + \text{ctg}\alpha\,\frac{\partial \underline{U}}{\partial\alpha} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\underline{U} = \begin{cases} \dfrac{\gamma^2 c^2 \underline{U}}{(\text{ch}\beta - \cos\alpha)^2} \text{ în conductoare,} \\ 0 \text{ în afara conductoarelor.} \end{cases} \tag{69}$$

Se observă, ca și în cazul coordonatelor toroidale, că în urma transformării (68) ecuația corespunzătoare exteriorului conductoarelor (de tip Laplace) *își separă* variabilele, în timp ce ecuația corespunzătoare interiorului conductoarelor (de tip Helmholtz) rămîne cu variabilele *neseparabile.*

Pentru domenii mărginite de sferele (care nu se intersectează) $\beta = \text{const}$, soluția generală a ecuației potențialului vector din exteriorul conductoarelor se scrie sub forma

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = (\text{ch}\beta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta} P_n^1(\cos\alpha), \tag{70}$$

în care n este un număr întreg și pozitiv pentru ca $P_n^1(\cos\alpha)$ să fie mărginit pentru $\alpha = \pi$ (în punctele axei Oz cuprinse între polii $z = -c$ și $z = +c$). Pentru domeniul care conține polul $\beta = +\infty$, în soluție nu

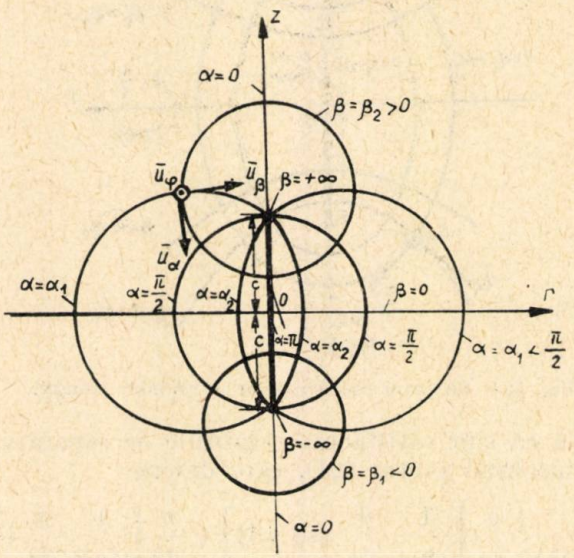


Fig. 4. — Sistemul de coordonate bisferice.

se folosesc exponențialele $e^{+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}$, iar pentru domeniul care conține polul $\beta = -\infty$ în soluție nu se folosesc exponențialele $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}$.

Cu ajutorul coordonatelor bisferice se poate studia cîmpul magnetic (din exteriorul conductoarelor) și *în cazul domeniilor mărginite de fusuri* $\alpha = \text{const}$.

4.6. *Coordonatele elipsoidului de rotație* (*sferoidului*) *alungit* α, β, φ sînt legate de coordonatele cilindrice z, r, φ prin relațiile [4], [5]

$$z + \text{j}r = c\,\text{ch}(\alpha + \text{j}\beta), \qquad \varphi \equiv \varphi, \tag{71}$$

$$z = c\,\text{ch}\,\alpha\cos\beta, \qquad r = c\,\text{sh}\,\alpha\sin\beta. \tag{72}$$

Suprafețele de coordonate sînt sferoizii alungiți confocali $\alpha = \text{const}$, $0 \leqslant \alpha < \infty$ (cu focarele în $z = \pm c$, $r = 0$), hiperboloizii de rotație confocali $\beta = \text{const}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ (avînd focare comune cu sferoizii $\alpha = \text{const}$) și semiplanele $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (fig. 5).

Parametrii lui Lamé sînt

$$h_\alpha = h_\beta = c\,(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}, \quad h_\varphi = c \operatorname{sh}\alpha \sin\beta. \tag{73}$$

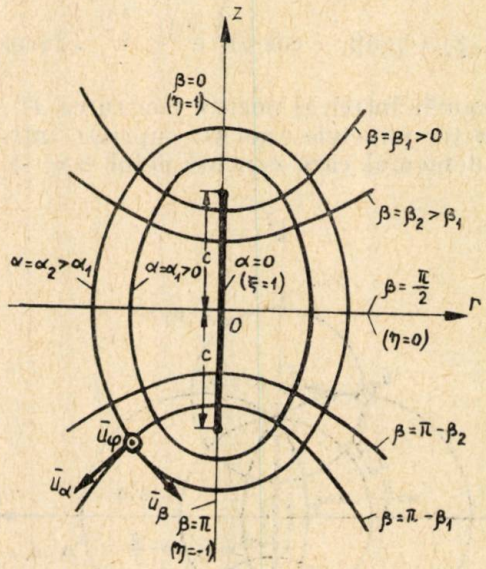


Fig. 5. — Sistemul coordonatelor sferoidului alungit.

Se constată că sînt satisfăcute condițiile de separare a variabilelor în ecuația potențialului vector (24), care devine

$$\frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{sh}\alpha\underline{A})\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(\sin\beta\underline{A})\right]\right\} - \\ - \gamma^2\underline{A} = 0. \tag{74}$$

Ecuațiile diferențiale ordinare (29′)—(30′) pentru semnul superior al lui λ^2 capătă acum forma

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\alpha^2} + \operatorname{cth}\alpha\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} - \left(\lambda^2 + \gamma^2c^2\operatorname{sh}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\right)F = 0, \tag{75}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\beta} + \left(\lambda^2 - \gamma^2c^2\sin^2\beta - \frac{1}{\sin^2\beta}\right)G = 0. \tag{76}$$

Dacă se utilizează (pentru simplificarea scrierii) coordonatele η, ξ, φ [7], legate de coordonatele α, β, φ prin relațiile

$$\xi = \operatorname{ch}\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \varphi \equiv \varphi, \tag{77}$$

cu parametrii lui Lamé corespunzători

$$h_\eta = c\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad h_\xi = c\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},\quad h_\varphi = c\,[(1-\eta^2)(\xi^2-1)]^{\frac{1}{2}}, \tag{78}$$

ecuațiile (74), (75) și (76) se transformă, respectiv, în

$$\frac{1}{c^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}[(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\underline{A}]+(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\underline{A}]\right\}-$$

$$-\gamma^2\underline{A}=0, \tag{74'}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\mathrm{d}F^{(\xi)}}{\mathrm{d}\xi}\right]-\left[C-h^2\xi^2+\frac{1}{\xi^2-1}\right]F^{(\xi)}=0, \tag{75'}\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}G^{(\eta)}}{\mathrm{d}\eta}\right]+\left[C-h^2\eta^2-\frac{1}{1-\eta^2}\right]G^{(\eta)}=0, \tag{76'}\right.$$

în care s-au făcut notațiile

$$\gamma^2c^2\equiv -h^2,\quad \lambda^2+h^2\equiv C. \tag{79}$$

Se observă că ecuațiile (75′) și (76′) au aceeași formă, în prima ecuație variabila fiind cuprinsă în intervalul $1\leqslant\xi<\infty$, iar în a doua în intervalul $-1\leqslant\eta\leqslant+1$. Tipul acesta de ecuații diferențiale ordinare a fost studiat mai mult pentru valori reale ale parametrului h [8], [7]. Soluțiile ecuațiilor (75′), (76′) se pot scrie [9] formal identic cu soluțiile cunoscute pentru ecuațiile cu valori reale ale parametrului h:

$$\left[F_l^{(\xi)}=C_l\,R_{1,l}^{(1)}(h,\xi)+D_l\,R_{1,l}^{(2)}(h,\xi), \tag{80}\right.$$

$$\left.G_l^{(\eta)}=M_l\,S_{1,l}^{(1)}(h,\eta)+N_l\,S_{1,l}^{(2)}(h,\eta), \tag{81}\right.$$

în care $R_{1,l}^{(1)}$ și $R_{1,l}^{(2)}$ sînt *funcțiile radiale* de speța întîi, respectiv a doua, *ale sferoidului alungit*, de indici 1 și l, iar $S_{1,l}^{(1)}$ și $S_{1,l}^{(2)}$ sînt *funcțiile unghiulare* de speța întîi, respectiv a doua, *ale sferoidului alungit*, de aceiași indici 1 și l. Funcțiile $S_{1,l}^{(1)}$ și $S_{1,l}^{(2)}$ sînt de fapt serii de funcții Legendre asociate de indice superior 1, iar funcțiile $R_{1,l}^{(1)}$ și $R_{1,l}^{(2)}$ sînt serii de funcții Bessel sferice în ai căror coeficienți apar ca factori distincți tocmai coeficienții din seriile $S_{1,l}^{(1)}$, respectiv $S_{1,l}^{(2)}$. Coeficienții acestor serii se pot obține prin rezolvarea unor ecuații de recurență, valorile proprii C rezultînd ca soluții ale unor ecuații transcendente care se scriu sub formă de fracții continue.

Deoarece pe axa de simetrie Oz ($\eta=\pm1$) funcțiile $S_{1,l}^{(2)}$ capătă valori infinit de mari, aceste funcțiuni nu se folosesc *în cazul domeniilor*

mărginite de suprafețe ale sferoizilor alungiți confocali $\xi = const$, expresia generală a potențialului vector din aceste domenii (conductoare) fiind

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_l [C_l R_{1,l}^{(1)}(h, \xi) + D_l R_{1,l}^{(2)}(h, \xi)] S_{1,l}^{(1)}(h, \eta). \tag{82}$$

Pentru domeniul care conține segmentul $\xi = 1$ (sferoidul degenerat de lungime $2c$), în soluție nu se folosesc funcțiile $R_{1,l}^{(2)}$ (care prezintă singularități în punctele cu $\xi = 1$), expresia potențialului vector fiind acum

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_l C_l R_{1,l}^{(1)}(h, \xi) S_{1,l}^{(1)}(h, \eta). \tag{83}$$

Pentru domeniul extins pînă la infinit — și uneori chiar în locul soluției (82) — se poate utiliza pentru potențialul vector expresia

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_l [C_l R_{1,l}^{(3)}(h, \xi) + D_l R_{1,l}^{(4)}(h, \xi)] S_{1,l}^{(1)}(h, \eta), \tag{84}$$

în care $R_{1,l}^{(3)}$ și $R_{1,l}^{(4)}$ sînt funcțiile radiale de speța a treia, respectiv a patra, ale sferoidului alungit, de indici 1 și l.

Pentru regiunile din exteriorul conductoarelor ($\gamma = 0$), ecuația satisfăcută de potențialul vector în sistemul de coordonate α, β, φ este

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\operatorname{sh}\alpha \underline{A})\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial \beta}(\sin\beta \underline{A})\right] = 0, \tag{85}$$

iar în sistemul de coordonate η, ξ, φ (vezi (77))

$$\frac{1}{c^2(\xi^2 - \eta^2)}\left\{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\underline{A}] + (\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\underline{A}]\right\} = 0. \tag{85'}$$

Ecuațiile diferențiale ordinare satisfăcute de funcțiile F și G în coordonatele ξ, respectiv η, sînt ecuații Legendre generalizate de tipul ecuației (46′):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}F^{(\xi)}}{\mathrm{d}\xi}\right] + \left[\lambda^2 - \frac{1}{1-\xi^2}\right]F^{(\xi)} = 0, \tag{86}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}G^{(\eta)}}{\mathrm{d}\eta}\right] + \left[\lambda^2 - \frac{1}{1-\eta^2}\right]G^{(\eta)} = 0. \tag{87}$$

Soluțiile generale ale acestor două ecuații sînt (cu (48)) de aceeași formă:

$$F_l^{(\xi)} = C_l P_l^1(\xi) + D_l Q_l^1(\xi), \tag{88}$$

$$G_l^{(\eta)} = M_l P_l^1(\eta) + N_l Q^1{}_l(\eta), \tag{89}$$

în care intervin funcții Legendre asociate de argument ξ, respectiv de argument η. Din condiția de mărginire a potențialului vector pe axa Oz ($\eta = \pm 1$) rezultă $N_l = 0$ și l trebuie să fie un număr întreg și pozitiv ($l \equiv n$). Expresia generală a potențialului vector în domeniile exterioare conductoarelor și mărginite de suprafețe $\xi = \text{const}$ este, prin urmare,

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n P_n^1(\xi) + D_n Q_n^1(\xi)] P_n^1(\eta). \tag{90}$$

Pentru domeniul care conține sferoidul degenerat ($\xi = 1$), condiția de mărginire a soluției impune $D_n = 0$, expresia (90) devenind acum

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\xi) P_n^1(\eta), \tag{91}$$

iar pentru domeniul extins pînă la infinit ($\xi = \infty$) condiția de mărginire a soluției impune $C_n = 0$, expresia (90) devenind în acest caz

$$\underline{A}(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n Q_n^1(\xi) P_n^1(\eta). \tag{92}$$

Pentru determinarea diverselor constante de integrare care intervin în expresiile generale ale potențialului vector se pun condițiile de trecere (17)—(18) pe suprafețele de discontinuitate ale cîmpului ($\xi = \text{const}$ în acest caz). Se constată (după forma pe care o au expresiile (80)—(84)), că diversele constante de integrare sînt soluții ale unor sisteme de ecuații algebrice cu o infinitate de ecuații, avînd o infinitate de necunoscute.

Coordonatele sferoidului alungit se pot utiliza și pentru studiul cîmpului *în domenii mărginite de suprafețe ale hiperboloizilor de rotație* $\beta = const.$

Din rezultatele obținute mai sus se pot obține prin particularizare rezultatele corespunzătoare cazului domeniilor mărginite de suprafețele unor sfere concentrice (vezi par. 4.2).

4.7. *Coordonatele elipsoidului de rotație (sferoidului) turtit* α, β, φ se introduc prin relațiile [4], [5]

$$z + \mathrm{j}r = c \operatorname{sh}(\alpha + \mathrm{j}\beta), \quad \varphi \equiv \varphi, \tag{93}$$

$$z = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \qquad r = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta. \tag{94}$$

Suprafețele de coordonate sînt sferoizii turtiți confocali $\alpha = \text{const}$, $0 \leqslant \alpha < \infty$ (cu cercul focal $z = 0$, $r = c$), hiperboloizii de rotație cu o singură pînză confocali $\beta = \text{const}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ (avînd același cerc focal ca și sferoizii $\alpha = \text{const}$) și semiplanele $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (fig. 6).

Parametrii lui Lamé fiind

$$h_\alpha = h_\beta = c\,(\mathrm{ch}^2\,\alpha - \sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}, \quad h_\varphi = c\,\mathrm{ch}\,\alpha \sin\beta, \tag{95}$$

se constată și aici că condițiile de separare a variabilelor în ecuațiile potențialului vector sînt satisfăcute.

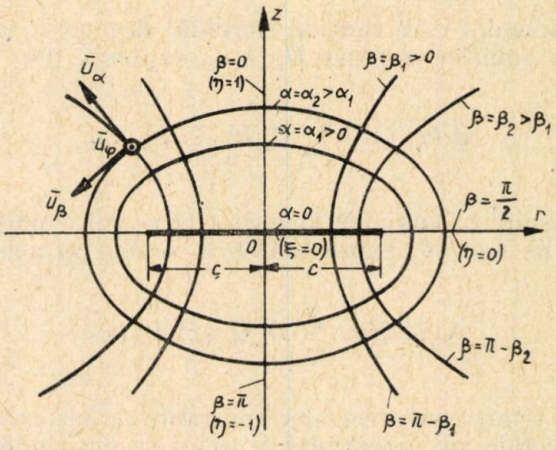


Fig. 6.— Sistemul coordonatelor sferoidului turtit.

Ecuația potențialului $\underline{A}$ pentru interiorul conductcarelor (24) capătă forma

$$\frac{1}{c^2\,(\mathrm{ch}^2\,\alpha - \sin^2\beta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha\,\underline{A})\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(\sin\beta\,\underline{A})\right]\right\} -$$

$$- \gamma^2\,\underline{A} = 0. \tag{96}$$

Dacă în locul coordonatelor α, β, φ se folosesc (pentru simplificarea scrierii) coordonatele η, ξ, φ [7], definite prin relațiile

$$\xi = \mathrm{sh}\,\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \varphi \equiv \varphi, \tag{97}$$

$0 \leqslant \xi < \infty$, $-1 \leqslant \eta \leqslant +1$, cu parametrii lui Lamé corespunzători

$$h_\eta = c\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_\xi = c\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_\varphi = c[(1-\eta^2)(\xi^2+1)]^{\frac{1}{2}}, \tag{98}$$

ecuația (96) se transformă în

$$\frac{1}{c^2(\xi^2+\eta^2)}\left\{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}[(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\underline{A}]+(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}\underline{A}]\right\}-$$

$$-\gamma^2\underline{A}=0. \tag{96'}$$

Observație. Ecuația (96′) se obține direct din ecuația (74′) dacă în aceasta din urmă se face transformarea

$$\xi\to+\mathrm{j}\xi,\quad c\to-\mathrm{j}c,\quad \eta\to\eta \tag{99}$$

și, invers, dacă în ecuația (96′) se face transformarea

$$\xi\to-\mathrm{j}\xi,\quad c\to+\mathrm{j}c,\quad \eta\to\eta, \tag{100}$$

se obține ecuația (74′). Evident, utilizînd aceleași transformări, se poate obține și ecuația potențialului vector din exteriorul conductoarelor în coordonatele η, ξ, φ (97) direct din ecuația (85′) și invers. În consecință, utilizînd transformările (99) și (100), se pot obține direct toate rezultatele corespunzătoare coordonatelor sferoidului turtit din acelea corespunzătoare coordonatelor sferoidului alungit și invers.

Prin urmare, expresiile potențialului vector *pentru domeniile* conductoare *mărginite de suprafețe ale sferoizilor turtiți confocali* $\alpha = const$ se obțin direct din relațiile (82), (83), (84) corespunzător:

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_l[C_l R^{(1)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\mathrm{j}\xi)+D_l R^{(2)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\mathrm{j}\xi)]S^{(1)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\eta), \tag{101}$$

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_l C_l R^{(1)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\mathrm{j}\xi)S^{(1)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\eta), \tag{102}$$

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_l[C_l R^{(3)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\mathrm{j}\xi)+D_l R^{(4)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\mathrm{j}\xi)]S^{(1)}_{1,l}(-\mathrm{j}h,\eta). \tag{103}$$

Pentru domeniile din exteriorul conductoarelor, expresiile potențialului vector se obțin direct din relațiile (90), (91), (92) corespunzător:

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n P^1_n(\mathrm{j}\xi)+D_n Q^1_n(\mathrm{j}\xi)]P^1_n(\eta), \tag{104}$$

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n P^1_n(\mathrm{j}\xi)P^1_n(\eta), \tag{105}$$

$$\underline{A}(\eta,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n Q^1_n(\mathrm{j}\xi)P^1_n(\eta). \tag{106}$$

Coordonatele sferoidului turtit se pot utiliza şi pentru studiul cîmpului *în domenii mărginite de suprafeţe ale hiperboloizilor de rotaţie cu o singură pînză* $\beta = const.$

Din rezultatele obţinute pentru cazul coordonatelor sferoidului turtit se pot obţine prin particularizare rezultatele corespunzătoare cazului coordonatelor sferice (vezi par. 4.2), precum şi cazului discului circular.

5. CONCLUZII

Analiza directă efectuată în capitolul 3 al lucrării de faţă arată că, dacă parametrul lui Lamé corespunzător coordonatei unghiulare φ, h_φ este produsul unei funcţii numai de coordonata α printr-o funcţie numai de coordonata β, în ecuaţia vectorială de tip Laplace, scrisă sub forma (31), se pot separa variabilele; dacă, în plus, produsul $h_\alpha h_\beta$ al celorlalţi doi parametri ai lui Lamé este suma unei funcţii numai de α şi a unei funcţiuni numai de β (sau este o funcţie numai de α ori numai de β), se separă variabilele şi în ecuaţia vectorială de tip Helmholtz, scrisă sub forma (24). Rezultă că în ecuaţiile vectoriale de tip Laplace şi de tip Helmholtz, satisfăcute de potenţialul vector (8) corespunzător cîmpurilor cu simetrie axială, variabilele se pot separa în aceleaşi condiţii ca şi în ecuaţiile scalare ale lui Laplace, respectiv Helmholtz, corespunzătoare cîmpurilor cu simetrie de rotaţie [4]. La această concluzie se poate ajunge studiind ecuaţiile vectoriale de tip Laplace şi de tip Helmholtz sub forma lor generală [7], ţinînd seama de simetria axială a cîmpului considerat.

În capitolul 4 al lucrării se stabilesc expresii generale ale potenţialului vector (8) pentru domenii (conductoare sau neconductoare) mărginite de diferite suprafeţe de coordonate corespunzătoare sistemelor de coordonate cilindrice circulare, sferice, toroidale, bisferice, ale sferoidului alungit şi ale sferoidului turtit. Sistemele de coordonate toroidale şi bisferice pot fi utilizate numai pentru integrarea ecuaţiilor vectoriale de tip Laplace (31) şi numai după efectuarea unor transformări de funcţie corespunzătoare; în aceste două sisteme de coordonate, ecuaţiile vectoriale de tip Helmholtz (24) nu-şi separă variabilele. Sistemele de coordonate ale sferoidului alungit şi ale sferoidului turtit pot fi utilizate pentru integrarea atît a ecuaţiilor vectoriale de tip Laplace (31), cît şi a ecuaţiilor vectoriale de tip Helmholtz (24), însă în acest din urmă caz diversele constante de integrare rezultă ca soluţii ale unor sisteme de ecuaţii algebrice cu o infinitate de ecuaţii, avînd o infinitate de necunoscute.

Rezultatele obţinute în lucrare sînt deosebit de utile în aplicaţiile practice; bunăoară, pentru determinarea cîmpurilor magnetice cvasistaţionare cu simetrie axială în regim permanent sinusoidal, se poate porni direct de la aceste rezultate, fiind necesară numai punerea condiţiilor de trecere şi de frontieră corespunzătoare. Analog se poate proceda şi pentru rezolvarea altor probleme tehnice în care intervin ecuaţiile vectoriale de tip Laplace (31) sau de tip Helmholtz (24).

BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULEȚ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii* ,vol. IV, București, Tipografia și litografia învățămîntului, 1956.
2. A. TIMOTIN, I. R. CIRIC, *Unicitatea soluțiilor și calculul puterilor în cîmpul electromagnetic cvasistaționar al sistemelor cu simetrie axială*, St. cerc. energ. electr., **20**, *1*, 125—138 (1970).
3. A. TIMOTIN, V. HORTOPAN, *Lecții de bazele electrotehnicii*, vol. II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
4. E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge University Press, 1931.
5. N. N. LEBEDEV, *Funcțiuni speciale și aplicațiile lor*, București, Edit. tehnică, 1957.
6. E. MADELUNG, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.
7. PH. M. MORSE, H. FESHBACH, *Methods of theoretical physics*, partea I—II, New York—Toronto—Londra, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953.
8. C. FLAMMER, *Spheroidal wave functions*, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.
9. R. RĂDULEȚ, C. I. MOCANU, *Contribuții la teoria cuptoarelor de inducție fără fier*, St. cerc. energ. electr.,**12** , *3*, 445—470 (1962).

ASUPRA FORMEI SUPRATENSIUNILOR ATMOSFERICE PE LINIILE DE ÎNALTĂ TENSIUNE

DE

C. DINCULESCU și D. CRISTESCU

621.3.015.3 : 621.3.05

Solicitarea aparatajului din instalațiile de distribuție la supratensiuni de origine atmosferică este în mod esențial influențată de fenomenele care au loc în lungul liniilor de înaltă și de foarte înaltă tensiune racordate la barele colectoare.

Se determină variația tensiunii în vîrful stîlpului sau undeva în deschidere în funcție de locul loviturii de trăsnet, de rezistența de pămîntare a suporților și de panta undei de trăsnet. Analiza teoretică și determinările experimentale efectuate țin seama de influența inductivității stîlpilor, de poziția deschiderii liniei în lungul traseului etc.

Rezultatele obținute sînt utilizabile în proiectarea protecțiilor contra supratensiunilor din instalațiile de distribuție din centrale și pentru o mai adecvată alegere a nivelului de izolație pentru liniile de transport.

1. PUNEREA PROBLEMEI

Comportarea izolației liniilor și forma undelor de supratensiune incidente în stații sînt în mod inițial influențate de fenomenele care au loc în lungul liniei de înaltă tensiune, în deschiderea lovită de trăsnet, pe suporții care o încadrează și în deschiderile și suporții învecinați.

În literatura de specialitate română [1] și străină [2]—[4] au fost prezentate studii ample privind determinarea nivelului supratensiunilor în cazul căderii loviturii de trăsnet în vîrful stîlpului și undeva în deschidere, mai precis la jumătate și la sfert de deschidere, considerîndu-se propagarea în stîlpul, respectiv în deschiderea lovită.

Determinarea nivelului și formei supratensiunii prezintă deosebit interes în alegerea nivelului de izolație a liniei, problemă cu importante consecințe economice, precum și în cercetarea protecției stațiilor de la capetele liniei lovite de descărcarea atmosferică.

În ceea ce privește nivelul de izolație a liniei, este necesară coordonarea distanțelor de izolare atît la suport, cît și la deschidere.

În prezenta lucrare se determină variația tensiunii în vîrful stîlpului sau undeva în deschidere, în funcție de locul loviturii de trăsnet,

de rezistenţa de pămîntare a stîlpilor şi de panta undei de trăsnet. Se ţine seama în această analiză de influenţa inductivităţii stîlpilor, de poziţia deschiderii liniei în lungul traseului, de deschiderea undeva în traseu sau deschiderea de capăt şi de influenţa deschiderilor învecinate sau mai depărtate prin reflexiile succesive create.

Fenomenul prezentat anterior este analizat atît teoretic, cît şi experimental pe un model de linie construit în cadrul unei lucrări anterioare [5], cu adaptările necesare modelării suporţilor. Considerarea şi a suporţilor învecinaţi deschiderii lovite, cîte trei în stînga şi în dreapta locului lovit, a fost necesară pentru că, aşa cum se desprinde din concluziile încercărilor efectuate, mărimea tensiunii în vîrful acestor suporţi este încă importantă, de ordinul a sute de kV, şi poate duce la conturnări şi ale acestor lanţuri.

Pentru rezolvarea problemei ridicate s-au efectuat o serie de ipoteze dintre care unele uzuale pentru analiza unor procese de propagare şi altele particulare, ridicate de natura fenomenului cercetat.

Va fi cercetat fenomenul care are loc în lungul conductorului de protecţie, legat la fiecare suport la rezistenţa de pămîntare a acestuia, priză naturală sau specială. Nu se va lua în considerare influenţa mutuală cu conductoarele fazelor vecine şi nici conturnarea lanţurilor de izolatoare care poate apărea, pentru că asupra tensiunii care solicită izolaţia liniei, de fapt tensiunea faţă de nul a conductorului de protecţie, nu are importanţă deosebită. Cînd linia este pentru foarte înaltă tensiune, firul de protecţie este izolat de suport cu un izolator capă conturnat la apariţia descărcării atmosferice. În această situaţie, rezistenţa canalului de descărcare se înseriază cu cea de pămîntare, şi desfăşurarea fenomenului, deşi neesenţial influenţată, poate fi cercetată cu modelul matematic propus în prezentul referat şi cu concluziile experimentale adaptate corespunzător.

Stîlpii liniei au fost consideraţi elemente concentrate, compuse din inductanţă şi rezistenţe, ceea ce înlocuieşte fenomenul de propagare din lungul stîlpului cu o schemă de constante concentrate. Analiza preciziei acestui model matematic este efectuată în anexa A. 1 a lucrării [7]. Înlocuirea este posibilă în condiţiile de eroare neesenţială, din cauza duratei foarte mici a întregului proces de propagare (circa 0,2 μs).

Determinările experimentale s-au efectuat pe un model fizic în care la 16,67 sau la 25 m lungime de linie corespunde un cvadripol π din inductanţă şi capacităţi. Lungimea mică a fracţiunii reale de linie modelate de o „celulă" şi valorile mici ale inductanţelor şi capacităţilor fac ca frecvenţa proprie a cvadripolului să fie suficient de mare pentru fenomenele analizate. Precizia determinărilor experimentale ale unui fenomen de propagare obţinute cu ajutorul unui lanţ de cvadripoli este analizată în anexa A. 1 a lucrării [7].

2. DETERMINAREA TEORETICĂ A NIVELULUI SUPRATENSIUNILOR

Pentru determinarea nivelului supratensiunilor în diverse puncte ale traseului conductorului de protecţie se consideră canalul de trăsnet echivalent cu o linie de impedanţă caracteristică z_c, cu valori cuprinse între 200 şi 400 Ω [6].

În procesul de propagare apar unde reflectate care sosesc pe conductorul de protecție înspre punctul de impact al loviturii de trăsnet. Dintre acestea o parte pătrund în canalul de trăsnet, iar o altă parte se propagă spre stîlpul următor.

Se face presupunerea plauzibilă că descărcarea prin trăsnet poate fi echivalată cu cea produsă de un generator a cărui undă furnizată nu se modifică datorită acestor reflexii și refracții. Aceasta practic revine la a presupune că undele reflectate dinspre conductorul de protecție pătrund în canalul de trăsnet și îl parcurg spre nor; acesta, după cum s-a menționat mai sus, a fost echivalat cu un generator „acordat" pe impedanța canalului de trăsnet. În consecință, unda trimisă în canalul de trăsnet nu-și modifică forma, datorită reflexiilor din canalul de trăsnet.

În calculele ce se efectuează s-a presupus o undă de supratensiune obținută din suprapunerea a două exponențiale de expresie analitică alăturată :

$$U_0(t) = R\,[e^{-mt} - e^{-lt}]. \tag{1}$$

Forma (1) a supratensiunii, apropiată de cele care apar în realitate prin alegerea obișnuită a parametrilor A, m, l, poate fi suprapusă peste unda standardizată sau peste o undă cu maximul la 2μs, care se întîlnește în astfel de calcule [1], [4], [6]. De multe ori, supratensiunile sînt caracterizate doar de valoarea maximă și panta frontului fără a preciza durata scăderii ei.

Folosirea undei descrise de formula (1) duce la rezultate mai apropiate de realitate fizică decît a undei cu pantă liniară și spate infinit, evitînd punctul de discontinuitate de derivată de la maxim.

Imaginea operațională a tensiunii (1) este

$$U_0(p) = \frac{A\,(l-m)}{(p+m)\,(p+l)},$$

în care, dacă se va ține seama de relația (1), se găsește următoarea expresie :

$$U_0(t) = \frac{\lambda U_{max}}{l-m}(e^{-mt} - e^{-lt}); \qquad U_0(p) = \frac{\lambda U_{max}}{(p+m)\,(p+l)} \tag{2}$$

În imaginea de mai sus, coeficientul multiplicativ al lui U_{max} depinde de panta medie și de valoarea sa maximă :

$$\lambda = \frac{1}{m}\, e^{-\frac{\ln \frac{l}{m}}{\frac{m}{l}-1}} \tag{3}$$

Calculul teoretic se va efectua pe o schemă de felul celei prezentate în figura 2.1 :

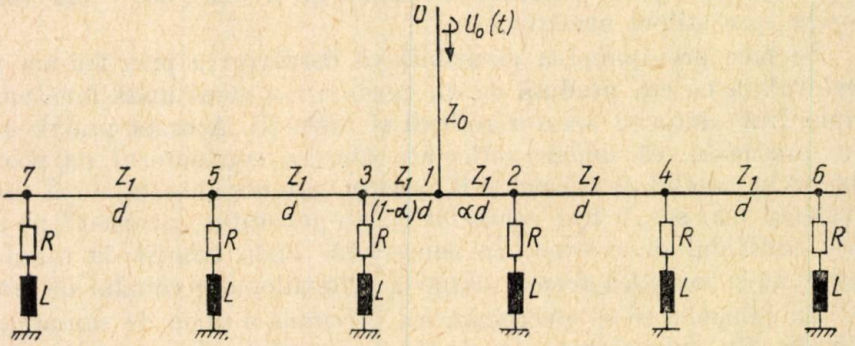


Fig. 2.1.

S-au determinat relaţiile de calcul pentru supratensiunile la locul loviturii de trăsnet $U_1(t)$ şi în vîrful stîlpului din dreapta loviturii $U_2(t)$ ca suprapunere a diverselor unde de tensiune apărute în procesul de propagare după schema de calcul al lui Bewley. În notaţii, $U^{(i)}_{jklm}$ semnifică tensiunea ce se propagă pe tronsonul lm după ce a suferit transformări în nodurile j şi k. Ordinea de trecere prin punctele de modificare a caracteristicilor este cea indicată de succesiunea indicilor inferiori. Indicele superior reprezintă a cîta undă de tensiune este sosită în nodul m pe traseul indicat de indicii inferiori. Suprapunerea în timp a acestor tensiuni se face în funcţie de timpii de propagare în schemă :

$$t_{12} = \frac{\alpha d}{c}; \quad t_{32} = \frac{d}{c}; \quad t_{13} = \frac{(1-\alpha)d}{c}. \tag{4}$$

În notarea coeficienţilor de propagare se respectă aceeaşi regulă a indicilor indicată mai sus.

În urma reflexiilor succesive dintre punctele 1 şi 2 se stabilesc în punctul 2 următoarele valori de tensiune :

$$0 < t < t_{12}; \quad U'_2 = 0,$$

$$t_{12} < t < 3t_{12}; \quad U'_2(p) = U_0(p)\,\alpha_{01}\alpha_{12} =$$

$$= \frac{\lambda z_1}{z_0 + \frac{z_1}{2}}\,U_{max}\,\frac{\left(\frac{R}{L}+p\right)e^{-t_{12}p}}{\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)(p+m)\,(p+l)},$$

$$3t_{12} < t < 5t_{12}; \quad U'_2(p) = U^{(1)}_{12}(p) + U^{(2)}_{1212}(p) = U_0(p)\,\alpha_{01}\alpha_{12}\,[1 +$$

$$+ \beta_{21}\beta_{12}\,e^{-2t_{12}p}]\,e^{-t_{12}p} =$$

$$= U_{max}\frac{\lambda z_1}{z_0+\frac{z_1}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{R}{L}+p\right)e^{-t_{12}p}}{\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)(p+m)(p+l)}\left[1+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{z_1^2}{4L}e^{-2t_{12}p}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)}\right],$$

$5t_{12} < t < 7t_{12}$; $U_2'(p) = U_{12}^{(1)}(p) + U_{1212}^{(2)}(p) + U_{121212}^{(3)}(p) =$

$$= U_0(p)\,\alpha_{01}\alpha_{12}\left[1+\beta_{12}\beta_{21}e^{-2t_{12}p}+\beta_{12}^2\beta_{21}^2e^{-4t_{12}p}\right]e^{-t_{12}p} =$$

$$= U_{max}\frac{\lambda z_1}{z_0+\frac{z_1}{2}}\cdot\frac{\left(p+\frac{R}{L}\right)e^{-t_{12}p}}{\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)(p+m)(p+l)}\left[1+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{z_1^2}{4L}e^{-2t_{12}p}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)}+\frac{\left(\frac{z_1^2}{4L}\right)^2e^{-4t_{12}p}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^2\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)^2}\right], \qquad (5)$$

$(2n-1)\,t_{12} < t < (2n+1)\,t_{12}$; $U_2'(p) = U_{12}^{(1)}(p) + U_{12\ldots2}^{(2)}(p) + \ldots +$

$$+ U^{(n)}_{\underbrace{12\cdots12}_{n}}(p) = U_0(p)\;\alpha_{01}\alpha_{12}\,e^{-t_{12}p}\sum_{i=1}^{n}\beta_{12}^{i-1}\beta_{21}^{i-1}e^{-2(i-1)t_{12}p}.$$

În conformitate cu această formă a imaginii, supratensiunea din această categorie ca funcţie de timp se scrie, dacă se ţine seama de valoarea (4) a timpului de propagare,

$$U_2'(t) = \tau\left(t-\frac{\alpha d}{c}\right)\sum_{i=1}^{n}U^{(i)}_{\underbrace{12\cdots12}_{i}}\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]\cdot\tau\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right], \qquad (6)$$

în care funcţia $\tau(t-\theta)$ este funcţia „salt-unitate", cu valorile

$$\tau(t-\theta) = \begin{cases} 0 & t \leqslant \theta, \\ 1 & t > \theta. \end{cases}$$

Se caută originalul expresiei operaţionale de mai jos :

$$U^{(i)}_{\underbrace{12\cdots12}_{i}}(p) = U_{max}\frac{\lambda z_1}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^i}\cdot\frac{\left(p+\frac{R}{L}\right)\left(\frac{z_1^2}{4L}\right)^{i+1}}{(p+m)(p+l)\left(p+\frac{z_1+2R}{2L}\right)^i} =$$

$$= U^{(i)}_{0f}(p)\cdot f^{(i)}(p). \tag{7}$$

Pentru rezolvare se va face apel la funcţia auxiliară

$$F_i(p) = \frac{1}{p}f^{(i)}(p),$$

corespunzătoare aplicării unei tensiuni în salt-unitate unei scheme caracterizată de imaginea $f^{(i)}_p(p)$, apoi se va considera aplicat aceluiaşi sistem o tensiune de intrare fictivă $U^{(i)}_{of}(t)$ original al relaţiei

$$U^{(i)}_{of}(p) = U_{max}\frac{\lambda z_1}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^i}\cdot\frac{\left(p+\frac{R}{L}\right)\left(\frac{z_1^2}{4L}\right)^{i-1}}{(p+m)(p+l)},$$

$$U^{(i)}_{of}(t) = U_{max}\frac{\lambda z_1\left(\frac{z_1^2}{4L}\right)^{i-1}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^i(l-m)}\left[\left(\frac{R}{L}-m\right)e^{-mt}-\left(\frac{R}{L}-l\right)e^{-lt}\right]. \tag{8}$$

Prin aplicarea integralei lui Duhamel se deduce relaţia

$$U^{(i)}_{\underbrace{12\cdots12}_{i}}(t) = F_i(0)\ U^{(i)}_{of}(t) - \int_0^t F_i'(t-\tau)\ U^{(i)}_{of}(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Un calcul de recurentă conduce la următoarea valoare pentru $F_i(t)$:

$$F_i(t) = \frac{1}{(i-1)!}\int_0^t e^{-\frac{z_1+2R}{2L}\tau}\cdot\tau^{i-1}\cdot d\tau.$$

Se poate scrie acum expresia finală a acestei categorii de supratensiuni rezultate prin reflexii între punctele 1 şi 2 ale schemei în n intervale de timp :

$$U_2'(t) = \tau\left(t-\frac{\alpha d}{c}\right)\cdot\frac{\lambda z_1 U_{max}}{\left(z_0+\frac{z}{2}\right)(l-m)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right].$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{z_1^2}{4L}\right)^{i-1}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^{i-1}} \times \left\{ e^{-\frac{Z_1+2R}{2L}\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]} \sum_{k=1}^{i} \left[-\frac{\frac{R}{L}-m}{\left[\frac{z_1+2R}{2L}-m\right]^k} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{R}{L}-l}{\left[\frac{z_1+2R}{2L}-l\right]^k} \right] \cdot \frac{\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]^{i-k}}{(i-k)!} + \frac{\frac{R}{L}-m}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-m\right)^i} \cdot \tag{10}$$

$$\left. \cdot e^{-m\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]} - \frac{\frac{R}{L}-l}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-l\right)^i} e^{-l\left[t-(2i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]} \right\} .$$

Cu ajutorul coeficienților de propagare (5) și (6) se determină supratensiunea la locul loviturii de trăsnet, punctul 1, în urma suprapunerii undelor reflectate între punctele nodale 2 și 1. Se păstrează aceeași convenție de notare cu indici a tensiunilor din diverse trepte de reflexie.

Presupunînd că $\alpha < 0{,}5$, deci că lovitura de trăsnet cade în jumătate apropiată de stîlpul 2, se pot scrie relații operaționale asemănătoare pentru punctul 1.

Utilizîndu-se o metodă similară cu cea prezentă anterior, se găsește forma în timp a supratensiunii la locul loviturii de trăsnet cînd se ține seama numai de reflexiile dintre punctele 1 și 2 :

$$U_1'(t) = \frac{\lambda z_1}{z_0+\frac{z_1}{2}} \cdot \frac{U_{max}}{l-m} \left[e^{-mt} - e^{-lt}\right] - 2\lambda U_{max} \cdot \frac{z_0 \frac{z_1^2}{4L}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^2 (l-m)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=2}^{n} \tau\left[t-2(i-1)\frac{\alpha d}{c}\right] \times \frac{\left(\frac{z^2}{4L}\right)^{i-2}}{\left(z_0+\frac{z_1}{2}\right)^{i-2}} \cdot \left\{ e^{-\frac{Z_1+2R}{2L}\left[t-2(i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]} \cdot \right. \tag{11}$$

$$\left. \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{1}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-l\right)^k} - \frac{1}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-m\right)^k} \right] \times \frac{\left[(t-2(i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]^{i-k-1}}{(i-k-1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-m\left[t-2(i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]}}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-m\right)^{i-1}} - \frac{e^{-l\left[t-2(i-1)\frac{\alpha d}{c}\right]}}{\left(\frac{z_1+2R}{2L}-l\right)^{i-1}} \right\} .$$

Tensiunea stabilită la locul loviturii de trăsnet depinde de reflexiile în ambele sensuri ale conductorului, adică de fenomenele de propagare de pe porţiunea 1—2 şi de pe porţiunea 1—3. Expresia analitică a tensiunilor rezultate din reflexiile de suportul 3 este asemănătoare cu cea dată de relaţia (11), diferind însă momentul fiecărui început de etapă, care în acest caz este multiplul $2\ (\alpha - 1)\frac{d}{c}$. Strîngînd cele două expresii într-una singură, se găseşte

$$U_1(t) = \frac{\lambda z_1}{z_0 + \frac{z_1}{2}} \cdot \frac{U_{max}}{l - m} [e^{-mt} - e^{-lt}] - 2\lambda U_{max} \frac{z_0 \frac{z_1^2}{4L}}{\left(z_0 + \frac{z_1}{2}\right)^2 (l - m)} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=2}^{n} \tau \left[t - 2\ (i-1) \frac{\alpha d}{c} \right] \cdot \left(\frac{\frac{z_1^2}{4L}}{z_0 + \frac{z_1}{2}} \right)^{i-2} \cdot \left\{ e^{-\frac{z_1 + 2R}{2L} \left[t - 2(i-1) \frac{\alpha d}{c} \right]} \times \right. \right.$$

$$\times \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{1}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - l \right)^k} - \frac{1}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - m \right)^k} \right] \frac{\left[t - 2\ (i-1) \frac{\alpha d}{c} \right]^{i-k-1}}{(i-k-1)!} +$$

$$+ \frac{e^{-m\left[t - 2(i-1) \frac{\alpha d}{c} \right]}}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - m \right)^{i-1}} - \frac{e^{-l\left[t - 2(i-1) \frac{\alpha d}{c} \right]}}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - l \right)^{i-1}} \left. \right\} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n'} \tau \left[t - 2(j-1) \frac{(1-\alpha) d}{c} \right] \cdot \left(\frac{\frac{z_1^2}{4L}}{z_0 + \frac{z_1}{2}} \right)^{j-2} \times \qquad (12)$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{z_1 + 2R}{2L} \left[t - 2(j-1) \frac{(1-\alpha)d}{c} \right]} \cdot \sum_{r=1}^{j-1} \left[\frac{1}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - l \right)^r} - \frac{1}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - m \right)^r} \right] \times \right.$$

$$\times \frac{\left[t - 2(j-1) \frac{(1-\alpha)d}{c} \right]^{j-r-1}}{(j-r-1)!} + \frac{e^{-m\left[t - 2(j-1) \frac{(1-\alpha)d}{c} \right]}}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - m \right)^{j-1}} -$$

$$\left. \left. - \frac{e^{-l\left[t - 2(j-1) \frac{(1-\alpha)d}{c} \right]}}{\left(\frac{z_1 + 2R}{2L} - l \right)^{j-1}} \right\} \right\}.$$

În afară de reflexiile luate în considerare, supratensiunile în vîrful stîlpului și la locul loviturii mai sînt influențate și de derivate ale acestora). Amplitudinea lor scade însă în măsură însemnată și se poate lucra cu precizie mulțumitoare cu ajutorul formulelor (10) și (11).

3. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Pentru determinarea numerică a valorilor supratensiunilor în diverse puncte ale traseului liniei se folosește în prezenta lucrare metoda modelării fizice, utilizîndu-se un generator de impulsuri și un lanț de cvadripoli descris într-o lucrare anterioară [5].

Pentru modelarea elementelor cu constante distribuite din schemele de calcul — conductorul liniei și canalul de trăsnet — s-au folosit lanțuri de cvadripoli π cu următoarele valori:

$$L = 287\ \mu\text{H};\quad C = (2 \times 840 + 2 \times 2 \times 180)\ \text{pF}.$$

Cu ajutorul acestor valori, pentru canalul de trăsnet s-a realizat un lanț de 20 de celule cu impedanță caracteristică de 330 Ω [6], precum și elementele conductorului liniei.

Modelul a fost construit pentru o scară unitară a rezistențelor, deci cu scările capacităților, inductanțelor și timpului egale între ele; pentru tensiuni, scara de modelare este

$$m_u = 200 \times 10^{-6}.$$

Pentru alegerea unei anumite valori la scara capacităților s-a ținut seama de necesitatea utilizării unui număr cît mai mare de cvadripoli în modelarea deschiderilor liniei, cu scopul de a realiza o cît mai fidelă redare a fenomenului de propagare și a modificărilor de formă ale undei de tensiune în schema modelată față de schema reală.

Pentru deschiderea de 100 m s-au folosit șase cvadripoli, fiecare modelînd o lungime de 16,67 m. Scările au valorile

$$m_C = m_L = m_t = 12.$$

Pentru deschiderile de 200 și 300 m, lungimea echivalentă a unui cvadripol individual s-a ales de 25 m, ceea ce corespunde la următoarele valori de scări:

$$m_C = m_L = m_t = 8.$$

În acest mod, deschiderea de 200 m a fost modelată cu 8 cvadripoli, iar cea de 300 m cu 12.

Pentru modelarea fizică a suporților liniei s-a folosit modelul matematic anterior, în care fenomenul de propagare în lungul lor a fost echivalat cu cel desfășurat la bornele unei inductanțe înseriate cu o rezistență.

S-au realizat şase astfel de modele de stîlpi şi, după cum se constată şi din valorile numerice obţinute, nu era necesar un număr mai mare de suporţi.

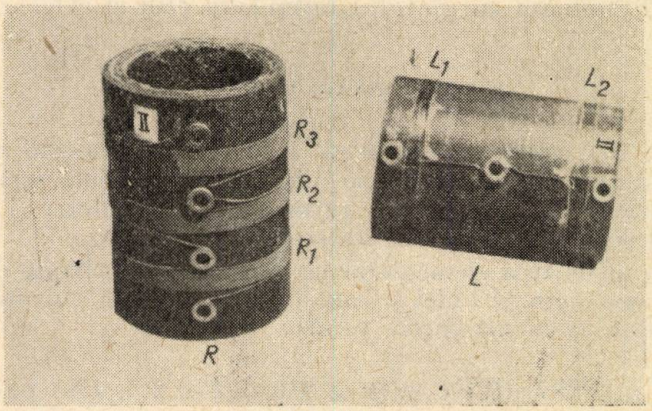


Fig. 3.1.

Inductanţa concentrată a unui model s-a realizat, după cum se vede şi din figura anterioară, din două secţiuni de bobină L_1 şi L_2 cu cîte 30 şi 40 de spire de sîrmă de cupru izolată în email, cu diametrul de 0,7 mm, iar diametrul interior de 50 mm. Secţiunile de bobină pot fi folosite separat, înseriate sau în paralel.

Rezistenţa prizei de pămînt a suporţilor s-a realizat din trei secţiuni individuale R_1, R_2, R_3, realizate cu constantan de 3,31 Ω/m, fiecare secţiune de 9Ω valoare. Se observă că rezistenţele nu au fost realizate antiinductiv, dată fiind cuplarea lor în schemă cu o inductivitate. După cum se observă, valorile obţinute permit printr-o cuplare adecvată realizarea unor valori diverse de elemente concentrate.

În cadrul lucrării s-a ţinut seama că inductanţa suporţilor pentru liniile uzuale este de ordinul 23—27 μH [6]. Pentru o distanţă între suporţi de 100 m este necesară utilizarea unei valori de ordinul a 300 μH, ţinînd seama de scări. Aceasta se obţine prin cuplarea diverselor valori de rezistenţă cu inductanţele înseriate la treapta de 9Ω. Se obţine o valoare de ordinul 22—23 μH, la 18 Ω 22,5 μH şi la 27 Ω 24,5—26 μH.

Pentru distanţa dintre suporţi de 200 şi 300 m se caută realizarea unei inductanţe de 200 μH pe model, care se obţine din compunerea diverselor secţiuni de rezistenţă avînd secţiunea de bobină cu un număr mare de spire (L_2).

Pentru efectuarea determinărilor experimentale s-au modelat două situaţii, prezentate în figura 3.2 :

Schema *A* simetrică, corespunde căderii loviturii de trăsnet într-o deschidere oarecare a liniei, iar schema *B* situaţiei în care este lovită deschiderea de la capătul liniei ; s-au plasat în stînga şi în dreapta punctului lovit cîte trei suporţi, a căror rezistenţă de pămîntare a fost variată.

S-a modificat locul loviturii de trăsnet, măsurîndu-se poziţia acestuia faţă de punctul 2 al schemei din dreapta loviturii ca distanţă αd, unde d este lungimea deschiderii şi α un coeficient subunitar, cuprins

între 0 și 1. Valoarea $\alpha = 0$ corespunde căderii trăsnetului în vîrful suportului 2 și $\alpha = 1$ în vîrful suportului 3; la $\alpha = 0{,}5$ corespunde lovitura de trăsnet în mijlocul deschiderii.

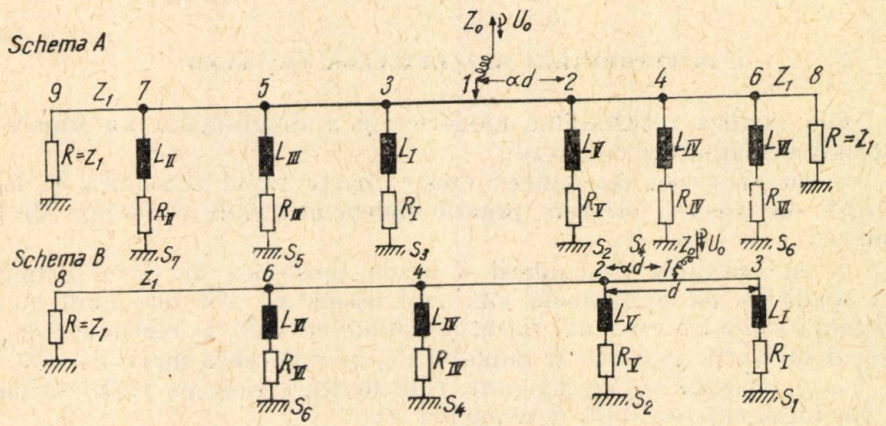


Fig. 3.2.

S-au determinat valorile procentuale ale tensiunilor în următoarele puncte ale schemei:

— pentru schema *A*, la locul loviturii (U_1), în vîrful suportului din dreapta loviturii (U_2) și în vîrful celorlalți doi suporți următori;

— pentru schema *B*, la locul loviturii (U_1), în vîrful suporților care încadrează deschiderea lovită (U_3 și U_2) și a unui suport alăturat.

S-au cercetat cazurile unor unde incidente de pante *K* diferite ale impulsului. Ținîndu-se seama de scările de modelare, s-au obținut de la generatorul de impulsuri următoarele unde:

— pentru deschiderea de 100 m:

— undă cu pantă abruptă 0,56/17,5 μs; K = 1255 kV/μs,
— undă cu pantă medie 1,01/116,7 μs; K = 525 kV/μs,
— undă cu pantă lentă 2,17/147,6 μs; K = 223 kV/μs,

— pentru deschiderile de 200 și 300 m:

undă cu pantă abruptă 0,52/26,23 μs; K = 1345 kV/μs,
undă cu pantă medie 1,03/174,8 μs; K = 508 kV/μs,
undă cu pantă lentă 2,22/219 μs; K = 237 kV/μs.

Valorile de timp și de pantă anterioare sînt date la scara fenomenului real. Alegerea astfel efectuată a permis trasarea și compararea rezultatelor la diverse deschideri și pante. Determinarea lui K s-a făcut în modul prezent mai sus (cap. 2).

În cele ce urmează se prezintă cîteva oscilograme obținute pentru deschiderea de 200 m la scheme de tip *A*, scările oscilogramelor corespund mărimilor pe model.

Pentru determinarea variației pantei undei de supratensiune, în [7] sînt prezentate o serie de oscilograme cu o dilatare a scării timpului mult mai mare, și anume de 0,782 μs/mm din grila oscilografului. (S-a folosit un aparat EO-2).

În [7] sînt prezentate variaţiile mărimilor anunţate anterior cu locul loviturii, panta impulsului incident, rezistenţa de pămîntare a suporţilor şi deschiderea liniei pentru schema *A*; pentru schema *B* s-au efectuat măsurători la deschiderea de 300 m şi pentru un impuls abrupt.

4. INTERPRETAREA REZULTATELOR. CONCLUZII

Din analiza rezultatelor numerice şi a diagramelor anterioare se desprind următoarele concluzii:

— cu creşterea deschiderii creşte foarte rapid tensiunea la locul loviturii de trăsnet, creştere practic independentă de rezistenţa de pămîntare;

— cu creşterea deschiderii *d* scade tensiunea în vîrful stîlpului, deci condiţiile de coronament sînt mai uşoare cu atît mai mult cu cît rezistenţa stîlpului este mai mică, şi anume cu 50% la rezistenţa de 9Ω şi locul loviturii depărtat şi numai 18% la rezistenţe mari, 27—30 Ω;

— după cum era de aşteptat, cînd lovitura cade pe vîrful stîlpului nu are influenţă sensibilă deschiderea *d*;

— tensiunea la locul loviturii creşte rapid cu apropierea locului de jumătatea deschiderii unde se realizează valorile maxime. Aceste creşteri sînt de 215% la 100 m, de circa 270% la 200 m şi circa 285% la 300 m la pante mari şi, respectiv, 215, 290 şi 335% la pante mici;

— influenţa deschiderii asupra tensiunii la locul loviturii se face cu atît mai simţită cu cît panta undei este mai coborîtă. Astfel, la lovituri la jumătatea deschiderii la pante mici, supratensiunea pentru deschideri de 300 m este cu 88% mai mare ca la deschideri de 100 m, în timp ce la pante mai mari cu numai 27%;

— supratensiunile la locul loviturii pentru pante mari la deschideri de 200—300 m sînt apropiate ca valoare. Aceasta se explică prin aceea că durata propagării pînă la suporţi şi înapoi în aceste cazuri este mai mare;

— supratensiunea pe stîlpul din dreapta loviturii este influenţată de deschidere la pante mari. La pante mici, curbele de variaţie practic se suprapun. Observaţia este cu atît mai accentuată, cu cît rezistenţa stîlpului este mai mare;

— în cazul loviturii de trăsnet în deschiderea finală a liniei, cel mai solicitat va fi suportul de capăt. Astfel, la rezistenţe mici se stabileşte o valoare cu 9% mai mare decît la celălalt suport şi cu 11% la rezistenţe mari;

— curbele de variaţie a supratensiunii la locul loviturii în deschideri de capăt nu mai sînt simetrice în raport cu jumătatea deschiderii; valoarea maximului în deschidere se păstrează însă ca la schema *A*;

— schema *B* a deschiderii de capăt este defavorabilă şi pentru al doilea suport al liniei, pe care se stabileşte o tensiune mai mare decît în schema simetrică *A*;

— la stîlpii depărtaţi de locul loviturii apar şi valori maxime negative, care uneori pot depăşi pe cele pozitive. Spre deosebire de acestea din urmă însă, impulsurile negative scad cu creşterea rezistenţei;

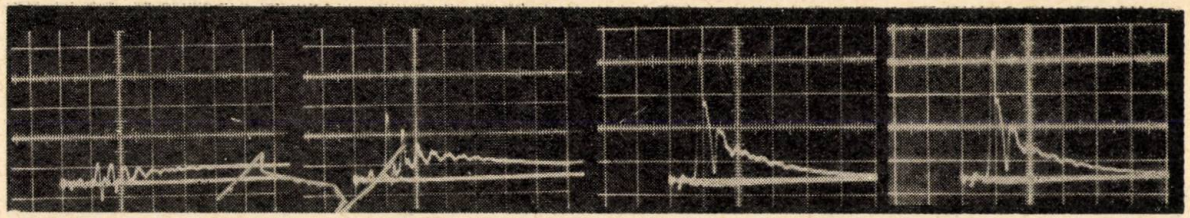


Fig. 3.3. — $l = 200$ m ; $\alpha = 0$; $R = 27\,\Omega$; 1 — U_1 — 1,04 V/mm ; 2 — U_2 — 1,04 V/mm ; impuls abrupt : 2,70 µs/mm ; 3 — U_4 — 0,52 V/mm ; 4 — U_6 — 0,52 V/mm.

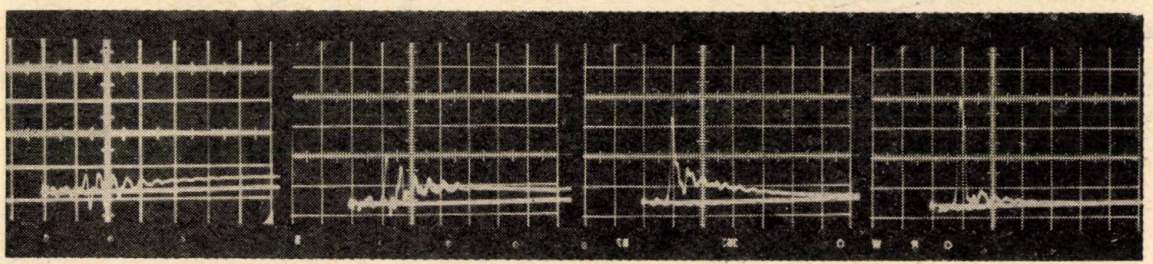


Fig. 3.4. — $l = 200$ m ; $\alpha = 0{,}5$; $R = 27\,\Omega$; 1 — U_1 — 2,617 V/mm ; 2 — U_2 — 1,04 V/mm ; impuls abrupt : 2,70 µs/mm ; 3 — U_4 — 0,52 V/mm ; 4 — U_6 — 0,52 V/mm.

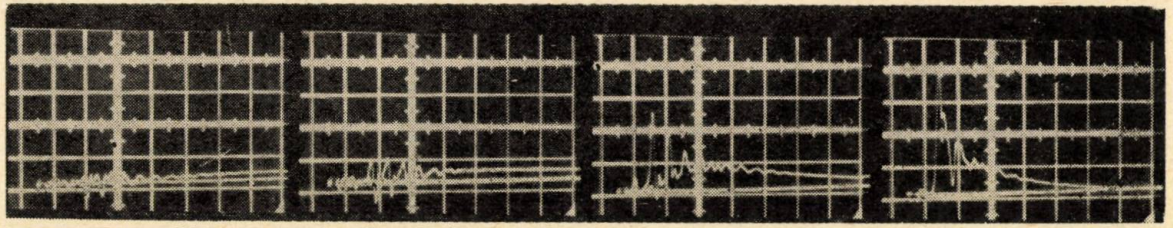


Fig. 3.5. — $l = 200$ m ; $\alpha = 1$; $R = 27\,\Omega$; 1 = U_1 — 1,04 V/mm ; 2 — U_2 — 0,52 V/mm ; impuls abrupt : 2,70 µs/mm ; 3 — U_4 — 0,52 V/mm ; 4 — U_6 — 0,52 V/mm.

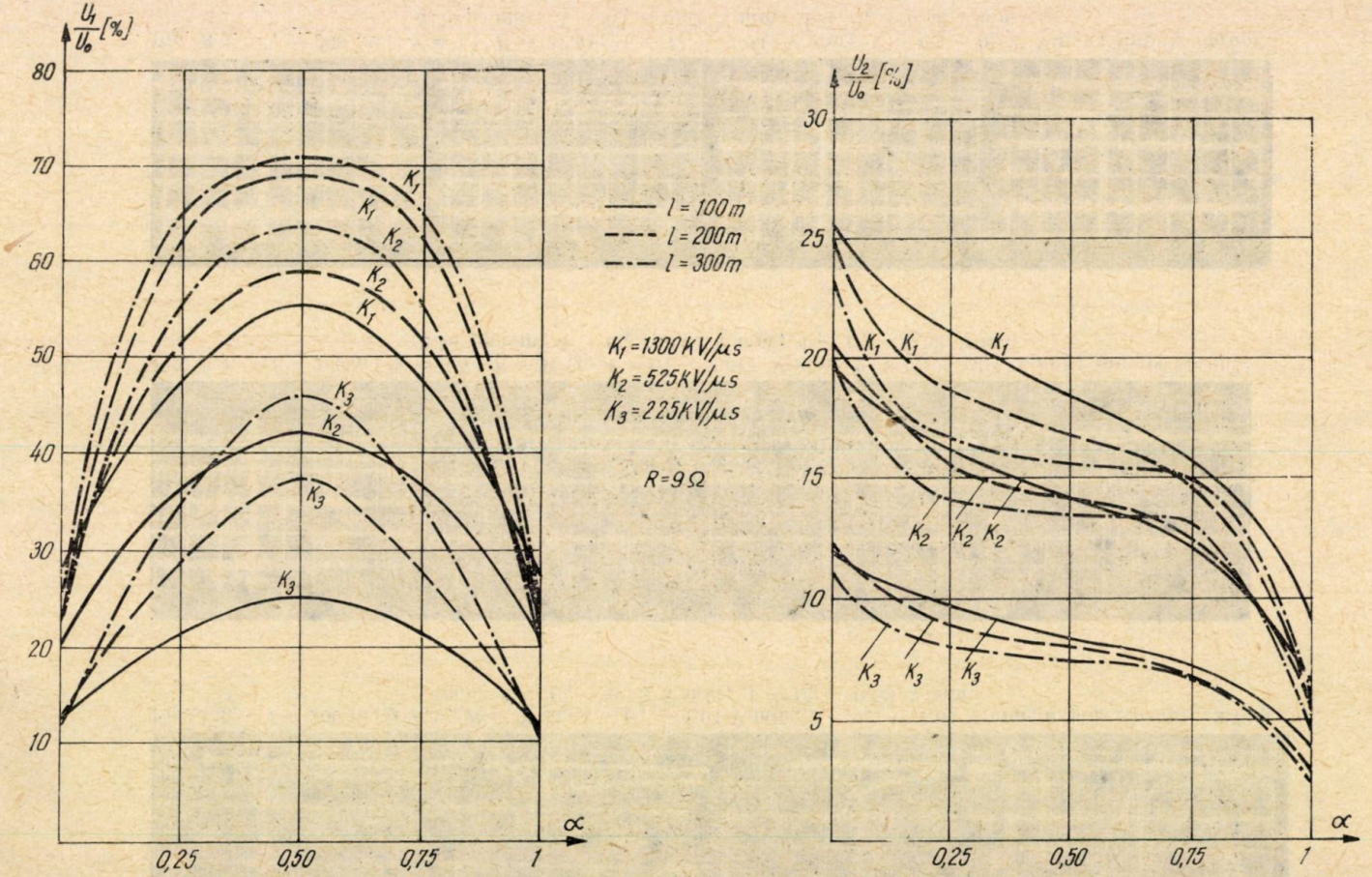


Fig. 3.6. — Variația procentuală a supratensiunii la locul loviturii de trăsnet [U_1] și stîlpul din dreapta loviturii [U_2] — schema *A*.

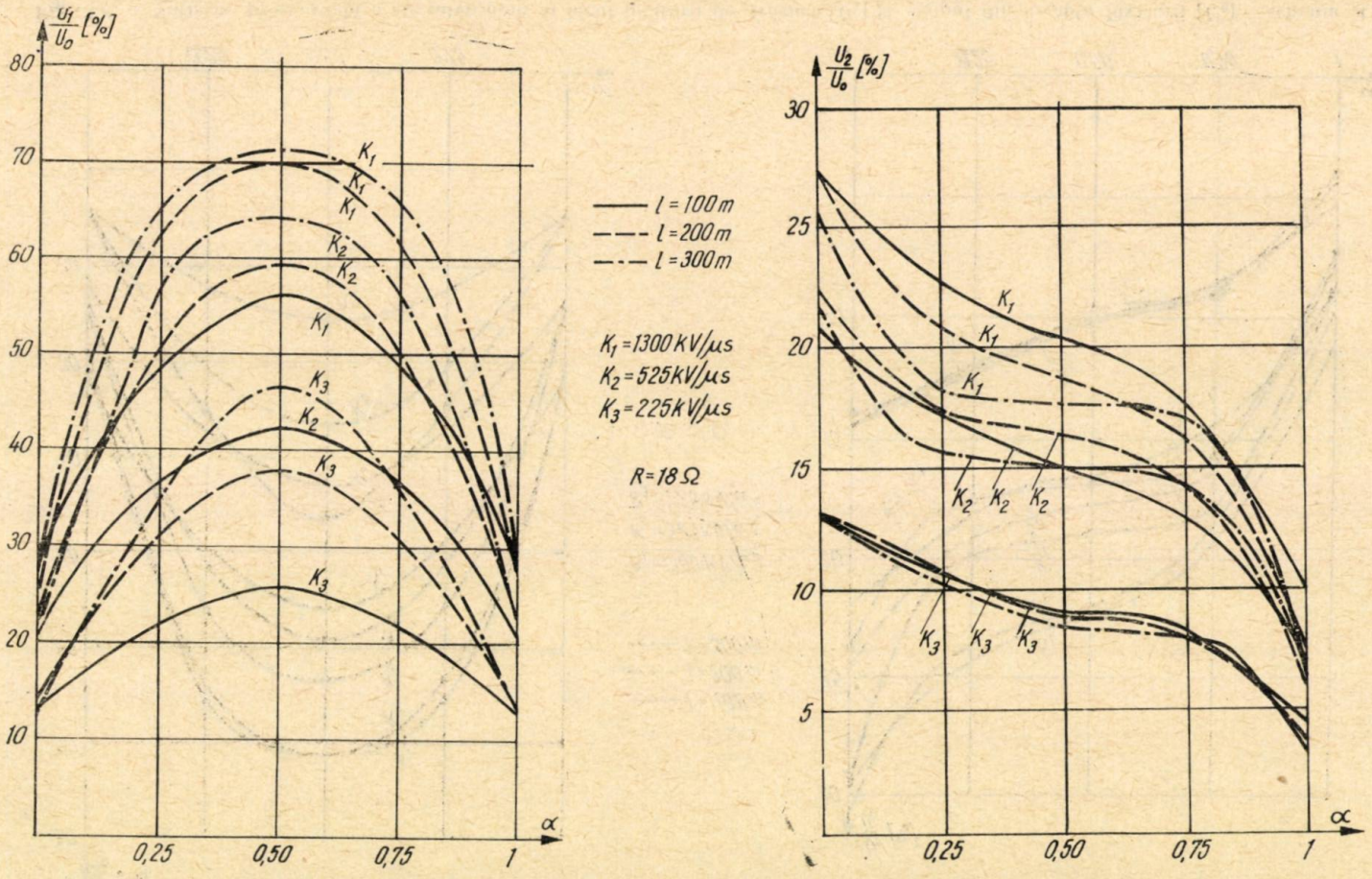


Fig. 3.7. — Variația procentuală a supratensiunii la locul loviturii de trăsnet [U_1] și stîlpul din dreapta loviturii [U_2] — schema *A*.

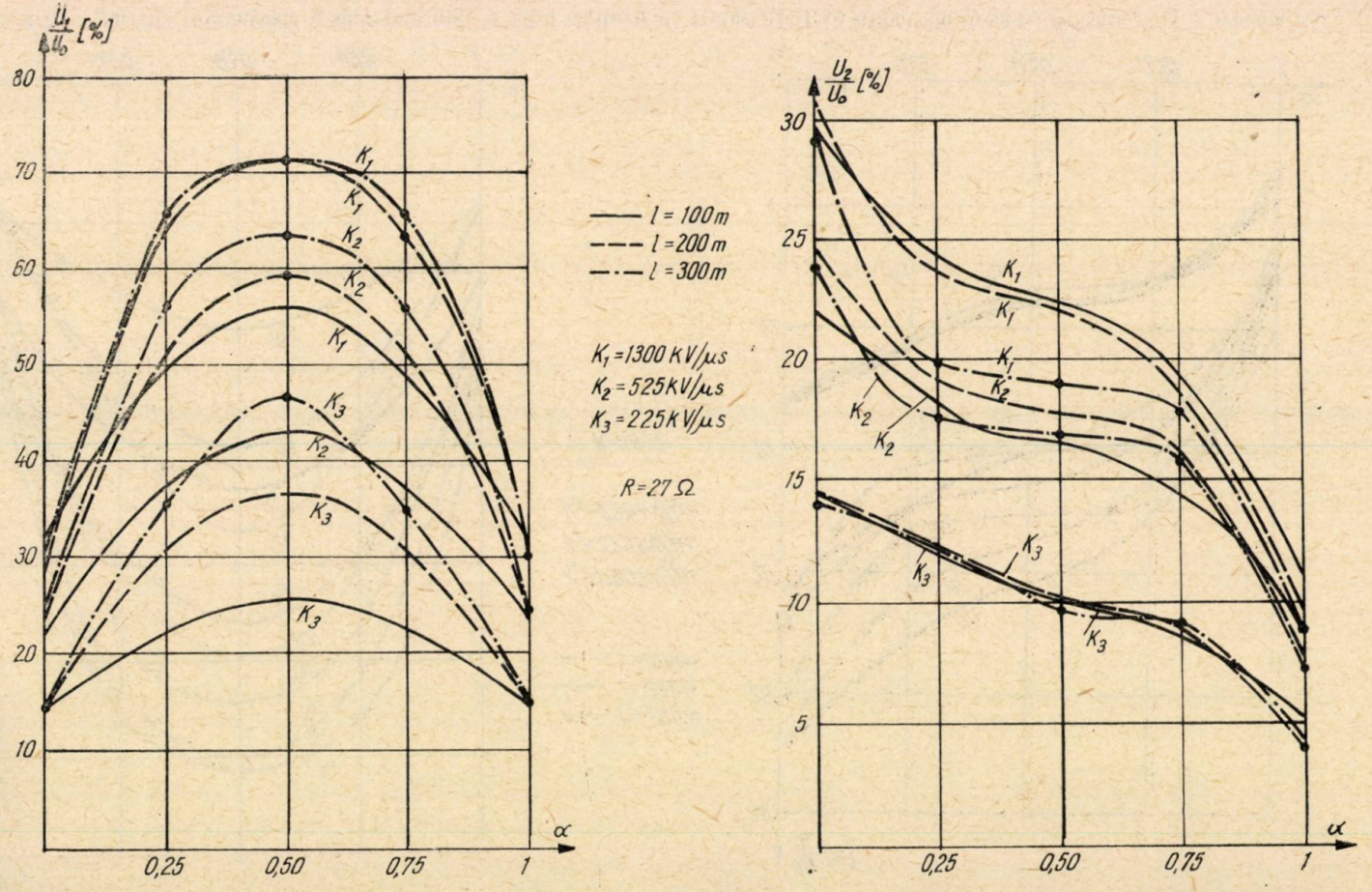


Fig. 3.8. — Variația procentuală a supratensiunii la locul loviturii de trăsnet [U_1] și stîlpul din dreapta loviturii [U_2] — schema *A*.

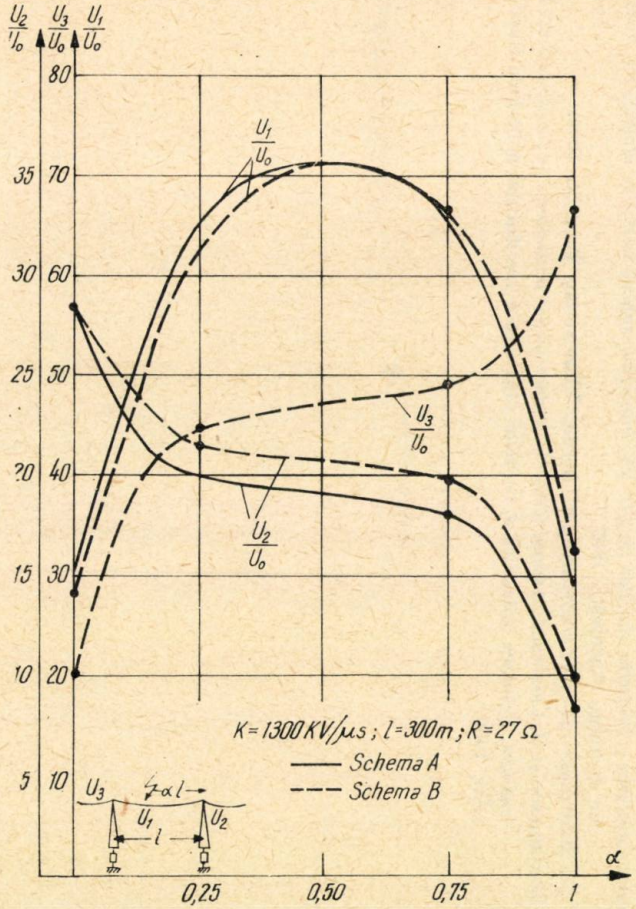


Fig. 3.9. — Variația comparativă a supratensiunilor la locul loviturii și în vîrful suporților.

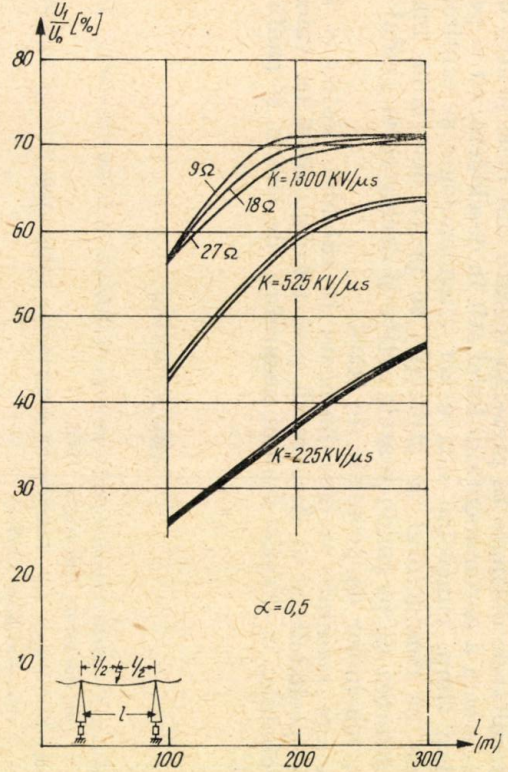


Fig. 3.10. — Variația cu distanța între suporți supratensiunii la locul loviturii.

— pentru aplicarea relaţiilor teoretice prezentate în capitolul 2 se poate folosi un calculator numeric care să permită suprapunerea a cît mai multe reflexii succesive.

Rezultatele obţinute în prezenta lucrare sînt utile pentru o dimensionare corectă a coronamentului liniei atît în deschidere, cît şi pe suport. În acelaşi timp, cunoscînd mai exact fenomenologic şi cantitativ procesele de pe conductorul de protecţie, se poate determina mai precis supratensiunea de pe conductoarele active şi deci aprecia gradul de siguranţă a schemelor de protecţie de staţii.

Aceste rezultate trebuie îmbinate în calculul protecţiei liniei cu aspectul probabilistic al descărcării prin trăsnet, adică cu valorile cele mai probabile, în diverse regiuni geografice, de curent şi pantă a trăsnetului.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Drăgan, *Folosirea cablurilor pentru protecţia instalaţiilor de înaltă tensiune (3—10 kV)*, teză de doctorat, Bucureşti, 1958.
2. Tomiama Fudzitaka ş.a., *Issledovanie grozozasciti v elektriceskih sistemah Japonii*, CIGRE, referatul 332, 1958.
3. M. V. Kostenko, *Atmosferntie perenapriajenia i grozozaşcita elektriceskih ustanovok*, GEI, 1949.
4. R. Rudenberg, *Elektrische Wanderwellen*, Berlin, Springer-Verlag, 1962.
5. Dorin Cristescu, *Protecţia staţiilor de 110 kV împotriva supratensiunilor atmosferice*, teză de doctorat, Bucureşti, 1967.
6. L. L. Sirotinski, *Hochspannungstechnih*, Berlin, VEB-Verlag Technik, 1964.
7. C. Dinculescu şi D. Cristescu, *Asupra formei supratensiunilor atmosferice pe liniile de înaltă tensiune*, Sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice a Institutului politehnic Bucureşti, 1969.

CALCULUL INDUCTANŢELOR ÎNFĂŞURĂRILOR DE CURENT ALTERNATIV PLANE

DE

A. NICOLAIDE şi E. DÎMBOIU

621.313.39.025.3

Maşinile electrice liniare de diferite tipuri: maşini asincrone, pompe electromagnetice plane etc., sînt prevăzute cu înfăşurări plane. Acestea derivă din înfăşurările cilindrice clasice, dar au particularităţi care le deosebesc de acelea în mod sensibil. Deosebirea constă, în esenţă, în aceea că inductanţele au în general valori diferite pe diferitele faze, datorită circuitului magnetic întrerupt. De aceea aceste înfăşurări introduc nesimetrii care pot fi importante. Prezintă interes în special înfăşurările trifazate. Această problemă, care nu a fost analizată în literatură, este examinată în lucrarea de faţă şi se trag concluzii referitoare la tipurile de înfăşurare cele mai convenabile din punctul de vedere al comportării maşinii.

Înfăşurările de curent alternativ dispuse pe statoarele sau rotoarele maşinilor electrice uzuale au fost mult studiate în literatură şi sînt bine cunoscute.

În domeniul maşinilor electrice au apărut în ultimii ani preocupări noi, legate de dezvoltarea unor noi tipuri de maşină. Astfel de maşini sînt : a) motoarele asincrone plane cu mişcare liniară, utilizate în acţionări electrice de poduri rulante, în tracţiunea electrică sau ca vibratoare; b) pompele electromagnetice plane de inducţie polifazate. Caracteristic acestor maşini este existenţa unui stator desfăşurat de maşină asincronă, care reprezintă un circuit magnetic deschis. Pe acest stator este dispusă o înfăşurare polifazată, care nu este altceva decît o înfăşurare de maşină asincronă desfăşurată.

La înfăşurările maşinilor de curent alternativ uzuale, pe care le vom denumi înfăşurări cilindrice, inductanţele au aceeaşi valoare pentru fiecare fază, în timp ce la înfăşurările maşinilor de curent alternativ plane, pe care le vom denumi înfăşurări plane, inductanţele au în general valori diferite pe diferitele faze, de aici şi comportarea diferită, anume nesimetria pe care o introduc aceste înfăşurări. Inegalitatea inductanţelor se datoreşte caracterului întrerupt, adică de lungime finită a circuitului mag-

netic pe care este dispusă înfăşurarea. Dacă lungimea circuitului magnetic plan ar fi infinită, ceea ce s-ar obţine prin desfăşurarea unui stator cu diametrul infinit de mare, inductanţele înfăşurării plane ar fi egale între ele.

Problema înfăşurărilor plane a fost tratată în literatură, dar relativ puţin. Majoritatea studiilor asupra acestui subiect sînt sintetizate în lucrările lui Bromkamp [1], Laithwaite [2] şi Timmel [3]. În lucrarea [2], relativ recentă, se aduc contribuţii interesante, şi anume s-au stabilit curenţii pe fazele cîtorva tipuri de înfăşurare, folosind metoda denumită „pas cu pas", fără a se aborda însă calculul inductanţelor înfăşurării. Ca urmare, cu modul de tratare din lucrarea [2] nu s-a rezolvat problema stabilirii parametrilor înfăşurării, deci a elementelor care determină comportarea înfăşurării. De asemenea, în cadrul metodei „pas cu pas" este nevoie să se rezolve un număr de ecuaţii egal cu numărul de spire, ceea ce necesită un volum mare de calcule şi nu permite să se deducă concluzii prea generale. De fapt nici nu s-a stabilit expresia curenţilor decît pentru cazul unor înfăşurări bifazate simple, fără a se analiza calculul curenţilor la înfăşurările trifazate, adică la înfăşurările cele mai utilizate. Se arată că la înfăşurările bifazate circuitul magnetic deschis introduce nesimetrii şi se studiază un anumit caz. Nu se arată însă dacă la înfăşurările trifazate apar nesimetrii şi dacă aceste nesimetrii sînt importante sau în ce măsură tipul înfăşurării influenţează nesimetria.

De asemenea în literatură [3] se recomandă utilizarea unor înfăşurări care, după cum se arată în continuare, nu dau totdeauna cele mai bune performanţe.

În lucrarea de faţă se vor studia diferitele tipuri de înfăşurări plane care se utilizează, şi anume se vor determina pentru aceste înfăşurări inductanţele corespunzătoare fluxului magnetic din întrefier. Inductanţele corespunzătoare fluxului de scăpări în crestătură, în întrefier şi la capetele de bobină, se calculează asemănător ca la maşina asincronă, iar inductanţa complementară corespunzătoare liniilor de cîmp magnetic care se închid pe la capetele armăturii pot fi calculate prin metodele cunoscute [4] deoarece altfel nu se poate cunoaşte comportarea maşinii. Prin urmare, se vor examina tocmai acele aspecte importante pentru calculul şi utilizarea maşinii asincrone plane care nu au fost analizate în literatură pînă acum.

1. ÎNFĂŞURĂRI BIFAZATE

În scopul de a expune principiul metodei utilizate în continuare pentru calculul inductanţelor înfăşurării plane, se vor examina cîteva înfăşurări bifazate simple, primele două fiind tocmai cele a căror schemă este dată în lucrarea [2]. Spre deosebire de lucrarea [2], unde se tratează studiul înfăşurării considerînd fiecare spiră separat, în lucrarea de faţă se va trata înfăşurarea considerînd ecuaţiile în ansamblu, ceea ce va face posibil să se definească fiecare fază prin parametrii respectivi.

Se vor considera numai înfăşurări cu o singură cale de curent. Înfăşurările cu mai multe căi de curent s-ar putea folosi, dar numai în cazul unei simetrii perfecte a înfăşurării. Dacă nu este realizată simetria

perfectă a înfășurării, ceea ce este cazul la înfășurările plane, se poate arăta destul de ușor [2] că pot apărea curenți de circulație care fac imposibilă acceptarea unei astfel de înfășurări. De aceea se evită în general utilizarea unor înfășurări cu căi de curent în paralel.

În figura 1 este reprezentată o înfășurare bifazată cilindrică, iar în figura 2 este reprezentată înfășurarea bifazată plană, care derivă din prima; se vede că apare un dinte în plus.

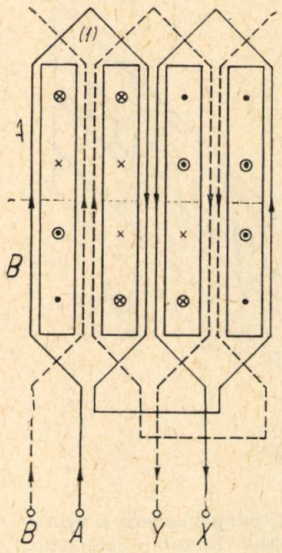


Fig. 1. — Schema desfășurată a unei înfășurări bifazate cilindrice cu o pereche de poli.

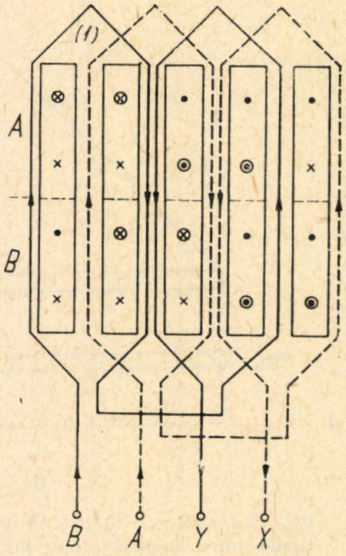


Fig. 2. — Schema înfășurării bifazate plane cu un dinte în plus, care derivă din înfășurarea cilindrică reprezentată în figura 1.

Se vor stabili inductanțele proprii și mutuale ale înfășurărilor. Pe figură s-a reprezentat schematic fluxul magnetic produs de orice spiră prin fiecare dinte. S-au utilizat semnele convenționale obișnuite pentru a arăta sensul liniilor de cîmp magnetic asociate sensului curentului din spira care produce cîmpul magnetic respectiv. Ca urmare, fluxului produs de o spiră îi vor corespunde semne reprezentative de un sens în dinții înlănțuiți de acea spiră și semne reprezentative de sens contrar în ceilalți dinți. Pentru mai multă claritate, semnele reprezentative ale fluxului din dinții înlănțuiți de spiră vor fi încercuite, iar semnele reprezentative din ceilalți dinți pentru fluxul produs de aceeași spiră nu vor fi încercuite. Fiecărui semn reprezentativ al fluxului în dinte îi corespunde un anumit coeficient pe care îl vom denumi pondere. Fiecare pondere, făcînd abstracție de un factor constant pentru toți dinții, reprezintă fluxul printr-un dinte produs de o spiră.

În figura 1 ponderea semnelor aflate pe linia superioară reprezintă, făcînd abstracţie de un factor constant pentru o anumită valoare a curentului, fluxul produs de spira *1* prin fiecare dinte. Ca exemplu se va calcula valoarea acestor ponderi.

Pentru calculul fluxului magnetic prin dinţi se presupune cîmpul magnetic idealizat ca în figura 3, unde, în afara armăturii pe care este dispusă înfăşurarea, mai este o a doua armătură, prin care se închid liniile

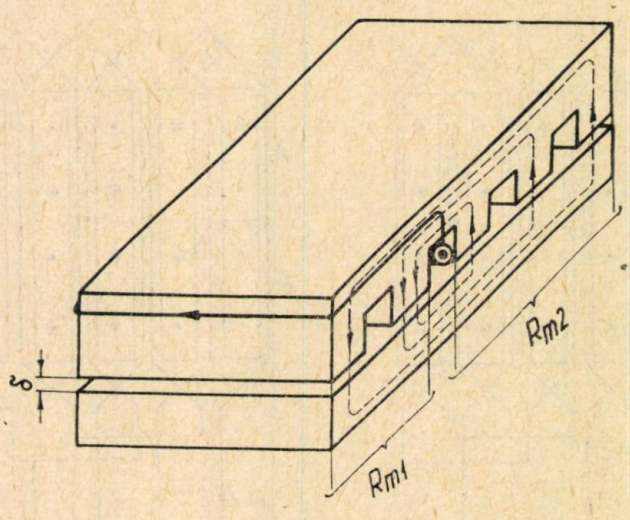


Fig. 3. — Schema idealizată a liniilor de cîmp magnetic şi armăturile unei maşini plane pentru calculul fluxului magnetic.

de cîmp magnetic. Se admite că liniile de cîmp sînt perpendiculare pe suprafaţa dinţilor şi se neglijează liniile de cîmp care se închid pe la părţile laterale ale armăturilor, deoarece se studiază inductanţele corespunzătoare fluxului magnetic din întrefier. Permeabilitatea magnetică a oţelului se presupune infinită. Această schemă este necesară pentru calculul fluxului magnetic atît pentru înfăşurările bifazate, cît şi pentru cele trifazate, indiferent de numărul de dinţi. De exemplu, în figura 3 s-a considerat o armătură cu cinci dinţi.

Fluxul produs de spira *1* din figura 1 prin cei doi dinţi înlănţuiţi de spiră considerînd schema idealizată a liniilor de cîmp din figura 3 este

$$\Phi = \frac{wi}{R_m} = \frac{i}{\frac{\delta}{\mu_0 2S} + \frac{\delta}{\mu_0 2S}} = \frac{\mu_0 S}{\delta} i,$$

unde $w = 1$ este numărul de spire, δ — lungimea întrefierului, S — aria secţiunii transversale a unui dinte şi R_m — reluctanţa magnetică.

Fluxul printr-un dinte este

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 S}{\delta} i.$$

Ponderea semnelor încercuite este $\frac{1}{2}$. Ponderea semnelor neîncercuite este aceeași, deoarece numărul de dinți prin care se închid liniile de cîmp magnetic este egal cu numărul de dinți din care ies liniile de cîmp magnetic. Factorul constant, același pentru toți dinții, este $\frac{\mu_0 S}{\delta} i$. Analog s-a reprezentat fluxul magnetic produs de celelalte spire și s-au obținut aceleași ponderi.

Calculul inductanțelor proprii și mutuale, de exemplu pentru faza a, se face cu relațiile $L_{ua} = \frac{\psi_{ua}}{i_a}$; $L_{ab} = \frac{\psi_{ab}}{i_b}$. Calculul fluxului magnetic care înlănțuie o fază, adică, de exemplu, ψ_{ua} și ψ_{ab}, se efectuează ținînd seama că, pentru un anumit sens de parcurgere a fazei, fluxurile al căror sens este asociat cu sensul de parcurgere se iau cu semnul plus, iar în caz contrar se iau cu semnul minus.

Fluxul produs de faza a care înlănțuie aceeași fază este

$$\psi_{ua} = 4 \frac{\mu_0 S}{\delta} i_a.$$

Rezultă inductanța proprie a fazei a, $L_{ua} = \frac{\psi_{ua}}{i_a} = 4 \frac{\mu_0 S}{\delta}$. Analog se obține inductanța proprie a fazei b, și anume $L_{ub} = \frac{\psi_{ub}}{i_b} = 4 \frac{\mu_0 S}{\delta}$. Fluxul magnetic înlănțuit de faza a și produs de faza b este

$$\psi_{ab} = 0.$$

Analog

$$\psi_{ba} = 0.$$

Deci, avînd în vedere că $L_{ab} = \frac{\psi_{ab}}{i_a}$; $L_{ba} = \frac{\psi_{ba}}{i}$, rezultă

$$L_{ab} = L_{ba} = 0,$$

adică inductanțele mutuale sînt nule.

În cazul înfășurării din figura 2 se obține ponderea semnelor în mod analog ca în cazul figurii 1. Astfel fluxul produs de spira *1* este

$$\Phi = \frac{wi}{R_m} = \frac{i}{R_{m_1} + R_{m2}} = \frac{i}{\frac{\delta}{\mu_0 2S} + \frac{\delta}{\mu_0 3S}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\mu_0 S}{\delta} i.$$

Ponderea semnelor încercuite de pe linia superioară este $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$, deoarece fluxul corespunzător se repartizează în doi dinţi de secţiune transversală egală. Ponderea semnelor neîncercuite este $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. deoarece acelaşi flux se repartizează în trei dinţi cu secţiune transversală egală. Factorul constant, acelaşi pentru toţi dinţii, este $\frac{\mu_0 S}{\delta} i$.

Ponderea semnelor reprezentative din figura 2 este dată în tabela 1.

Tabela 1

Ponderea semnelor reprezentative pentru fluxurile din figura 2

Linia \ Semnul	⊗	◉	×	●	Faza bobinei care prodnce fluxul
1	$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{5}$	*A*
2		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		*A*
3	$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{5}$	*B*
4		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		*B*

Se obţine

$$\psi_{ua} = \frac{\mu_0 S}{\delta}\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\right) i = \frac{\mu_0 S}{\delta} 4i,$$

$$\psi_{ab} = \psi_{ba} = \frac{\mu_0 S}{\delta}\left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) i = \frac{\mu_0 S}{\delta} i.$$

Rezultă

$$L_{ua} = 4\frac{\mu_0 S}{\delta},$$

$$L_{ab} = L_{ba} = \frac{\mu_0 S}{\delta},$$

deci

$$\frac{L_{ab}}{L_{ua}} = \frac{1}{4}.$$

În figura 4 este reprezentată de asemenea o înfășurare bifazată cilindrică, iar în figura 5 înfășurarea plană care derivă din prima; se vede că și aici apare un dinte în plus.

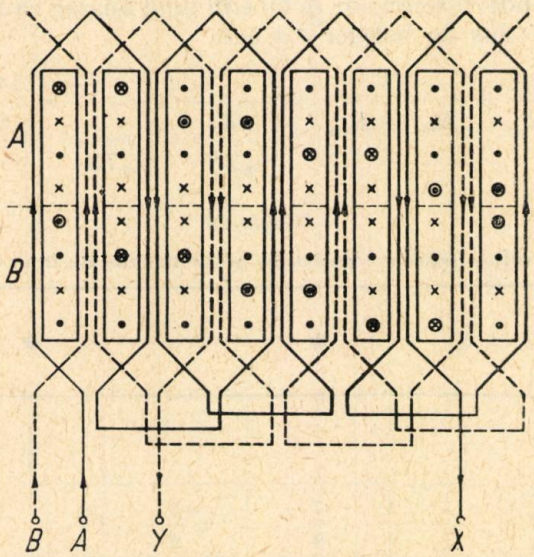


Fig. 4. — Schema desfășurată a unei înfășurări bifazate cilindrice cu două perechi de poli.

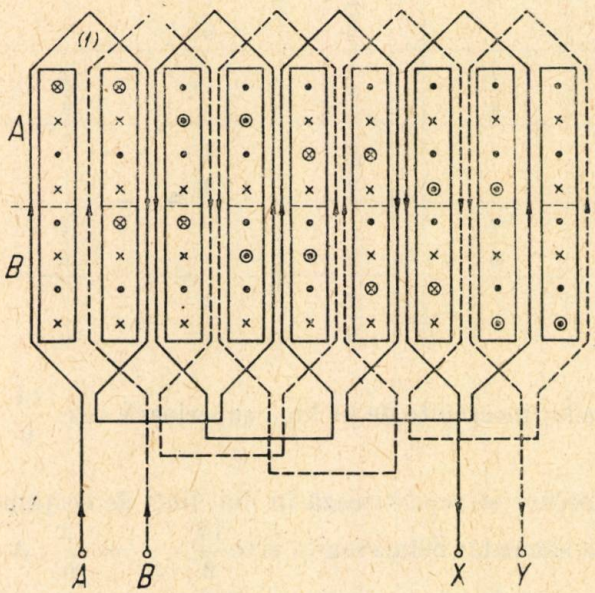


Fig. 5. — Schema înfășurării bifazate plane cu un dinte în plus, care derivă din înfășurarea cilindrică reprezentată în figura 4.

Pentru indicarea fluxurilor în dinţi s-a folosit acelaşi mod de reprezentare ca mai înainte. Ponderea semnelor prin care s-au reprezentat fluxurile în dinţii din figura 5 este dată în tabela 2.

Calculul ponderii semnelor se face în mod analog ca în cazul figurii 2. Astfel, fluxul produs de bobina *1 a* este

$$\Phi = \frac{wi}{R_m} = \frac{i}{R_{m_1} + R_{m_2}} = \frac{i}{\frac{\delta}{\mu_0 2S} + \frac{}{\mu_0 7S}} = \frac{14}{9}\frac{\mu_0 S}{\delta} i.$$

Tabela 2

Ponderea semnelor reprezentative pentru fluxurile din figura 5

Semnul / Linia	⊗	◉	×	●	Faza bobinei care produce fluxul
1	$\frac{7}{9}$			$\frac{2}{9}$	*A*
2		$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$		*A*
3	$\frac{7}{9}$			$\frac{2}{9}$	*A*
4		$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$		*A*
5	$\frac{7}{9}$			$\frac{2}{9}$	*B*
6		$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$		*B*
7	$\frac{7}{9}$			$\frac{2}{9}$	*B*
8		$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$		*B*

Ponderea semnelor încercuite de pe linia superioară este $\frac{14}{9} \cdot \frac{1}{2}$, deoarece fluxul corespunzător se repartizează în doi dinţi de secţiune transversală egală. Ponderea semnelor neîncercuite este $\frac{14}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{9}$, deoarece acelaşi flux se repartizează în şapte dinţi cu secţiune transversală egală. Factorul constant, acelaşi pentru toţi dinţii, este, ca şi mai înainte, $\frac{\mu_0 S}{\delta} i$.

Efectuînd calcule analoge celor de la exemplul precedent, se obține

$$\psi_{ua} = \frac{\mu_0 S}{\delta} 8i; \quad \psi_{ab} = \frac{\mu_0 S}{\delta} i,$$

$$L_{ua} = 8\frac{\mu_0 S}{\delta}; \quad L_{ab} = L_{ba} = \frac{\mu_0 S}{\delta},$$

deci

$$\frac{L_{ab}}{L_{ua}} = \frac{1}{8}.$$

În general, pentru o înfășurare bifazată plană cu $q = 1$ crestături pe pol și fază și Z dinți, derivată dintr-o înfășurare cilindrică cu $Z - 1$ dinți, avem

$$\frac{L_{ab}}{L_{ua}} = \frac{1}{Z-1}.$$

Desigur, cu cît numărul total de dinți este mai mare, cu atît prezența unui singur dinte în plus are un efect mai mic.

Din cele prezentate referitor la înfășurările bifazate plane, rezultă:

a) înfășurările plane deduse din înfășurările cilindrice au un dinte în plus care conduce la apariția unei inductanțe mutuale între faze diferită de zero, care determină nesimetria curenților;

b) datorită faptului că inductanța mutuală este diferită de zero din cauza existenței unui dinte în plus față de înfășurarea cilindrică din care derivă, urmează că în general la aceste înfășurări apare o nesimetrie a curenților. Nesimetria va fi cu atît mai pronunțată, cu cît inductanța mutuală va fi mai mare. Cu cît numătul total de dinți al armăturii este mai mare, cu atît inductanța mutuală și nesimetria vor fi mai mici.

La o înfășurare plană nu este neapărat necesar să se prevadă un dinte în plus față de înfășurarea cilindrică din care derivă. Înfășurarea plană derivată din înfășurarea cilindrică din figura 4 poate fi realizată nu numai ca în figura 5, cu un dinte în plus, dar și ca în figura 6, fără un dinte în plus. În acest caz însă, inductanța de scăpări pe diferitele faze este diferită, de asemenea și rezistența; modificarea nu este însă prea pronunțată. În cazul înfășurării din figura 6, inductanța mutuală rezultă nulă dacă se presupune cazul idealizat în care reluctanța întrefierului din fața fiecărui dinte are aceeași valoare. În realitate însă, reluctanța întrefierului dinților de la extremități este mai mică, deoarece aici se închid linii de cîmp magnetic și pe la margini. Înfășurarea din figura 6 prezintă

totuşi avantajul de a determina o nesimetrie mai mică decît celelalte tipuri de înfăşurare, avantajul fiind mai pronunţat atunci cînd numărul total de dinţi este mic.

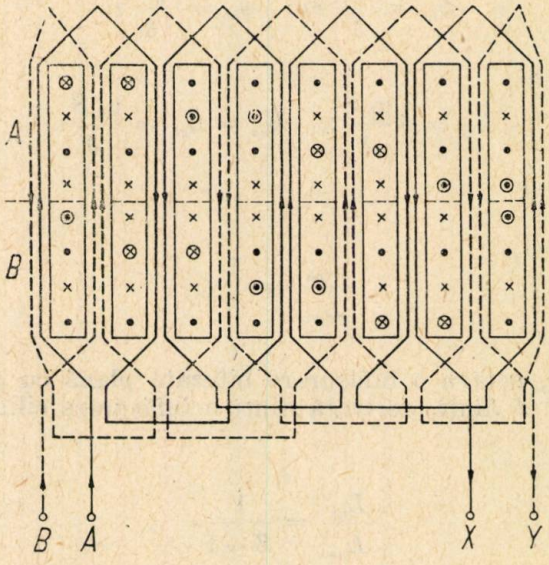


Fig. 6. — Schema înfăşurării bifazate plane fără un dinte în plus, care derivă din înfăşurarea cilindrică reprezentată în figura 4.

2. ÎNFĂŞURĂRI TRIFAZATE

Problema înfăşurărilor trifazate a fost foarte sumar tratată în lucrarea [2]. Nu s-au calculat parametrii înfăşurării, nu s-au examinat diferitele tipuri de înfăşurări plane cunoscute şi nu s-a cercetat nesimetria pe care o introduc.

În continuare se vor examina diferite tipuri de înfăşurări plane cunoscute, luînd ca bază înfăşurarea cilindrică din figura 7.

În figura 8 este reprezentată o înfăşurare plană care derivă din înfăşurarea reprezentată în figura 7. Acest mod de a obţine înfăşurarea plană din înfăşurarea cilindrică presupune însă introducerea unor dinţi suplimentari, în cazul de faţă şase dinţi.

Se vor stabili inductanţele proprii şi mutuale ale acestei înfăşurări, folosind metoda şi notaţiile introduse la înfăşurările bifazate. Ponderea semnelor reprezentative ale fluxului produs în dinţi este dată în tabela 3. Efectuînd calculele în modul arătat, rezultă inductanţele proprii şi mutuale :

$$L_{aa} = L_{ab} = L_{ac} = 110\,\frac{\mu_0 S}{\delta},$$

$$L_{ab} = -16\,\frac{\mu_0 S}{\delta}\ ;\ L_{bc} = L_{ca} = -62\,\frac{\mu_0 S}{\delta}.$$

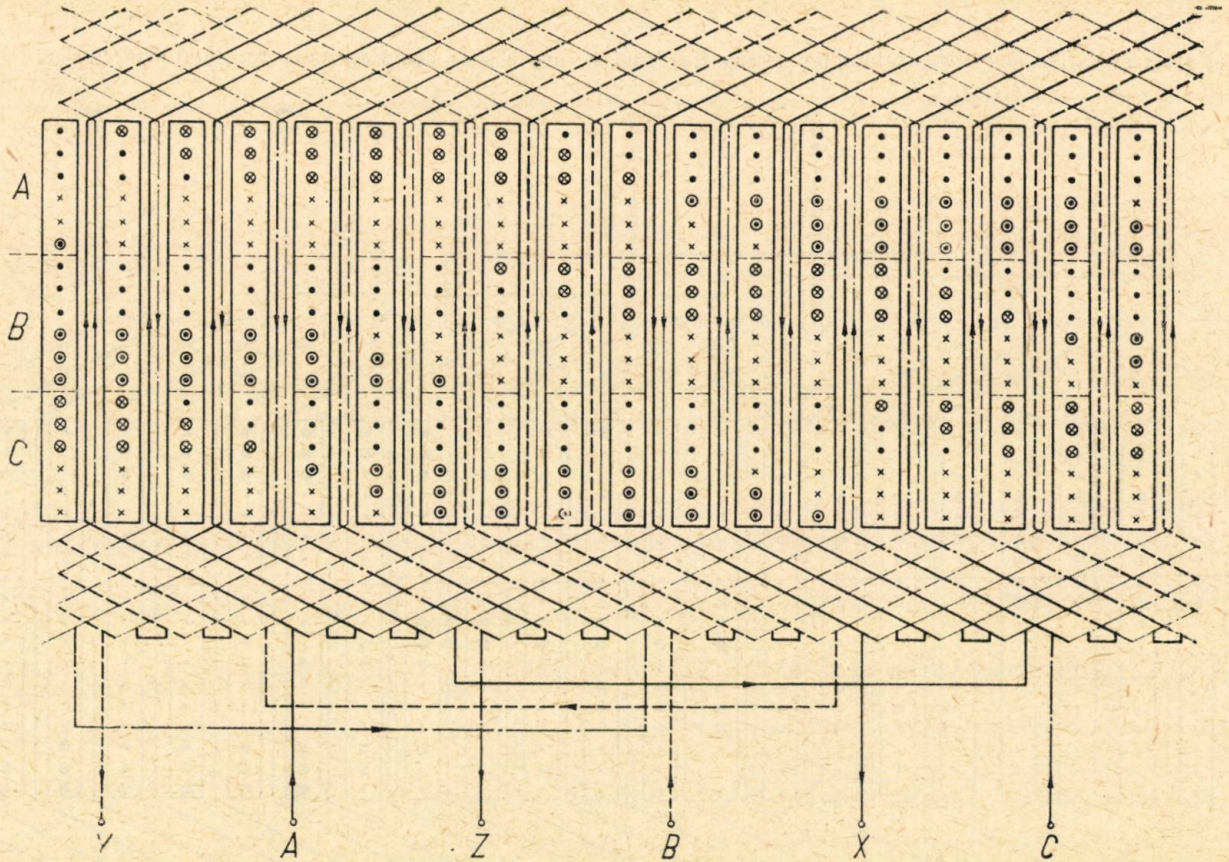


Fig. 7. — Schema desfășurată a unei înfășurări trifazate cilindrice cu datele: $Z = 18$ dinți; $p = 1$; $q = 3$ crestături pe pol și fază; $y = \frac{7}{9} y_\tau$ — pasul înfășurării.

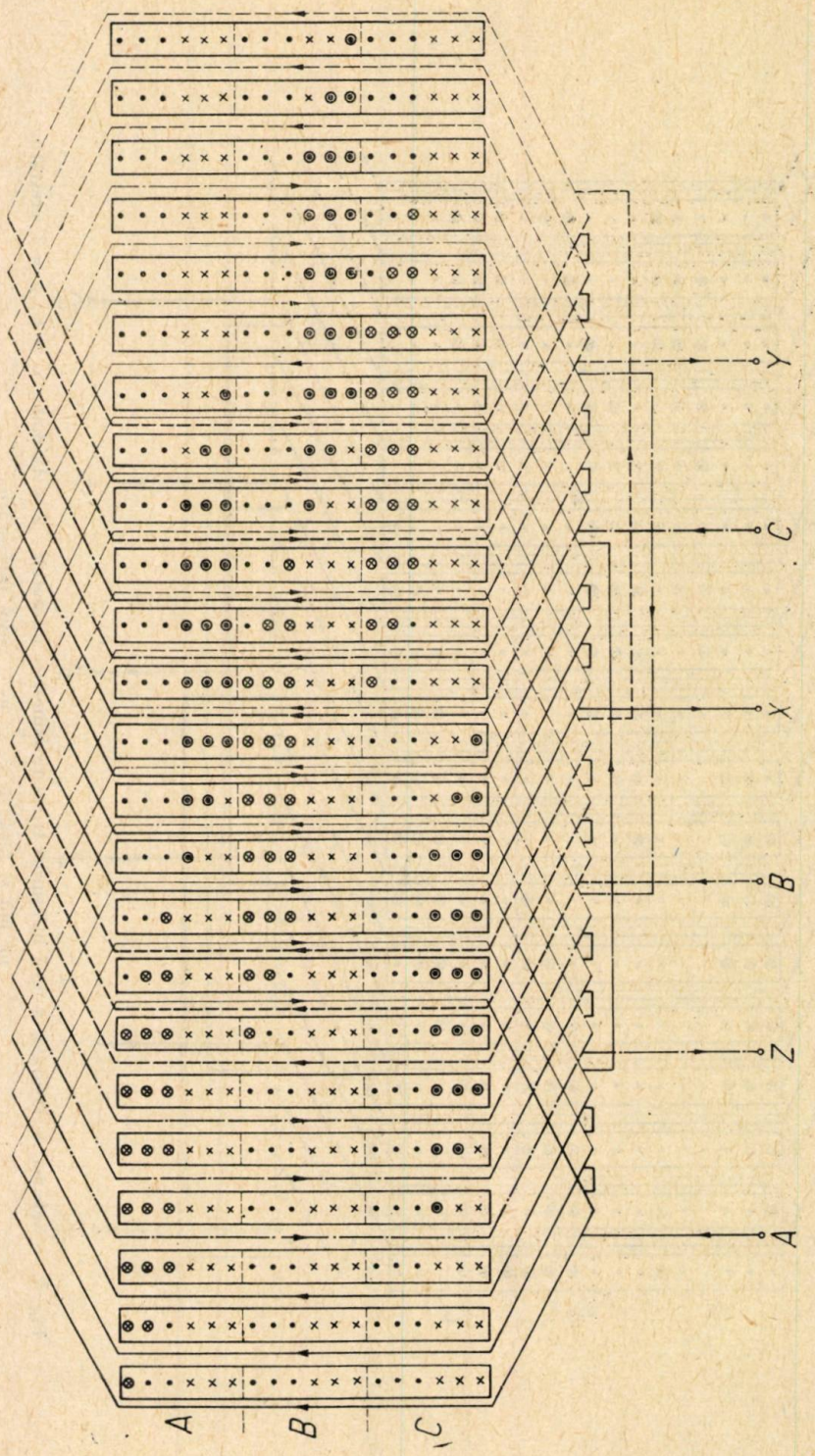


Fig. 8. — Schema unei înfășurări trifazate plane cu șase dinți în plus, care derivă din înfășurarea cilindrică reprezentată în figura 7.

Tabela 3

Ponderea semnelor reprezentative pentru fluxul din figura 8

Linia \ Semnul	⊗	◉	×	●	Faza bobinei care produce fluxul
1	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*A*
2	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*A*
3	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*A*
4		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*A*
5		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*A*
6		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*A*
7	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*B*
8	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*B*
9	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*B*
10		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*B*
11		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*B*
12		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*B*
13	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*C*
14	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*C*
15	$\frac{17}{24}$			$\frac{7}{24}$	*C*
16		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*C*
17		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*C*
18		$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$		*C*

Tabela 4

Ponderea semnelor reprezentative pentru fluxurile din figura 9

Linia \ Semnul	⊗	⊙	×	●	Faza bobinei care produce fluxul
1	$\frac{11}{12}$			$\frac{1}{12}$	*A*
2	$\frac{10}{12}$			$\frac{2}{12}$	*A*
3	$\frac{9}{12}$			$\frac{3}{12}$	*A*
4		$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$		*A*
5		$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$		*A*
6		$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$		*A*
7	$\frac{5}{12}$			$\frac{7}{12}$	*B*
8	$\frac{5}{12}$			$\frac{7}{12}$	*B*
9	$\frac{5}{12}$			$\frac{7}{12}$	*B*
10		$\frac{9}{12}$	$\frac{3}{12}$		*B*
11		$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$		*B*
12		$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$		*B*
13	$\frac{6}{12}$			$\frac{6}{12}$	*C*
14	$\frac{7}{12}$			$\frac{5}{12}$	*C*
15	$\frac{8}{12}$			$\frac{4}{12}$	*C*
16		$\frac{8}{12}$	$\frac{4}{12}$		*C*
17		$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$		*C*
18		$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$		*C*

În figura 9 este reprezentată altă înfășurare plană, care derivă de asemenea din înfășurarea cilindrică din figura 7. Acest mod de a obține înfășurarea plană din înfășurarea cilindrică presupune eliminarea unor dinți; în cazul de față fiind șase dinți.

Se vor stabili inductanțele proprii și mutuale ale acestei înfășurări, folosind metoda și notațiile introduse mai înainte. Ponderea semnelor reprezentative ale fluxului produs în dinți este dată în tabela 4.

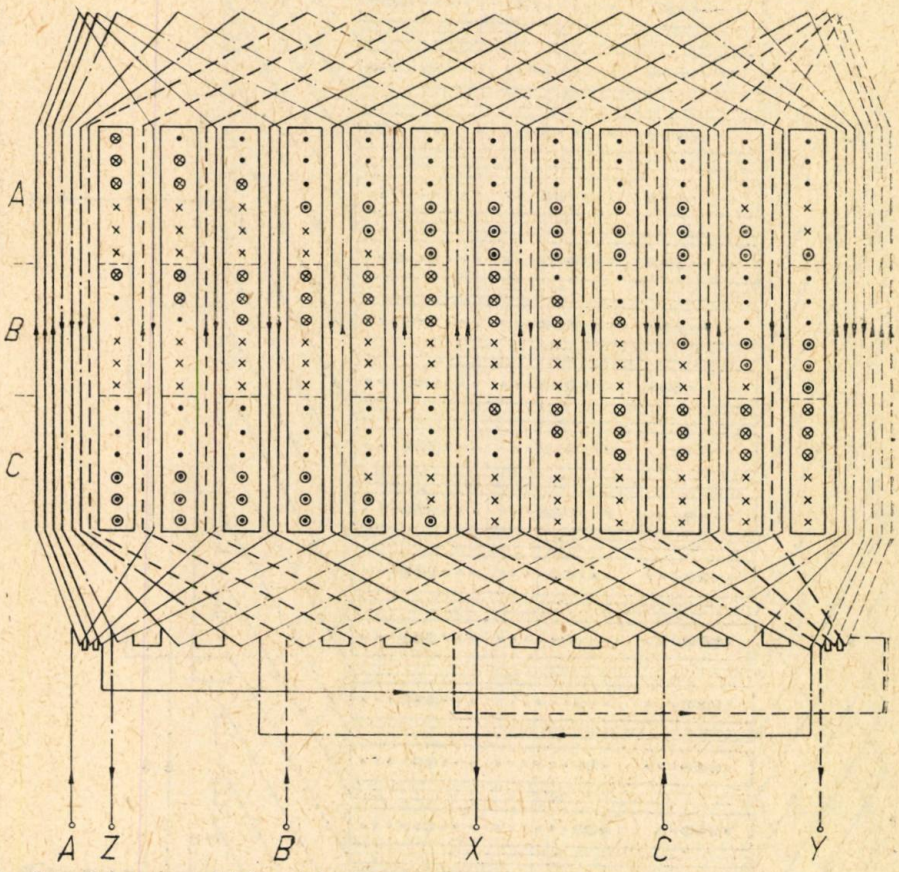


Fig. 9. — Schema unei înfășurări trifazate plane cu șase dinți mai puțini, care derivă din înfășurarea cilindrică reprezentată în figura 7.

Efectuînd calculele, rezultă inductanțele proprii și mutuale:

$$L_{ua} = L_{ub} = \frac{603}{12} \cdot \frac{\mu_0 S}{\delta}; \quad L_{uc} = 82 \frac{\mu_0 S}{\delta},$$

$$L_{ab} = \frac{33}{12} \cdot \frac{\mu_0 S}{\delta}; \; L_{bc} = L_{ca} = -44 \frac{\mu_0 S}{\delta}.$$

În figura 10 este reprezentată încă o înfășurare plană, care derivă de asemenea din înfășurarea cilindrică din figura 7. Acest mod de a obține înfășurarea plană din înfășurarea cilindrică nu presupune modificarea

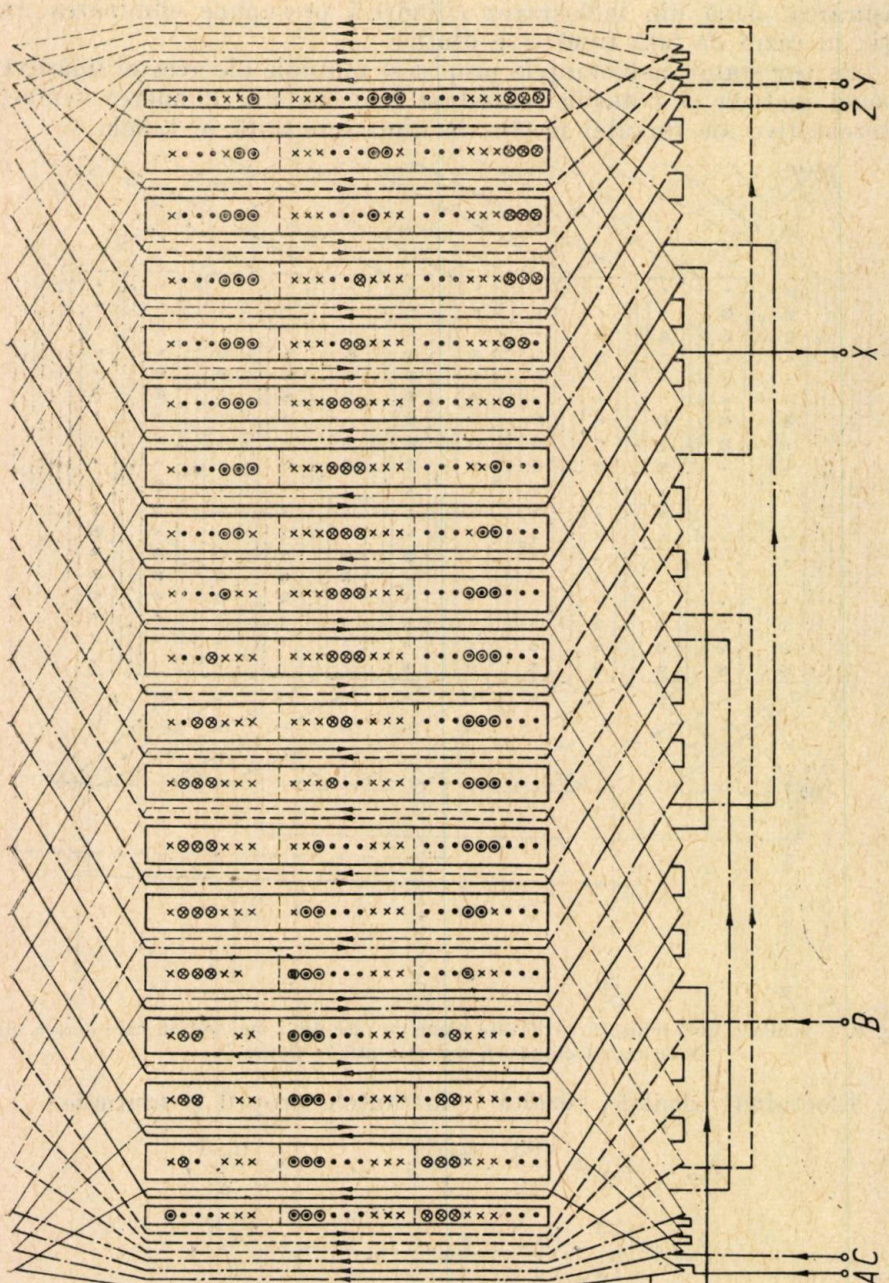


Fig. 10. — Schema unei înfășurări trifazate plane, care derivă din înfășurarea cilindrică din figura 7 fără a se modifica numărul de crestături.

numărului de crestături. Pentru a asigura simetria circuitului magnetic, lățimea dinților de la extremități este egală cu jumătate din lățimea celorlalți dinți. Conductoarele bobinelor din figura 7 care, din cauza secționării nu sînt închise la extremitățile desenului schemei desfășurate, se completează în cazul de față și se efectuează legăturile astfel încît să se păstreze sensul de parcurgere a înfășurării. Mănunchiurile care apar la extremitățile înfășurării plane se pot lăsa așezate la marginea dinților extremi, așa cum apare în figura 10, sau se pot îndoi deasupra jugului.

Se vor stabili și în acest caz inductanțele proprii și mutuale ale înfășurării, utilizînd metoda și notațiile introduse mai înainte. Ponderea semnelor reprezentative ale fluxului produs în dinți este arătată în tabela 5.

Tabela 5

Ponderea semnelor reprezentative pentru fluxurile din figura 10

Linia \ Semnul	⊗	⊙	×	●	Faza bobinei care produce fluxul
1		$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{18}$		A
2	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	A
3	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	A
4	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	A
5		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		A
6		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		A
7		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		A
8		$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{18}$		B
9		$\frac{12}{18}$	$\frac{6}{18}$		B
10		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		B
11	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	B
12	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	B

Tabela 5 (continuare)

Linia \ Semnul	⊗	⊙	×	●	Faza bobinei care produce fluxul
13	$\frac{11}{18}$			$\frac{7}{18}$	*B*
14		$\frac{15}{18}$	$\frac{3}{18}$		*B*
15		$\frac{16}{18}$	$\frac{2}{18}$		*B*
16		$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{18}$		*B*
17	$\frac{16}{18}$			$\frac{2}{18}$	*C*
18	$\frac{15}{18}$			$\frac{3}{18}$	*C*
19	$\frac{14}{18}$			$\frac{4}{18}$	*C*
20		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		*C*
21		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		*C*
22		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$		*C*
23	$\frac{12}{18}$			$\frac{6}{18}$	*C*
24	$\frac{13}{18}$			$\frac{5}{18}$	*C*
25	$\frac{14}{18}$			$\frac{4}{18}$	*C*

Efectuînd calculele, rezultă inductanțele proprii și mutuale :

$$L_{ua} = L_{ub} = L_{uc} = 110\,\frac{\mu_0 S}{\delta},$$

$$L_{ab} = L_{bc} = L_{ca} = -52\,\frac{\mu_0 S}{\delta}.$$

Pentru înfășurarea din figura 7 se găsesc aceleași valori, ceea ce se justifică prin aceea că în ambele cazuri pătura de curent și permeanțele sînt identice. Rezultă că în acest caz, cu ipotezele simplificatoare adoptate, nu ar apărea nici o nesimetrie. În realitate însă, după cum s-a menționat și la înfășurarea bifazată, din cauza liniilor de cîmp magnetic care se închid pe la extremitățile circuitului magnetic apare totuși o nesimetrie a curenților destul de însemnată, ceea ce s-a pus în evidență cu ocazia încercărilor experimentale descrise în lucrarea [6]. Pentru o exactitate mai mare este de aceea necesar să se includă și inductanțele corespunzătoare liniilor de cîmp magnetic de la extremitățile circuitului magnetic, ceea ce se poate face după lucrările [4] și [5]. Acest tip de înfășurare poate fi considerat în general avantajos față de cele precedente, deși în lucrarea recentă [3] se recomandă ca avantajoasă înfășurarea de tipul celei din figura 8.

În figurile 11 și 12 sînt date curbele tensiunii magnetice construite prin metoda grafică [7] pentru înfășurările din figurile 8 și 10. Curba tensiunii magnetice din figura 12 este valabilă și pentru înfășurarea din figura 7. Aceste curbe au fost construite la trei momente diferite, defazate în timp cu $\frac{\pi}{6}$.

Din examinarea curbelor tensiunii magnetice se constată că în toate cazurile se produce un cîmp mobil și că în toate cazurile într-un interval de timp exprimat prin $\frac{\pi}{6}$, adică $\frac{\pi}{6\omega}$ secunde, amplitudinea cîmpului parcurge aceeași distanță, și anume $\frac{\tau}{6}$, unde τ este pasul polar. Deci viteza cîmpului mobil este în toate cazurile examinate aceeași, ceea ce nu a fost precizat în literatură și de aceea a produs confuzii. Deci viteza cîmpului mobil este strict determinată de lungimea pasului polar. Pentru toate înfășurările examinate pasul polar fiind același, și viteza cîmpului mobil este aceeași. Ceea ce diferă este gradul de deformare al cîmpului mobil. Din acest punct de vedere, dacă se face abstracție de efectele de margine, care aici au fost neglijate, cea mai corespunzătoare este curba din figura 12, deci înfășurarea plană din figura 10. Dacă efectul de capăt poate fi important, atunci cea mai corespunzătoare în zona crestăturilor complet ocupate este curba din figura 11, deci înfășurarea din figura 8.

3. CONCLUZII

Din cele expuse în lucrare au rezultat concluziile expuse în continuare.

Schema unei înfășurări plane se poate deduce din aceea a unei înfășurări cilindrice. Din aceeași înfășurare cilindrică se pot obține diferite înfășurări plane în funcție de modul de dispunere al bobinelor de la extremități.

Înfășurările plane, spre deosebire de înfășurările cilindrice uzuale, introduc nesimetrii ale curenților și deformează cîmpul magnetic. Aceasta se datorește, în cazul înfășurărilor trifazate, faptului că inductanțele

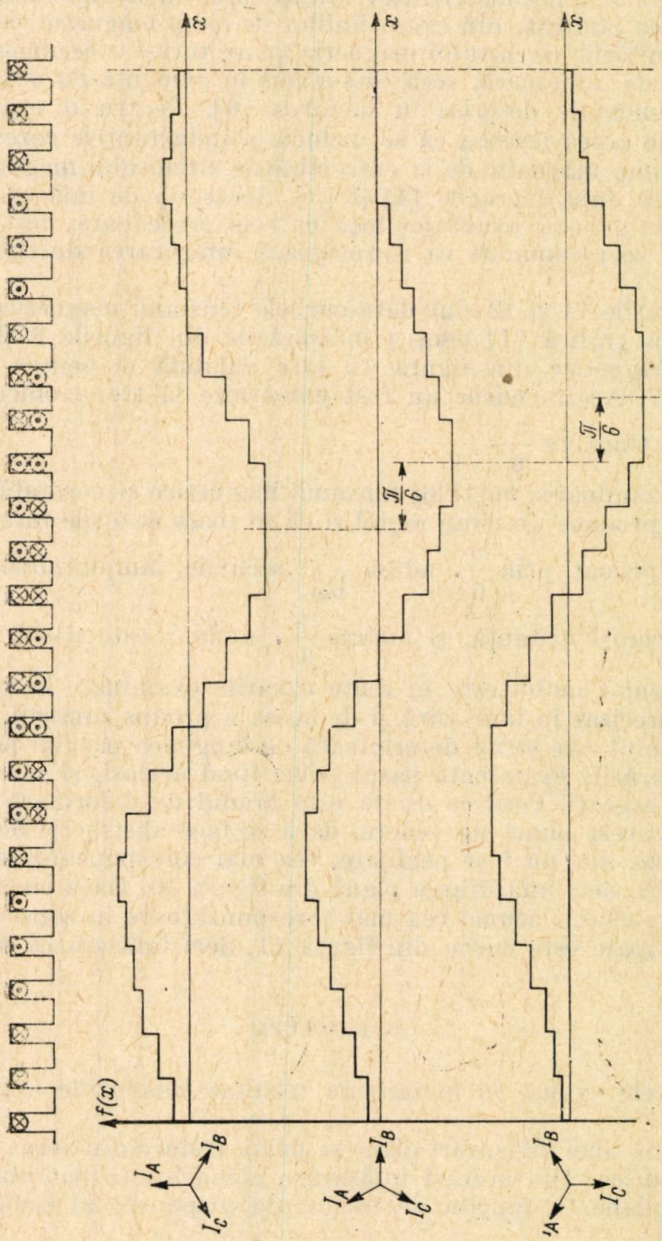


Fig. 11. — Curba tensiunii magnetice a înfășurării din figura 8 la trei momente.

mutuale dintre faze sînt diferite. În lucrare s-a stabilit o metodă de calcul care permite să se calculeze parametrii înfășurărilor mașinilor de inducție plane ținînd seama de nesimetria înfășurărilor, care în numeroase cazuri practice este deosebit de importantă. Această problemă nu a fost tratată în literatură.

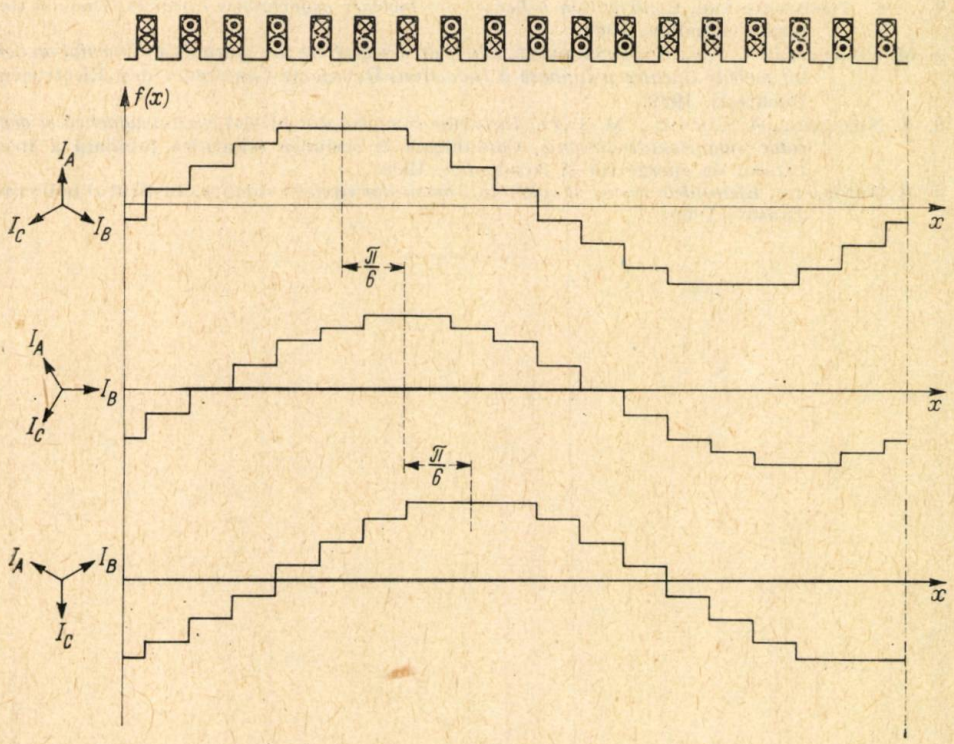


Fig. 12. — Curba tensiunii magnetice pentru înfășurările din figurile 7 și 10 la trei momente.

De asemenea s-a arătat că viteza cîmpului mobil este strict determinată de lungimea pasului polar și nu depinde de tipul înfășurării. Această precizare nu a fost indicată în literatură și de aceea s-au făcut asupra acestui punct diferite interpretări inexacte.

În ceea ce privește aprecierea comportării înfășurărilor trifazate plane, se constată că înfășurările deduse din cele cilindrice, fără a modifica numărul de crestături, introduc nesimetrii mici ale curenților și dau un cîmp puțin deformat dacă efectul de capăt al cîmpului magnetic este neglijabil. Dacă acest efect ar fi important, atunci înfășurările plane deduse din cele cilindrice prin introducerea unor dinți suplimentari asigură o formă satisfăcătoare a cîmpului magnetic pe o porțiune însemnată a armăturii.

BIBLIOGRAFIE

1. K. H. Bromkamp, *Elektromagnetische Wanderfelder Flacher Drehstrominduktoren und ihre elektrodynamischen Wirkungen*, Dissertation an der Technische Hochschule Aachen, 1961.
2. E. R. Laithwaite, *Induction Machines for Special Purposes*, Londra, 1966.
3. H. Timmel, *Der Wanderfeld — Linearmotor—eine bemerkenswerte Sonderform des Inducktionsmotors*, Elektrie, *10*, 398—402 (1968).
4. J. C. Sabonna-dière, *Contribution à l'étude des moteurs asynchrones linéaires*, Thèse de doctorat, Grenoble, 1969.
5. M. Poloujadoff, J. C. Sabonna-dière, *Etude du déséquilibre des courants d'alimentation dans un moteur linéaire polyphasé à induction*, Deuxième Conférence des Electriciens, București, 1969.
6. A. Nicolaide, A. Gogioiu, M. Țața, *Instalație compusă din pompă electromagnetică și generator magnetohidrodinamic*, Comunicare la sesiunea științifică jubiliară a Institutului de energetică al Academiei, 1969.
7. A. Nicolaide, *Elementele teoriei și calculului mașinilor electrice rotative*, Institutul politehnic Brașov, 1969.

MODELAREA UNUI SISTEM DE BARE COLECTOARE ÎN VEDEREA DETERMINĂRII PARAMETRILOR LINEICI R^*, L^*, C^*

DE

IOAN FETIȚĂ

621.316.35 : 621.3.011.1

Se prezintă o rețea *R.C.* pe care se poate modela cîmpul magnetic și cel electric al unui sistem de bare paralele și masive parcurse de curenți, în vederea determinării mărimilor parametrilor lineici R^*, L^*, C^* și a forțelor electrodinamice. Sînt prezentate de asemenea unele rezultate experimentale.

1. GENERALITĂȚI

Considerăm un sistem de conductoare paralele de conductibilitate electrică σ parcurse de curenți în tot spațiul considerat, permeabilitatea magnetică μ fiind constantă.

Cîmpul magnetic plan al acestui sistem se determină rezolvînd pentru domeniile planului cîmpului ecuației de forma [1]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t} + K \right), \tag{1.1}$$

unde A este singura componentă a vectorului potențial magnetic (după direcția perpendiculară pe planul (x, y) al cîmpului), iar K componenta potențială a cîmpului electric din bare, constantă în orice punct din secțiunea transversală a unui conductor.

Inducția magnetică e legată de mărimea $\overline{A}$ prin relația

$$\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathrm{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathrm{j}. \tag{1.2}$$

Exprimînd pe rînd valorile lui A în punctele 1, 2, 3, 4 în funcție de valorile lui A și a derivatelor lor parțiale din punctul O și însumînd re-

lațiile obținute cu neglijarea termenilor derivate parțiale de la ordinul 4 în sus, obținem

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_0=\frac{A_1+A_2+A_3+A_4-4A_0}{h^2}. \tag{1.3}$$

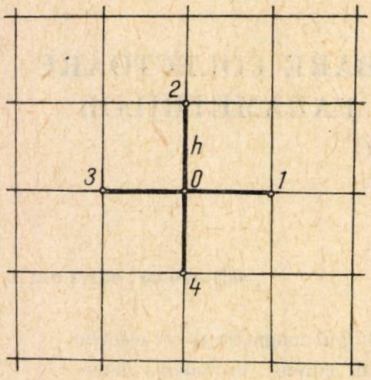


Fig. 1. — Modelul de discretizare a planului cîmpului.

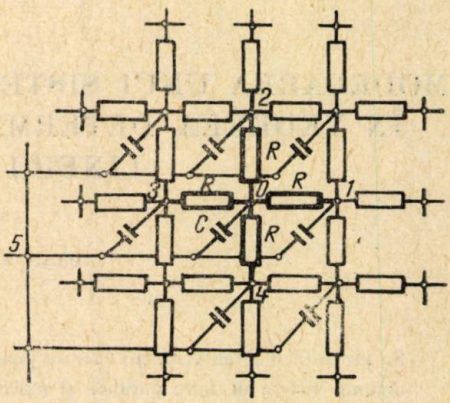


Fig. 2. — Analogul electric al discretizării din figura 1.

Ecuația (1.1) va avea deci forma aproximativă

$$\frac{A_1-A_0}{h^2}+\frac{A_2-A_0}{h^2}+\frac{A_3-A_0}{h^2}+\frac{A_4-A_0}{h^2}=\mu\cdot\sigma\cdot\left(\frac{\partial A_0}{\partial t}+K\right). \tag{1.4}$$

Cantitatea care se neglijează sistematic în exprimarea (1.3) este

$$\varepsilon_r=-\frac{h^2}{12}\cdot\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 A}{\partial y^4}\right)+\cdots \tag{1.5}$$

Considerînd o rețea electrică de forma celei din figura 2, pentru punctele 0, 1, 2, 3, 4 putem scrie următoarea relație dintre potențiale:

$$\frac{V_1-V_0}{R}+\frac{V_2-V_0}{R}+\frac{V_3-V_0}{R}+\frac{V_4-V_0}{R}=\frac{C}{K_t}\left(\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}V_5}{\mathrm{d}t}\right), \tag{1.6}$$

unde $K_t=\frac{\tau}{t}$, τ fiind timpul fenomenelor din rețeaua model.

Egalînd

$$\frac{RC}{k_t}=h^2\cdot\mu\cdot\sigma, \tag{1.7}$$

pe o rețea de tipul celei din figura 2 se poate modela o ecuație de tipul (1.1) dacă facem corespondențele

$$A_0=k_A\cdot V_0;\quad K=-\frac{\mathrm{d}V_5}{\mathrm{d}t}\cdot k_A. \tag{1.8}$$

Densitatea locală de curent J_0 se va exprima

$$J_0 = -\sigma \cdot k_A \cdot k_t \cdot \frac{d(V_0 - V_5)}{d\tau} = -K_A \cdot k_t \cdot \frac{\sigma}{C_0} \cdot i_0. \qquad (1.9)$$

Densitatea locală de curent din bare se obține deci prin măsurarea în model a unui curent capacitiv.

2. INTEGRATOR R.C. PENTRU STUDIUL BARELOR COLECTOARE ALE UNUI CIRCUIT MONOFAZAT

Considerăm un sistem de două bare paralele de secțiune dreptunghiulară (fig. 3), așezate simetric față de o axă mediană (y, y_1).

Datorită simetriei reciproce a conductorilor față de axa y y_1, pentru orice distanță d există o linie de cîmp magnetic care coincide cu direcția yy_1 (fig. 4), componenta inducției magnetice după axa xx_1 fiind pentru toate punctele de pe axa yy_1 egală cu zero :

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0. \qquad (2.1)$$

Altfel spus, A = const de-a lungul axei yy_1.

Datorită simetriei proprii a conductorilor față de axa xx_1, relația (2.1) va fi adevărată de asemenea pentru orice punct de pe această axă, xx_1 fiind perpendiculară pe toate liniile de cîmp care o traversează, astfel încît unul dintre semiplanele determinate de ea poate fi considerat ca fiind imaginea magnetică a celuilalt.

Observațiile făcute ne dau posibilitatea modelării doar a sfertului de plan xoy (cadranul 1), spectrele cîmpului avînd aceeași formă în cele patru cadrane.

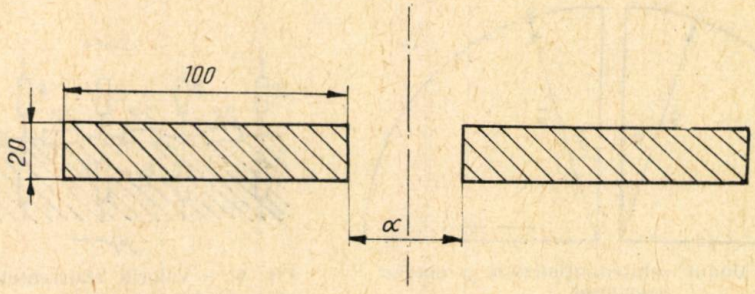


Fig. 3. — Dispunerea barelor colectoare.

Cu toate acestea, numărul rezistorilor necesari modelului e infinit de mare, neavînd nici o condiție de margine (dată, de exemplu, de o ecranare feromagnetică a barelor) care să limiteze întinderea modelului.

Dacă însă aplicăm spațiului $r > r_0$ o inversiune (2),

$$r' = \frac{r_0^2}{r}, \tag{2.2}$$

atunci cadranul 1 se modelează prin două rețele de rezistori egale ca

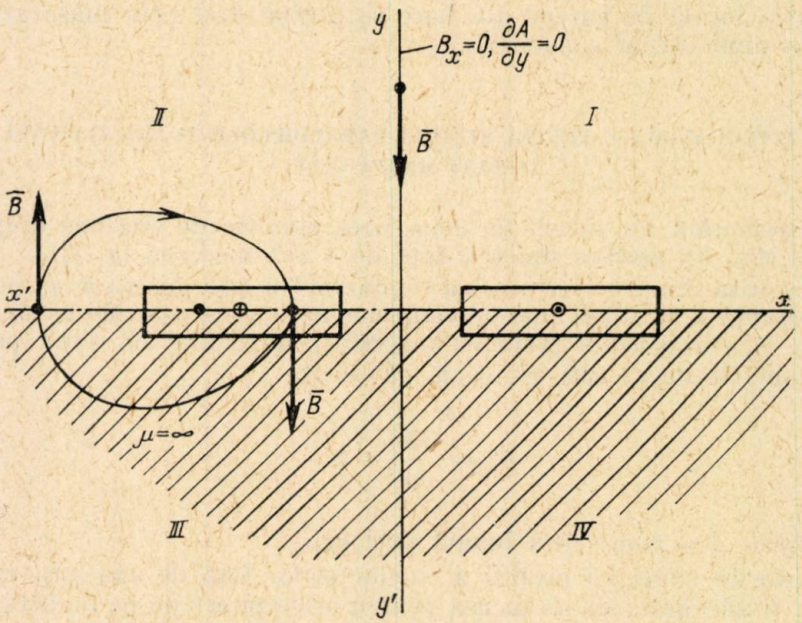


Fig. 4. — Punerea în evidență a simetriilor cîmpului magnetic după cele două axe xx', yy'.

întindere și valori, avînd punctele corespunzătoare arcului $r = r_0$, echipotențializate conform figurii 5.

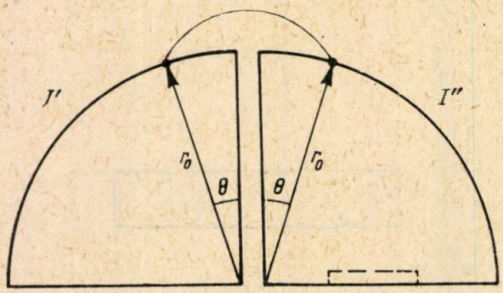


Fig. 5. — Modul echipotențializării punctelor modelului.

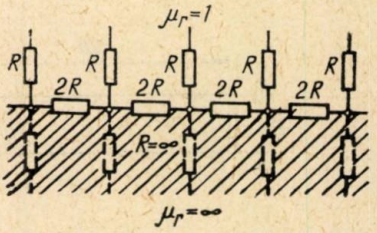


Fig. 6. — Valorile rezistențelor la limite de trecere dintr-un mediu cu $\mu_r = 1$ într-un mediu cu $\mu_r = \infty$.

Rezistorii dispuși de-a lungul axei oy au o rezistență egală cu zero, iar cei de-a lungul axei ox au o rezistență dublă față de cei din interiorul conturului modelului (fig. 6).

Valoarea nulă a rezistențelor rezultă din condiția (2.1), iar dublarea rezistențelor pe linia xx_1 reprezintă condiția necesară separării cadranului I de IV.

Dublarea se poate demonstra analitic, considerînd pe xx_1 ca linie de separație a două medii, dintre care unul are permeabilitatea magnetică finită, iar celălalt infinită (1).

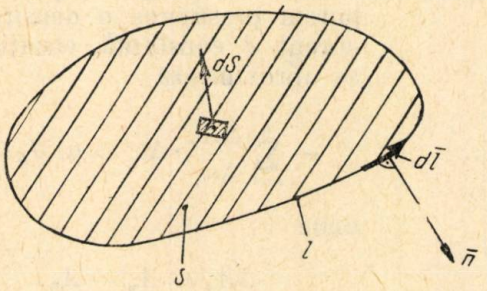


Fig. 7. — Explicativă la relația (2.4).

Pentru obținerea unui domeniu de variație a distanței dintre cele două căi de curent suficient de mare este necesară o rază de inversiune relativ mare și pentru un pas de modelare h mic sînt necesare pentru model un număr mare de rezistori. Există posibilitatea de a micșora acest număr prin schimbarea pasului de modelare pe anumite porțiuni în care nu sînt necesare măsurători, de exemplu pe porțiunea inversă a sfertului de plan.

Se poate folosi în acest scop o generalizare a dezvoltării în diferențe finite a laplaceeanului $\nabla^2 A$.

Ecuația lui Maxwell

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J} \tag{2.3}$$

se poate scrie sub forma integrală

$$\oint_l (\overline{H}\, \mathrm{d}\overline{l}) = \int_S (\overline{J} \cdot \mathrm{d}\overline{s}), \tag{2.4}$$

S fiind o suprafață din planul cîmpului delimitată de un contur l, iar $\mathrm{d}\overline{s}$ și $\mathrm{d}\overline{l}$ elementele de suprafață și de lungime aferente (fig. 7).

Ținînd cont că

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu}\overline{B} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{i} - \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{j}\right) = \frac{1}{\mu}[\operatorname{grad} A \times k], \tag{2.5}$$

membrul întîi al relației (2.4) devine

$$\oint_l (\overline{H}\, \mathrm{d}\overline{l}) = \frac{1}{\mu}\oint_l ([\operatorname{grad} A \times k]\, \mathrm{d}\overline{l}) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\oint_l (\operatorname{grad}\overline{A} \cdot \overline{n})\, \mathrm{d}l = -\frac{1}{\mu}\oint_l \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \mathrm{d}l \tag{2.6}$$

și deci ecuația (2.4) se poate scrie

$$-\oint_l \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \mathrm{d}l = \mu \cdot \int_S (\bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{s}). \tag{2.7}$$

Pentru un element de suprafață ΔS_0 delimitat de laturile Δl_ν ($\nu = 1,2, \ldots, n$), care are vecinătățile elementelor ΔS_ν (fig. 8) și pentru care putem presupune o densitate de curent J constantă, ecuația (2.7) se aproximează

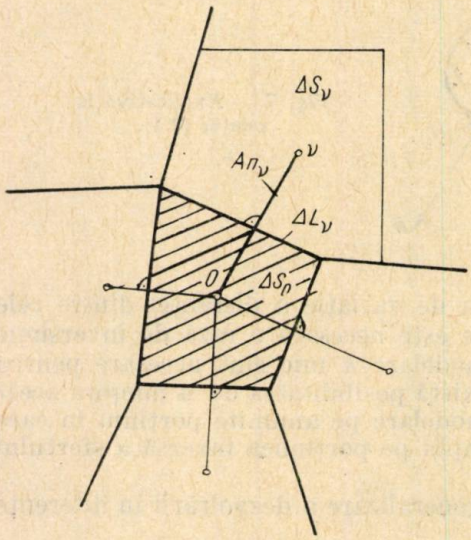


Fig. 8. — Explicativă la relația (2.8).

$$-\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta A_\nu}{\Delta n_\nu} \cdot \Delta l_\nu = \mu \cdot J_0 \cdot \Delta S_0$$

unde

$$\Delta A_\nu = A_\nu - A_0. \tag{2.8}$$

Pentru domeniile în care $\bar{J} = 0$, ecuația (2.8) devine

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta A_\nu}{\Delta n_\nu} \cdot \Delta l_\nu = 0. \tag{2.8'}$$

Această relație se poate modela electric pe o rețea *R.C.*, avînd de astădată rezistențele corespunzătoare pașilor de discretizare, diferiți atît după direcțiile Δl_ν, cît și după direcțiile normalelor Δn_ν, proporționale cu

$$R_\nu \sim \frac{\Delta n_\nu}{\Delta l_\nu}. \tag{2.9}$$

În situația în care $\Delta n_\nu = \Delta l_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$), $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$. În caz că $\Delta n_\nu = \Delta l_\eta = h$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$; $\eta = 1, 2, 3, 4$), regăsim cazul discretizării cu pas constant.

Ca și în cazul caracterizat de relațiile (1.8) și (1.9), putem utiliza

$$\begin{aligned} V_0 &\sim A_0, \\ i_0 &\sim j_0 \cdot \Delta S_0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

La divizarea planului cîmpului de modelat în celule ΔS_ν, păstrarea condiției ca Δn_ν și Δl_ν să fie ortogonale, cerută de transcrierea lui (2.4) sub forma (2.7), obligă la o mare atenție în alegerea capetelor segmentelor Δn_ν.

Aceste relații puteau fi folosite în prezentarea principală a modelului *R.C.*, cu dezavantajul că nu pun în evidență eroarea sistematică (1.5) care se introduce prin aproximarea lui $\nabla^2 A$ prin diferențe finite.

Determinarea cu precizie a erorii se poate face atunci cînd se cunoaşte o soluţie analitică exactă a unei probleme de cîmp plan. Se cunoaşte o soluţie exactă pentru ecuaţia (1.1) în cazul semispaţiului conductor, însă în acest caz $A = A(x, t)$.

Se apreciază (2) ca limită, în general superioară a erorii în problemele de cîmp plan, eroarea determinată în cazul cînd A este funcţie de o singură variabilă spaţială :

$$\frac{\varepsilon_i}{\nabla^2 A} = \frac{A_{exact} - A_{model}}{A_{exact}} = \frac{1}{6}\left(\frac{h}{\delta}\right)^2, \quad (2.11)$$

fiind adîncimea convenţională de pătrundere skin :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \cdot \sigma \cdot \omega}}. \quad (2.12)$$

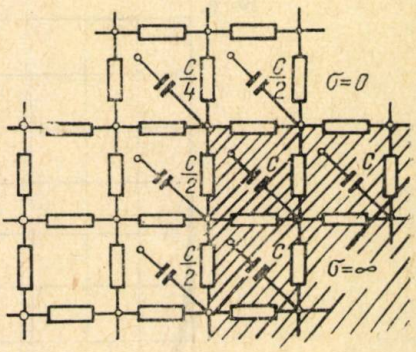


Fig. 9. — Valorile capacităţilor corespunzătoare conturului secţiunii conductorului.

Modelul integrator obţinut, acceptînd o eroare relativă $\frac{\Delta A}{A} \cdot 100 = 4{,}3\%$ pentru o rezistenţă R de 1000 Ω şi o capacitate $C = 27\,000$ pF la o frecvenţă a curentului din bare de 50 Hz, a utilizat aproximativ 2 000 de rezistori a 1 000 Ω fiecare, 500 de rezistori cu valori ale rezistenţei cuprinse între 600 şi 2 000 Ω şi 80 de condensatori cu valori ale capacităţilor cuprinse între 6 800 şi 27 000 p.F. Valorile capacităţilor se modifică doar de-a lungul conturului secţiunii, conform figurii 9.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru sistemul de bare prezentat în figura 3 s-au efectuat o serie de măsurători în ceea ce priveşte pierderile suplimentare care apar în conductele masive datorită efectului skin şi proximitate. Aceste pierderi sînt puse în evidenţă prin factorul rezistenţei în alternativ, care se exprimă în funcţie de mărimile măsurabile pe model :

$$k_a = N \cdot \frac{\sum_{n=1}^{N} i_{on}^2 \cdot \frac{C}{C_n}}{I_m^2}, \quad (3.1)$$

unde

C este capacitatea dată de formula (1.7),
C_n — capacitatea aferentă nodului al n-lea din reţea,
N — numărul de pătrate $h \times h$ care se cuprind în secţiunea conductorului,
i_{on} — curentul condensatorului de capacitate C_n,
I_m — curentul total al modelului $\left(= \sum_{n=1}^{N} i_{on} \right)$.

În figura 10 este reprezentat factorul k_a în funcție de distanța d dintre fețele interioare ale barelor în două cazuri : cînd conductele nu sînt divizate ($d_1 = 0$) și cînd fiecare conductă este divizată longitudinal în două părți egale ($d_1 = 20$ mm).

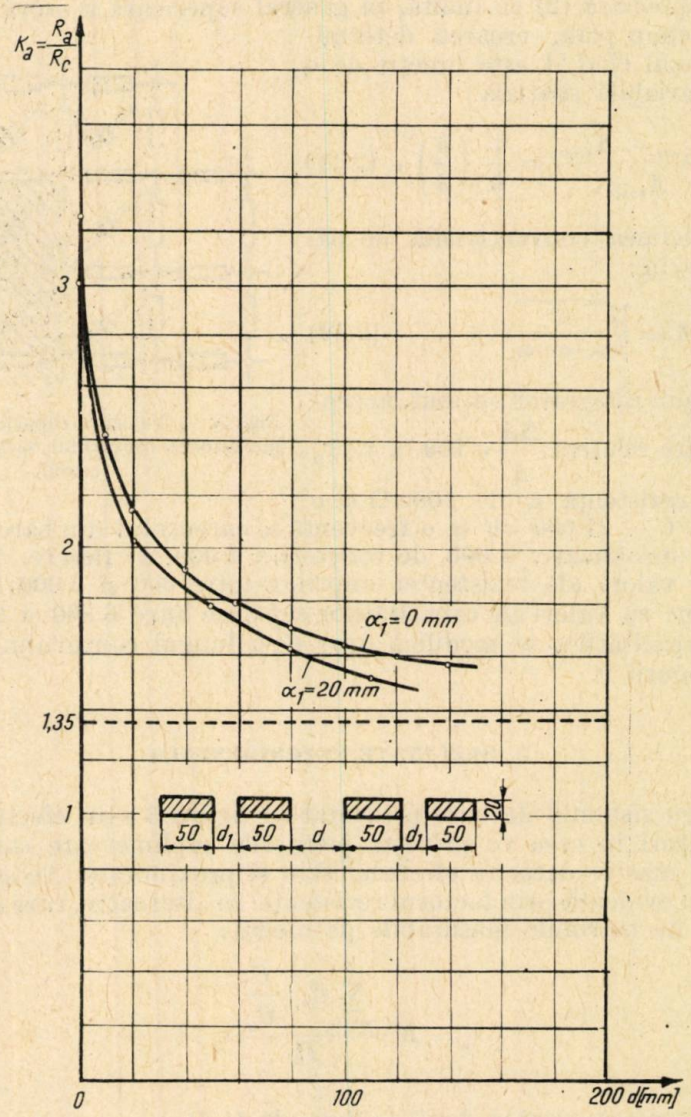


Fig. 10. — Factorul în alternativ al rezistenței, k_a, pentru sistemul de bare din figura 3 funcție de distanța d dintre bare.

Din măsurătorile efectuate pentru distanța d cuprinsă între 450 și 600 mm, cînd efectul de proximitate este neglijabil, s-a constatat o stabilizare a factorului k_a la valoarea 1,35. Această valoare este confirmată de literatură [4], [3].

Figura 11 reprezintă o diagramă spaţială a repartiţiei densităţilor de curent pe secţiunea unei conducte pentru distanţa $d = 10$ mm.

Anexa cuprinde cîteva tabele cu numere proporţionale cu densităţile de curent pentru diverse valori ale lui d.

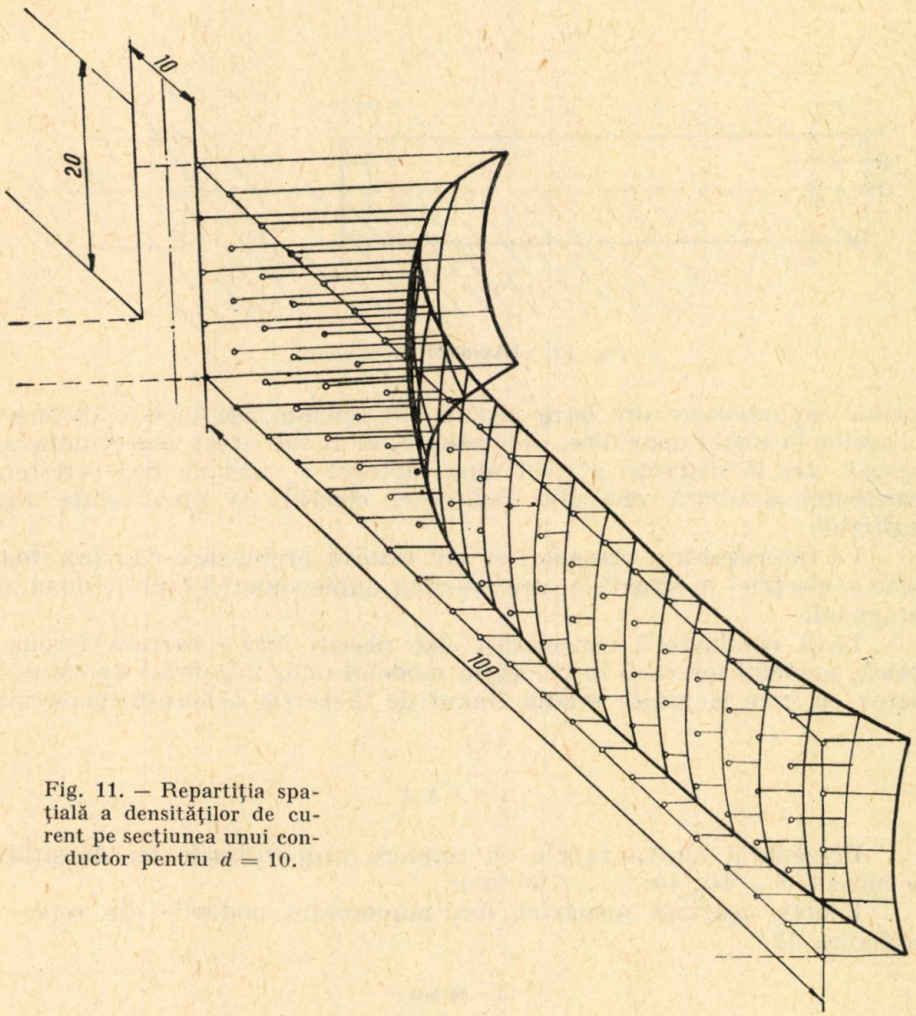


Fig. 11. — Repartiţia spaţială a densităţilor de curent pe secţiunea unui conductor pentru $d = 10$.

Pentru alimentarea modelului s-a utilizat un generator de audiosrecvenţă de 5 W, iar pentru măsurători un voltmetru electronic cu infrare simetrică. Se presupune pentru determinările făcute o eroare totală tistematică de 7%.

4. CONCLUZII

Modelarea directă prin elemente $R.C.$ face posibilă rezolvarea unor probleme de cîmp electromagnetic pentru o gamă importantă de frec-

venţe (efect pelicular mediu), ocolindu-se rezolvarea lor matematică, ea fiind dificilă şi în multe cazuri imposibilă.

Rezultatele experimentale obţinute pe un model de acest fel pentru un sistem de bare colectoare (fig. 3) indică o majorare apreciabilă a pier-

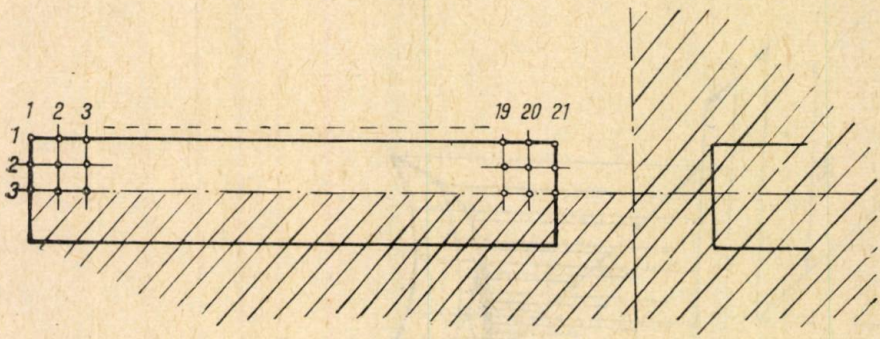


Fig. 12. — Explicativă la anexă.

derilor suplimentare din bare pentru $d < 150$ mm, aşa încît o dispunere a barelor în răşini epoxidice, de exemplu, ar fi sub acest aspect dezavantajoasă. De la distanţe $d > 500$ mm, factorul k_a include doar creşterea rezistenţei datorată efectului pelicular, efectul de proximitate fiind neglijabil.

Cu interogatorul prezentat se pot rezolva problemele de cîmp (magnetic şi electric) în situaţiile care prezintă duble simetrii faţă de două axe ortogonale.

Dacă conductorii consideraţi sînt plasaţi într-o carcasă feromagnetică, modelul lor va fi în principiu modelul unor înfăşurări de transformator cu care se poate studia fluxul de dispersie a transformatorului.

ANEXĂ

Prezentăm cîteva tabele cu numere proporţionale cu densităţile de curent $d = 20, 40, \ldots, 160$ mm.

Pentru uşurinţa urmăririi lor, numerotăm nodurile din reţea ca în figura 12.

d = **20 mm**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,6	1,28	1,06	0,89	0,72	0,64	0,615	0,6	0,61	0,625	0,66
2	1,42	1,1	0,9	0,72	0,59	0,53	0,48	0,465	0,465	0,47	0,485
3	1,37	1,075	0,865	0,70	0,58	0,525	0,47	0,46	0,435	0,45	0,47

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1	4,835	3,67	2,75	2,07	1,57	1,24	1,015	0,865	0,75	0,7	
2	4,48	3,28	2,45	1,815	1,365	1,06	0,83	0,68	0,58	0,53	
3	4,335	3,17	2,375	1,79	1,36	1,05	0,835	0,67	0,57	0,515	

d = **40 mm**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,77	1,43	1,15	0,965	0,82	0,725	0,68	0,63	0,625	0,67	0,7
2.	1,57	1,2	0,98	0,8	0,665	0,57	0,53	0,49	0,48	0,48	0,5
3.	1,515	1,16	0,95	0,78	0,65	0,565	0,5	0,45	0,45	0,45	0,5

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	4,16	3,16	2,41	1,885	1,52	1,25	1,03	0,9	0,8	0,73	
2.	3,8	2,8	2,12	1,675	1,275	1,015	0,8	0,65	0,58	0,52	
3.	3,68	2,7	2,07	1,63	1,27	1,0	0,83	0,65	0,57	0,52	

d = **60 mm**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,825	1,46	1,17	0,95	0,8	0,75	0,7	0,66	0,64	0,64	0,08
2.	1,63	1,25	1,0	0,8	0,65	0,58	0,52	0,5	0,48	0,48	0,48
3.	1,56	1,18	0,97	0,77	0,625	0,575	0,51	0,48	0,45	0,45	0,45

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	3,625	2,78	2,165	1,71	1,37	1,17	1,01	0,85	0,765	0,7	
2.	3,3	2,47	1,9	1,52	1,15	1,0	0,77	0,64	0,55	0,5	
3.	3,175	2,375	1,86	1,47	1,114	0,95	0,76	0,63	0,53	0,48	

d = **80 mm**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,52	1,3	1,03	0,84	0,725	0,635	0,6	0,57	0,575	0,57	0,585
2.	1,45	1,15	0,88	0,715	0,6	0,515	0,47	0,44	0,43	0,435	0,45
3.	1,38	1,05	0,76	0,7	0,59	0,51	0,46	0,43	0,415	0,42	0,44

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	3,015	2,33	1,78	1,41	1,13	0,925	0,785	0,7	0,65	0,625	
2.	2,725	2,035	1,56	1,21	0,935	0,75	0,635	0,55	0,5	0,47	
3.	2,635	1,95	1,525	1,18	0,930	0,74	0,625	0,535	0,475	0,46	

d = **100 mm**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,62	1,28	1,03	0,84	0,72	0,635	0,6	0,57	0,565	0,56	0,575
2.	1,425	1,12	0,885	0,715	0,6	0,515	0,465	0,45	0,42	0,420	0,435
3.	1,37	1,07	0,865	0,7	0,59	0,51	0,46	0,42	0,4	0,41	0,42

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	2,77	2,16	1,66	1,3	1,05	0,87	0,75	0,67	0,625	0,585	
2.	2,53	1,87	1,43	1,115	0,88	0,715	0,6	0,54	0,475	0,46	
3.	2,45	1,8	1,385	1,1	0,875	0,71	0,59	0,525	0,47	0,435	

d = 120 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,475	1,17	0,935	0,765	0,65	0,565	0,525	0,5	0,485	0,48	0,5
2.	1,352	1,01	0,8	0,65	0,525	0,465	0,415	0,37	0,36	0,36	0,37
3.	1,265	0,965	0,77	0,635	0,535	0,46	0,4	0,36	0,35	0,35	0,36

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	2,37	1,825	1,415	1,13	0,9	0,75	0,65	0,58	0,54	0,52	
2.	2,12	1,575	1,23	0,965	0,75	0,615	0,52	0,44	0,41	0,375	
3.	2,03	1,52	1,2	0,945	0,75	0,6	0,51	0,435	0,385	0,37	

d = 140 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,48	1,17	0,935	0,765	0,635	0,56	0,517	0,487	0,487	0,485	0,49
2.	1,32	1,015	0,9	0,64	0,53	0,465	0,4	0,37	0,37	0,36	0,365
3.	1,27	0,97	0,77	0,63	0,53	0,45	0,39	0,37	0,36	0,345	0,35

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	2,23	1,715	1,335	1,06	0,865	0,72	0,63	0,57	0,53	0,515	
2.	2,01	1,49	1,165	0,92	0,725	0,58	0,49	0,435	0,4	0,37	
3.	1,935	1,44	1,135	0,9	0,72	0,58	0,48	0,435	0,385	0,36	

d = 160 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	1,5	1,185	0,94	0,77	0,64	0,56	0,525	0,485	0,48	0,48	0,49
2.	1,3	1,03	0,815	0,655	0,54	0,45	0,4	0,37	0,36	0,36	0,36
3.	1,315	1,985	0,785	0,65	0,535	0,45	0,4	0,37	0,35	0,35	0,355

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	
1.	2,127	1,635	1,285	1,02	0,83	0,7	0,617	0,56	0,53	0,50	
2.	1,91	1,435	1,12	0,87	0,68	0,565	0,49	0,43	0,4	0,365	
3.	1,84	1,375	1,087	0,86	0,68	0,565	0,475	0,423	0,38	0,36	

BIBLIOGRAFIE

1. Kurt Oberretl, *Die Ermittlung von magnetischen Feldern Wirbelaströmen und Kräften in Komplizierten Täblen durch Simulation an Gitermoddellen*, Arch. Elektr., **48**, 297–313 (1963).
2. P. Silvester, *Network Analog Solution of Skin and Proximity Effect Problems*, IEEE, *2* (1967).
3. B. A. Smirenin, *Manual de radiotehnică*, Ed. Energ., 1953, p. 28.
4. I. V. Butchevici ș.a., *Partea electrică a centralelor și a stațiilor electrice*, Ed. Energ., 1953, p. 35.

DETERMINAREA REGIMURILOR STAŢIONARE ALE SISTEMELOR ELECTROENERGETICE PE O CALE ITERATIVĂ PUTERNIC CONVERGENTĂ

DE

M. POMÂRLEANU

621.316.11

Lucrarea prezintă o metodă de calcul a regimurilor staţionare a sistemelor electroenergetice, care printr-o transformare prealabilă a matricei admitanţelor nodale asigură o convergenţă rapidă procesului iterativ. Această transformare prealabilă a matricei coeficienţilor este în acelaşi timp utilă şi pentru alte calcule, cum ar fi calculul curenţilor de scurtcircuit sau calcule de stabilitate.

1. INTRODUCERE

Cunoaştere anticipată a regimurilor staţionare de funcţionare a sistemelor electroenergetice este cerută atît de cei ce exploatează sistemul energetic pentru predeterminarea eventualelor regimuri periculoase sau neeconomice, cît şi de cei ce proiectează aceste sisteme pentru alegerea judicioasă a elementelor lor componente [1]—[4].

În particular, calculul regimurilor electrice staţionare a reţelelor complexe se efectuează atît pentru predeterminarea tensiunilor şi curenţilor în nodurile sistemului, cît şi a circulaţiilor de puteri şi a pierderilor din aceste reţele, precum şi pentru generarea datelor de pornire pentru alte calcule, cum ar fi cele cerute de studiul regimurilor dinamice, stabilitate sau calculul curenţilor de scurtcircuit.

Pentru rezolvarea acestor probleme se poate utiliza orice metodă dezvoltată de teoria circuitelor electrice, completată cu relaţiile neliniare cerute de introducerea datelor cunoscute. Deoarece aceste date sînt impuse în nodurile reţelei, adeseori, cu eficacitate mai mare, sînt preferate pentru calculul circulaţiilor de puteri metodele nodale; existenţa relaţiilor neliniare face ca metoda de rezolvare să fie de obicei o metodă interativă [5]—[15].

Problema-cheie a tuturor metodelor de rezolvare a circulaţiilor de puteri dintr-o reţea complexă buclată constă în a asigura o convergenţă

rapidă procesului iterativ, fără adoptarea unei algoritm de calcul deosebit de complicat şi fără încărcarea exagerată a memoriei calculatorului cu prea multe date informaţionale predeterminate.

După cum se cunoaşte, problema este încadrată de două metode-limită : una iterativă, lent convergentă, care însă nu impune aproape nici un fel de calcul prealabil al matricei coeficienţilor, matrice cu multe goluri (metoda Jakobi, metoda Gauss-Seidel pe matricea admitanţelor), şi alta foarte rapid convergentă, care derivă din calea de rezolvarea directă, în care matricea coeficienţilor este practic fără goluri şi se obţine prin inversarea completă a matricei admitanţelor nodale. Între aceste două metode se cunosc o serie de alte metode, care caută un compromis între cele două extreme prin acţionare fie asupra matricei coeficienţilor, fie asupra modului de introducere a relaţiilor neliniare, fie asupra amîndurora [10]—[17].

În cele ce urmează se va prezenta o metodă de calcul a circulaţiilor de puteri în reţelele electrice buclate care va căuta să satisfacă atît dezideratele generale ale problemei enunţate mai sus prin transformarea matricei coeficienţilor şi adoptarea corespunzătoare a relaţiilor de calcul, cît şi pregătirea în acelaşi timp prin aceste transformări a datelor de pornire şi a elementelor schemei necesare altor calcule cerute de funcţionarea sigură a sistemului energetic.

2. PRINCIPIILE METODEI

Se caută rezolvarea problemei circulaţiilor de puteri după o schemă iterativă de tip Gauss-Seidel [5], [9], prin intermediul unei matrice de admitanţe nodale astfel obţinută încît procesul să fie puternic convergent.

Aceasta se realizează transformînd matricea iniţială a admitanţelor nodale (matricea admitanţelor barelor) în aşa fel, încît să se întărească legăturile dintre nodurile generatoare, noduri care au o influenţă determinantă asupra regimurilor datorită acţiunii reglajului de tensiune, şi să se reducă foarte mult influenţele nodurilor consumatoare prin eliminarea parţială a sarcinii corespunzătoare, păstrînd numai un termen de corecţie. Practic acest lucru se obţine prin construcţia unei reţele extinse cu ajutorul echivalării sarcinii din fiecare nod consumator printr-o schemă de tipul admitanţă în serie cu o tensiune electromotoare [18] (admitanţa schemei fiind chiar admitanţa echivalentă a sarcinii corespunzătoare puterilor din nod şi calculată considerînd o tensiune medie la bare). Prin această operaţie apar în plus legături noi între nodurile generatoare, în timp ce nodurilor de sarcină reale li se substituie noduri cu tensiuni foarte mici, deci cu pondere neînsemnată în procesul iterativ.

Astfel se asigură, aşa cum se va demonstra mai departe, o convergenţă rapidă procesului iterativ ; în plus, submatricea de admitanţe corespunzătoare nodurilor generatoare astfel obţinută, la care mai sînt necesare mici modificări, este practic gata pregătită pentru alte calcule (calcule de stabilitate dinamică, calculul curenţilor de scurtcircuit), unde în mod curent se elimină nodurile de sarcină prin liniarizare, adică echivalarea lor cu o admitanţă constantă.

3. PREZENTAREA PROCEDEULUI DE CALCUL

Deosebim două etape distincte în desfășurarea calculului: una în care se determină elementele noii rețele extinse cu privire la nodurile de sarcină și a doua de calcul propriu-zis, în care se determină starea electrică a nodurilor rețelei reale.

3.1. CONSTRUCȚIA REȚELEI EXTINSE

Vom introduce în fiecare nod de sarcină o admitanță y_s^0 care să corespundă consumului impus în acest nod la tensiunea medie de funcționare a rețelei ($U_{s\,med}$):

$$y_s^0 = \frac{P_s - jQ_s}{U_{s\,med}^2}. \qquad (1)$$

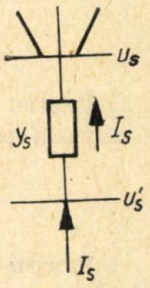


Fig. 1

Deoarece nodul respectiv în regimul real de funcționare are o tensiune U_s diferită de $U_{s\,med}$, vom considera că această admitanță se află legată în serie cu o tensiune necunoscută U'_s, conform schemei din figura 1, unde

$$U'_s = U_s + \frac{I_s}{y_s^0} \qquad (2)$$

(semnele sînt cuprinse în expresia fiecărui termen). În fine, vom elimina, cu expresiile cunoscute, nodurile fără injecție de curent, obținînd matricea admitanțelor nodale a rețelei extinse la bornele de tensiune U_s.

3.2. CALCULUL REGIMULUI PROPRIU-ZIS

Calea adoptată este un calcul iterativ după schema generală Gauss-Seidel. Se lucrează cu matricea coeficienților corespunzătoare admitanțelor nodale ale rețelei extinse (y'), nodurile generatoare fiind reprezentate prin tensiunea de la borne U_g, iar nodurile consumatoare prin tensiunile din spatele admitanțelor echivalente ale sarcinilor U'_s. Notăm, în general, în relațiile care urmează aceste tensiuni nodale cu E. Din punctul de vedere al mărimilor cunoscute în noduri, vom considera trei categorii de noduri: noduri consumatoare ($1 \ldots s$), în care se cunosc puterile active și reactive absorbite, noduri generatoare ($s+1 \ldots n-1$), în care se cunosc puterile active și modulul tensiunii de la bare, și cel de-al n-lea nod al rețelei, nod de balans și de referință, în care se cunoaște tensiunea ca modul și fază.

Relația generală de calcul pentru pasul r de iterație este (pentru nodul i)

$$E_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} E_j^{(r)} + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} E_j^{(r-1)} + d_i^{(r)}, \qquad (3)$$

unde

$$d_i^{(r)} = \frac{I_i^{(r)}}{y'_{ii}} + \frac{y'_{in}}{y'_{ii}} E_n \tag{4}$$

şi

$$I_i^{(r)} = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^{*(r-1)}}. \tag{5}$$

Pentru nodurile consumatoare, tensiunea $U_i^{*(r-1)}$ [1]) s-a determinat la calculul pasul anterior cu ajutorul formulei (6)

$$U_i^{*(r-1)} = U_i'^{*(r-1)} - \frac{I_i^{*(r-1)}}{y_i^*}. \tag{6}$$

Pentru nodurile generatoare, tensiunea $U_i^{*(r-1)}$ este chiar cea calculată cu expresia (3) la calculul pasului anterior, iar puterea reactivă Q_i trebuie calculată în funcţie de mărimi cunoscute sau calculate anterior:

$$Q_i^{(r)} = b'_{ii} U_i^2 + \sqrt{(A_i^{(r)2} + B_i^{(r)2}) U_i^2 - (P_i - g'_{ii} U_i^2)^2}, \tag{7}$$

unde b'_{ii} şi g'_{ii} sînt partea reală, respectiv imaginară a admitanţei y'_{ii}, iar $A_i^{(r)}$ şi $B_i^{(r)}$ partea reală şi respectiv imaginară a sumei

$$A_i^{(r)} + jB_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{i-1} y'_{ij} E_j^{(r)} + \sum_{j=i+1}^{n} y'_{ij} E_j^{(r-1)}. \tag{8}$$

Dacă puterea reactivă astfel calculată se găseşte în afara limitelor tehnice admise pentru centrala considerată, în formula (5) se va introduce valoarea-limită respectivă şi nu valoarea calculată cu (7).

Calculul iterativ al tensiunilor din toate nodurile se continuă pînă cînd abaterea relativă a modulului tuturor tensiunilor în parte între două iteraţii consecutive este mai mic decît o valoare ε dată.

4. ANALIZA CONVERGENŢEI PROCESULUI ITERATIV

În cele ce urmează se va demonstra că metoda prezentată asigură o convergenţă mai rapidă decît aceea a cazului clasic Gauss-Seidel, în care matricea coeficienţilor este formată din admitanţele nodale ale reţelei reale [19].

Scăzînd din valoarea finală a tensiunii nodului i (notată fără nici un exponent) valoarea sa corespunzătoare iteraţiei (r) dată în expresia (3), avem

$$E_i - E_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} (E_j - E_j^{(r)}) + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} (E_j - E_j^{(r-1)}) + \frac{1}{y'_{ii}} (I_i - I_i^{(r)}). \tag{9}$$

---

1) Deoarece relaţiile sînt scrise între mărimi fazoriale, asteriscul arată că este vorba de conjugata mărimii respective.

Deoarece ultimul termen corespunzător curentului din expresia (9) este mic în raport cu ceilalți, îl vom introduce sub o formă aproximativă, exprimîndu-l în funcție de tensiunea nodului prin intermediul restricțiilor impuse la fiecare iterație în nod cu ajutorul relațiilor (5) și (6).

Astfel pentru nodurile generatoare, din relația (5) avem

$$I_i^{(r)} = \frac{P_i - jQ_i^{(r)}}{U_i^2} U_i^{(r-1)} \simeq y_i U_i^{(r-1)}, \tag{10}$$

unde

$$y_i = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^2}.$$

Pentru nodurile consumatoare avem

$$I_i^{(r)} = \frac{P_i - jQ_i}{[U_i^{(r-1)}]^2} U_i = \frac{P_i - jQ_i}{[U_i^{(r-1)}]^2} \left(U_i'^{(r-1)} - \frac{I^{(r)}}{y_i^0} \right) \simeq y_i' \left(U_i'^{(r-1)} - \frac{I_i^{(r)}}{y_i^0} \right)$$

sau

$$I_i^{(r)} = y_i U_i^{(r-1)},$$

unde

$$y_i = \frac{y_i' y_i^0}{y_i' + y_i^0}. \tag{11}$$

Introducînd aceste expresii în (9), avem

$$E_i - E_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} (E_j - E_j^{(r)}) + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} (E_j - E_j^{(r-1)}) +$$

$$+ \frac{y_i}{y_{ii}'} (E_i - E_i^{(r-1)}). \tag{12}$$

În continuare vom transforma expresia (12) într-o inegalitate, înlocuind coeficienții complecși (y) prin modulele lor, iar diferențele din paranteze prin modulele valorilor lor maxime cu privire la j:

$$|E_i - E_i^{(r)}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_j - E_j^{(r)}| +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n-1} \left| \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_j - E_j^{(r-1)}| + \left| \frac{y_i}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_i - E_j^{(r-1)}|. \tag{13}$$

Alegînd din cele $n - 1$ inagalități de tipul (13) pe cea pentru care termenul din stînga este maxim, avem

$$\max_j |E_j - E_j^{(r)}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_j - E_j^{(r)}| +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n-1} \left| \frac{y_{ij}'}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_j - E_j^{(r-1)}| + \left| \frac{y_i}{y_{ii}'} \right| \max_j |E_j - E_j^{(r-1)}|, \tag{14}$$

deci

$$\max_j |E_j - E_j^{(r)}| \leqslant \mu \cdot \max_j |E_j - E_j^{(r-1)}|, \tag{15}$$

unde

$$\mu = \frac{\sum_{j=i+1}^{n-1} \left| \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} \right| + \left| \frac{y_i}{y'_{ii}} \right|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{y'_{ij}}{y'_{ii}} \right|}.$$

Dacă analizăm comparativ felul în care se modifică modulele diferitelor admitanţe din expresia lui μ, observăm că, în urma construcţiei reţelei extinse cu privire la nodurile de sarcină, admitanţele care converg la noile noduri de sarcină sînt foarte mici, astfel că suma de la numitor, care conţine în principal aceste admitanţe, se reduce foarte mult în comparaţie cu valorile corespunzătoare reţelei reale iniţiale; în acelaşi timp, suma de la numărător, care conţine în principal admitanţele liniilor ce converg în nodurile generatoare, are modificări mult mai mici. Deci prin această transformare a reţelei s-a obţinut pentru μ valori mai mici decît în cazul variantei Gauss-Seidel clasice, deci o convergenţă mai mare a procesului iterativ, ceea ce s-a demonstrat şi experimental pe o serie de exemple de calcul.

5. VERIFICĂRI PRACTICE

Pentru a stabili performanţele metodei prezentate, s-au făcut o serie de calcule pe cîteva tipuri de reţele atît prin metoda Gauss-Seidel clasică, cu coeficient de accelerare optim, cît şi cu formula expusă mai sus. Aceste calcule au scos în evidenţă faptul că metoda propusă asigură o creştere simţitoare a convergenţei, procesul fiind practic terminat într-un număr de iteraţii de aproximativ de trei ori mai mic decît în cazul clasic.

Vom prezenta rezultatele unui asemenea calcul pe o reţea cu 15 noduri (fig. 2), din care 9 noduri de sarcină, 5 noduri tip generator şi un nod de balans.

Tabelă

Nr. iteraţiei	U'_2 (kV)	U''_2 (kV)	U'_3 (kV)	U''_3 (kV)	U'_{12} (kV)	U''_{12} (kV)	U'_{14} (kV)	U''_{14} (kV)
0	230,	0	230,	0	215	0	215	0
1	213,1897	7,9462	229,7575	−3,5399	213,6325	−23,0764	220,2305	−16,6330
2	230,0819	8,6699	229,9978	−3,0092	211,5471	−20,7637	218,6600	−14,3749
3	229,8756	9,0612	229,9957	−2,8118	211,5210	−20,9611	218,6055	−14,4541
4	229,8146	9,2092	229,9860	−2,7654	211,4870	−20,8977	218,5632	−14,4217
5	229,7757	9,2509	229,9828	−2,7552	211,4852	−20,8971	218,5626	−14,4223
6	229,8101	9,2482	229,9832	−2,7540	211,4808	−20,8951	218,5557	−14,4205
7	229,8127	9,2510	229,9821	−2,7525	211,4828	−20,8958	218,5559	−14,4206
8	229,8120	9,2565	229,9820	−2,7525	211,4828	−20,8957	218,5559	−14,4203
9	229,8120	9,2566	229,9820	−2,7525	211,4828	−20,8957	218,5559	−14,4204

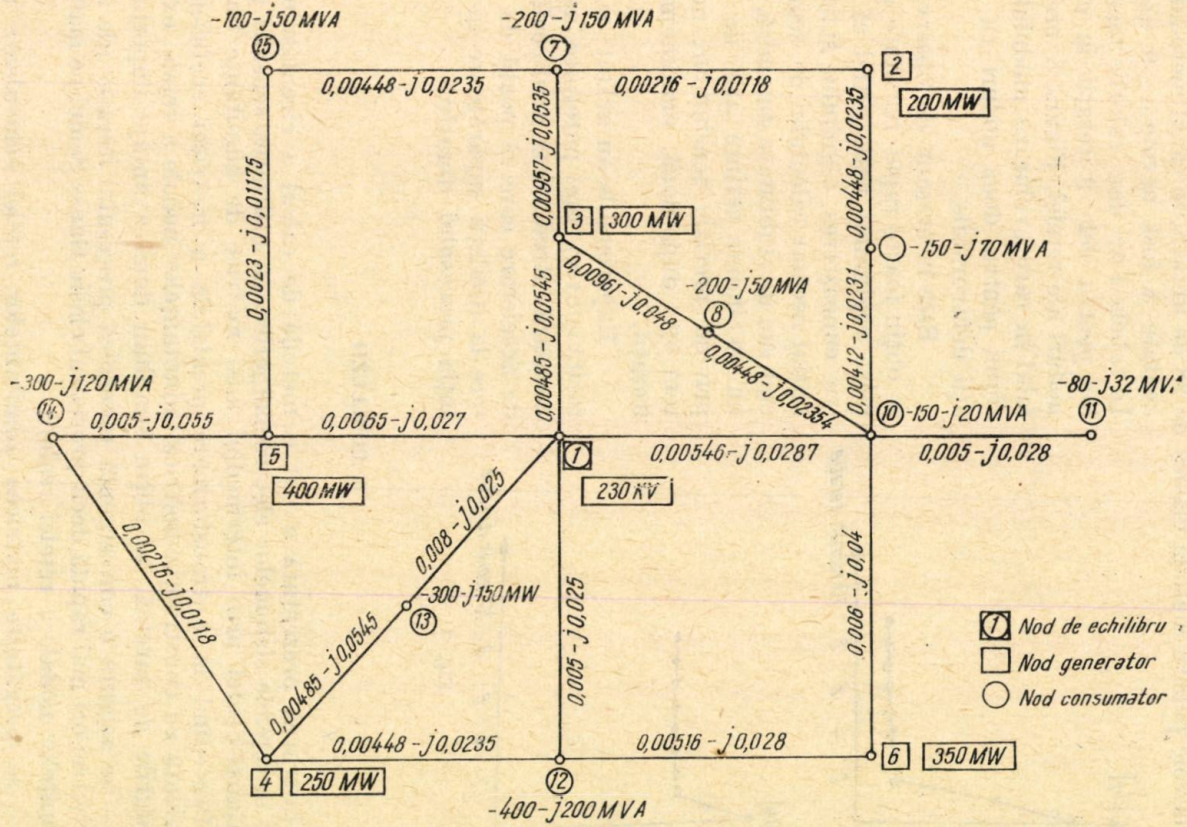

-100-j50 MVA
15
-200-j150 MVA
7
2
200 MW
0,00448-j0,0235
0,00216-j0,0118
0,0023-j0,01175
0,00957-j0,0535
0,00448-j0,0235
3
300 MW
-150-j70 MVA
0,00961-j0,048
-200-j50 MVA
8
0,00485-j0,0545
0,00448-j0,02354
0,00412-j0,0231
-300-j120 MVA
14
-80-j32 MVA
0,005-j0,055
0,0065-j0,027
10
-150-j20 MVA
11
0,00546-j0,0287
0,005-j0,028
5
1
400 MW
230 kV
0,00216-j0,0118
0,008-j0,025
-300-j150 MW
13
0,006-j0,04
0,00485-j0,0545
0,005-j0,025
Nod de echilibru
Nod generator
Nod consumator
0,00448-j0,0235
0,00516-j0,028
4
250 MW
12
6
350 MW
-400-j200 MVA

Fig. 2

Dacă, pentru a atinge condiția ca modulele tuturor tensiunilor nodale să aibă o abatere relativă de la o iterație la alta de maximum $5 \cdot 10^{-7}$, erau nevoie pentru metoda clasică de 28 de iterații, în cazul metodei prezentate a fost nevoie de 9 iterații. În tabela 1 se dau valorile tensiunilor pentru cele 9 iterații în cîteva noduri ale rețelei. Figura 3 prezintă felul în care evoluează modulul tensiunii pentru două noduri cu situații defavorabile.

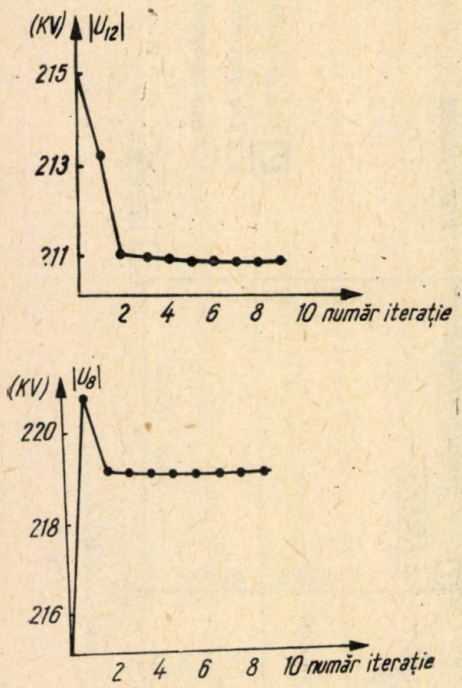


Fig. 3

Este interesant de observat că se obțin foarte rapid rezultate apropiate regimului real, astfel că pentru cunoașterea regimului staționar inițial necesar calculului de scurtcircuit sau de stabilitate dinamică, unde nu se impun cerințe atît de mari privind precizia tensiunilor, ne putem opri după două, maximum trei iterații.

Experiențele au arătat că, datorită convergenței puternice, nu este necesară introducerea unui coeficient de accelerare care să poată da naștere la oscilații supărătoare în evoluția procesului iterativ.

6. CONCLUZII

Lucrarea prezentată a dat o metodă de calcul a circulațiilor de puteri în rețelele sistemelor electroenergetice, cu utilizarea schemei generale Gauss-Seidel prin intermediul unei matrice de admitanțe nodale.

Procedînd la o transformare prealabilă a matricei coeficienților echivalentă cu construcția matricei admitanțelor nodale a rețelei extinse la nodurile de sarcină, se obțin simultan două avantaje importante:

— se asigură o convergență puternică procesului iterativ (de aproximativ trei ori mai rapidă decît procedeul clasic Gauss-Seidel pe matricea admitanțelor nodale a rețelei reale);

— se pregătește matricea admitanțelor rețelei echivalente necesare altor calcule de regimuri (calcule de stabilitate dinamică, calcule de scurtcircuit etc.).

Calculele efectuate pentru o serie de exemple de probă au arătat corectitudinea procedeului și convergența sigură și rapidă a procesului iterativ (fără necesitatea adoptării unor coeficienți de accelerare), simultan cu o relativă simplitate a algoritmului de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Dimo, *Analiza nodală a sistemelor electroenergetice*, București, Edit. Academiei, 1968.
2. G. W. Stagg, *Computer methods in power systems*, Londra, McGraw-Hill, 1968.
3. H. Edelman, *Calculul electric al rețelelor interconectate*, trad., București, Edit. tehnică, 1966.
4. E. Potolea, *Calculul regimului permanent al sistemelor electrice*, București, Edit. tehnică, 1967.
5. M. A. Laughton, D. Humphrey, *Numerical tehnique in solution of power system load flow problem*, Proc. IEE, **III**, *9*, 1575 (1964).
6. P. P. Gupta, N. W. Davies, *Digital computers in power system analysis*, Proc. IEE, **108 A**, 383 (1961).
7. S. Ionescu, B. Ungureanu, P. Vasilescu, M. Staadeker, *Un nou algoritm de calcul pentru determinarea regimurilor*, St. cerc. energ. electr., **17**, *2*, 399 (1967).
8. P. Dimo, *Analiza nodală cu calculatoarele pentru studiul sistemelor electroenergetice complexe*, Energetica, *1*, 14 (1962).
9. I. B. Ward, H. W. Hale, *Digital computer solution of power flow problems*, Tr. AIEE, *75*, p. III, 398 (1956).
10. R. J. Brown, F. W. Tinney, *Digital solution for large power networks*, Tr. AIEE, **76**, p. III, 347 (1957).
11. A. F. Glimm, G. W. Stagg, *Automatic calculation of load flows*, Tr. AIEE, **76**, p. III, 817 (1957).
12. E. Arie, *Solution des systèmes d'écuations linéaires à l'aide de „l'opérateur de triangularisation" applications en énergétique*, Rev. Roum. Sci. Techn. Electr. Energ., **13**, *3*, 433 (1968).
13. J. M. Bennett, *Digital computers and the load-flow problem*, Proc. IEE, **103**, **B**, 16 (1956).
14. R. Van Mele, *Methode iterative accelerée appliquée au calcul des réseaux électriques*, Bull. Soc. de Electr. Belges, *4*, 22 (1964).
15. J. E. Van Ness, *Iteration methods for digital load flow studies*, Trans. AIEE, **78**, p. III, 583 (1959).
16. J. E. Van Ness, *Convergence of iterative load flow studies*, Trans. AIEE, p. III, B, 1590 (1959).
17. J. E. Van Ness, J. N. Griffin, *Elimination methods for load studies*, Trans. AIEE, **80**, p. III, 299 (1961).
18. M. Pomârleanu, *Utilizarea unor scheme echivalente la calculul curenților de scurtcircuit*, St. cerc. energ. electr., **17**, *4*, 769 (1967).
19. Janko Bela, *Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare*, București, Edit. Academiei, 1961.

STABILITATEA MOTORULUI SINCRON LA VARIAȚIA FRECVENȚEI

DE

EMIL MICU

621.323 : 621.316.726

În lucrare se calculează funcția de transfer a motorului sincron, luînd ca mărime de intrare variația frecvenței, iar ca mărime de ieşire variația unghiului de sarcină în ipoteza tensiunilor de alimentare simetrice şi sinusoidale. Cu ajutorul funcției de transfer obținute se calculează caracteristicile de frecvență şi se analizează stabilitatea motorului, aplicînd criteriul lui Nyquist. Se dă schema logică a programului de calcul al limitei stabilității pe calculatorul electronic şi se determină influența parametrilor sistemului asupra stabilității maşinii în cazul variației frecvenței la ieşirea invertorului cu tiristoare.

1. INTRODUCERE

Cercetarea stabilității sistemelor de reglare automată a acționărilor cu motoare sincrone alimentate cu tensiuni de frecvențe variabile este deosebit de dificilă, pe de o parte din cauza complexității ecuațiilor care descriu comportarea maşinii sincrone în regim dinamic, iar pe de altă parte din cauza neliniarității ecuațiilor diferențiale, chiar în ipoteza neglijării saturației. Liniarizarea ecuațiilor prin considerarea unor abateri mici ale variabilelor în jurul valorilor regimului staționar permite aplicarea criteriilor de stabilitate ale lui Hurwitz sau Nyquist. Aplicarea criteriului lui Hurwitz este greoaie dacă, cum este cazul la maşina sincronă, gradul ecuației caracteristice este mare. Este mai rațional să se utilizeze metode numerice cu calculatoare electronice pentru parametri cunoscuți, făcînd uz de caracteristicile de frecvență (Nyquist). O astfel de metodă este dată în [1], [4], în care, deşi studiul stabilității se face pentru diferite frecvențe, nu se consideră fenomenele care au loc la variația frecvenței, ci numai la variația sarcinii, arătîndu-se că motorul poate fi instabil la turații joase. Obiectul lucrării de față este de a determina funcția de transfer a motorului sincron, considerînd ca mărime de intrare abaterea frecvenței tensiunii de alimentare față de regimul staționar considerat, iar ca mărime de ieşire variația unghiului de sarcină la tensiuni de ali-

mentare, tensiune de excitație și cuplu la arbore constante pentru o anumită valoare a frecvenței staționare. Această situație nu este tratată în literatură.

2. LINIARIZAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Comportarea dinamică a mașinii sincrone se studiază cu ajutorul teoriei celor două axe [2], care are avantajul că inductivitățile care intervin în ecuații nu sînt funcții periodice de unghiul rotorului ϑ. Ipotezele adoptate sînt următoarele:

a) circuitul magnetic se consideră nesaturat;

b) se neglijează pierderile în fier;

c) crestăturile statorului produc variații neglijabile în inductivitățile rotorului;

d) tensiunile de alimentare sînt simetrice și sinusoidale;

e) înfășurările statorice sînt astfel repartizate, încît produc tensiuni magnetomotoare sinusoidale de-a lungul pasului polar.

Trecerea de la mărimile statorice ale mașinii reale la mărimile statorice ale mașinii echivalente (fig. 1) se face prin intermediul matricilor de conexiuni [4]. Mărimile rotorice nu sînt afectate de transformarea de coordonate. Ecuațiile se scriu în unități relative, cu excepția timpului, măsurat în secunde, mărimile de bază fiind cele date în [3] și au pentru regimul motor următoarea formă [4]:

$$u_d = ri_d + \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\mathrm{d}\psi_d}{\mathrm{d}t} - \psi_q \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right), \tag{1}$$

$$u_q = ri_q + \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\mathrm{d}\psi_q}{\mathrm{d}t} + \psi_d \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right), \tag{2}$$

$$u_E = i_E + \frac{T_E}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\psi_E}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

$$0 = i_D + \frac{T_D}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

$$0 = i_Q + \frac{T_Q}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\psi_Q}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

$$\psi_d = x_d i_d + i_D + i_E, \tag{6}$$

$$\psi_q = x_q i_q + i_Q, \tag{7}$$

$$\psi_D = i_d x_d(1 - \sigma_{dD}) + i_E(1 - \mu_D) + i_D, \tag{8}$$

$$\psi_E = i_d x_d(1 - \sigma_{dE}) + i_D(1 - \mu_E) + i_E, \tag{9}$$

$$\psi_Q = i_q x_q (1 - \sigma_{qQ}) + i_Q, \tag{10}$$

$$m_e = i_q \psi_d - i_d \psi_q, \tag{11}$$

$$m_e = m_m + \frac{T_m}{\omega_n^2} \frac{\mathrm{d}^2 \vartheta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{12}$$

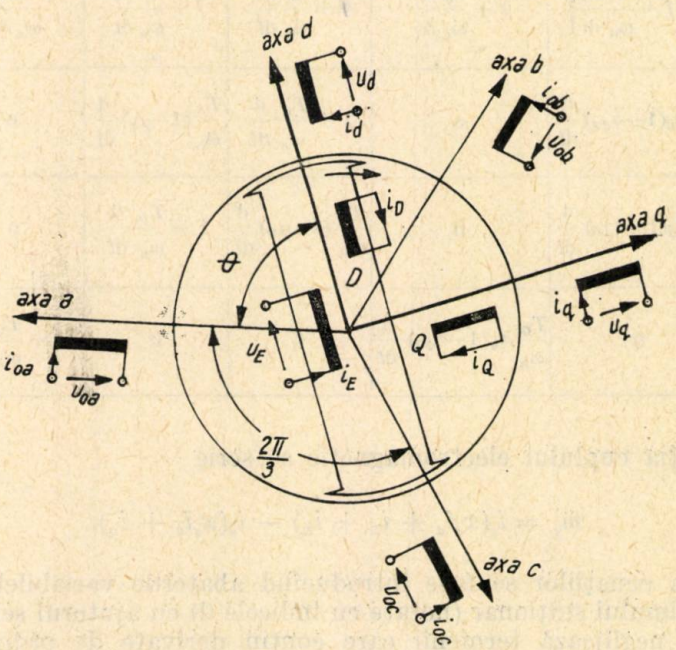


Fig. 1. — Schema mașinii echivalente din teoria celor două axe.

În aceste ecuații, timpul nu este exprimat în unități relative, ci în unități fizice, pentru ca în eventualitatea modelării mașinii pe calculatorul analogic să se poată conecta direct pe calculator regulatorul automat. Semnificația constantelor de timp T_E, T_D, T_Q, T_m și a coeficienților de dispersie σ_{dE}, σ_{dD}, σ_{qQ}, μ_E, μ_D este cea din [3].

Dacă se notează cu f frecvența în unități relative,

$$f = \frac{\omega}{\omega_n}, \tag{13}$$

și cu δ unghiul de sarcină al motorului,

$$\delta = \vartheta - \omega t + \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

ecuațiile motorului sincron se pot scrie sub următoarea formă :

$$\begin{vmatrix} u_d \\ u_q \\ u_E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r+\frac{x_d}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & -x_q\left(f+\frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}\right) & \frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & \frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & -\left(f+\frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}\right) \\ x_d\left(f+\frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}\right) & r+\frac{x_q}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & f+\frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} & f+\frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} & \frac{1}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{T_E}{\omega_n}x_d(1-\sigma_{dE})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 0 & 1+\frac{T_E}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & \frac{T_E}{\omega_n}(1-\mu_E)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 0 \\ \frac{T_D}{\omega_n}x_d(1-\sigma_{dD})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 0 & \frac{T_D}{\omega_n}(1-\mu_D)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 1+\frac{T_D}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 0 \\ 0 & \frac{T_Q}{\omega_n}x_q(1-\sigma_{qQ})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & 0 & 0 & 1+\frac{T_Q}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_E \\ i_D \\ i_Q \end{vmatrix} \tag{15}$$

Ecuația cuplului electromagnetic se scrie

$$m_e = i_q(x_d i_d + i_D + i_E) - i_d(x_q i_q + i_Q). \tag{16}$$

Liniarizarea ecuațiilor se face introducînd abaterile variabilelor față de valorile regimului staționar (notate cu indicele 0) cu ajutorul seriei Taylor, în care se neglijează termenii care conțin derivate de ordin superior. Astfel, dacă $z = f(x, y)$,

$$\Delta z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x0,\,y0}\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x0,\,y0}\Delta y.$$

Ecuațiilor liniarizate li se aplică transformata Laplace

$$\varphi(\tilde{p}) = \int_0^\infty \exp(-pt)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Ecuația cuplului electromagnetic devine

$$\Delta\tilde{m}_e = (x_d - x_q)(i_{q0}\Delta\tilde{i}_d + i_{d0}\Delta\tilde{i}_q) + i_{E0}\Delta\tilde{i}_q + i_{q0}(\Delta\tilde{i}_E + \Delta\tilde{i}_D) - i_{d0}\Delta\tilde{i}_Q, \tag{18}$$

iar ecuația mișcării

$$\Delta\tilde{m}_e = \frac{T_m}{\omega_n^2}p^2\Delta\tilde{\delta} + \frac{T_m}{\omega_n}p\Delta\tilde{f}. \tag{19}$$

Se obține matricea

$$
\begin{vmatrix}
\left(u\cos\delta_0+\frac{x_q}{\omega_n}i_{q0}p\right)\Delta\widetilde{\delta} \\
-\left(u\sin\delta_0+\frac{x_d}{\omega_n}i_{d0}p+\frac{1}{\omega_n}i_{E0}p\right)\Delta\widetilde{\delta} \\
0 \\
0 \\
0 \\
\frac{T_m}{\omega_n^2}p^2\Delta\widetilde{\delta}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
r+\frac{x_d}{\omega_n}p & -f_0x_q & \frac{1}{\omega_n}p & \frac{1}{\omega_n}p & -f_0 & -x_qi_{q0} \\
f_0x_d & r+\frac{x_q}{\omega_n}p & f_0 & f_0 & \frac{1}{\omega_n}p & x_di_{d0}+i_{E0} \\
\frac{T_E}{\omega_E}x_d(1-\sigma_{dE})p & 0 & 1+\frac{T_E}{\omega_n}p & \frac{T_E}{\omega_n}(1-\mu_E)p & 0 & 0 \\
\frac{T_D}{\omega_n}x_d(1-\sigma_{dD})p & 0 & \frac{T_d}{\omega_n}(1-\mu_D)p & 1+\frac{T_D}{\omega_n}p & 0 & 0 \\
0 & \frac{T_Q}{\omega_n}x_q(1-\sigma_{qQ})p & 0 & 0 & 1+\frac{T_Q}{\omega_n}p & 0 \\
i_{q0}(x_d-x_q) & i_{E0}+i_{d0}(x_d-x_q) & i_{q0} & i_{q0} & -i_{q0} & -\frac{1}{\omega_n}T_mp
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
\Delta\widetilde{i}_d \\
\Delta\widetilde{i}_q \\
\Delta\widetilde{i}_E \\
\Delta\widetilde{i}_D \\
\Delta\widetilde{i}_Q \\
\Delta\widetilde{f}
\end{vmatrix}
\tag{20}
$$

3. FUNCȚIA DE TRANSFER

Se calculează funcția

$$B(p) = \frac{\Delta\widetilde{m}_e}{\Delta\widetilde{\delta}} \tag{21}$$

prin exprimarea lui $\Delta\widetilde{i}_d$ și $\Delta\widetilde{i}_q$ din (20) în funcție de $\Delta\widetilde{\delta}$ și prin introducerea lor în ecuațiile din rîndurile 3, 4, 5 ale matricei (20) (aceste calcule sînt date în anexă).

Se obține

$$B(p) = \frac{(W_2Y_1 - W_1Y_3)\,W_4 + (W_1Y_4 - W_2Y_2)\,W_3}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}, \tag{22}$$

în care

$$W_1 = -u \sin \delta_0, \tag{23}$$

$$W_2 = u \cos \delta_0, \tag{24}$$

$$W_3 = (x_d - x_q)\,i_{d0} + i_{E0} + x_q i_{d0} \frac{\frac{T_Q}{\omega_n} x_q(1 - \sigma_{qQ})\,p}{1 + \frac{T_Q}{\omega_n} p}, \tag{25}$$

$$W_4 = (x_d - x_q)\,i_{q0} - x_d i_{q0}\,p \frac{\frac{T_E}{\omega_n}(1 - \sigma_{dE})\left(1 + \frac{T_D}{\omega_n}\mu_D p\right) + \frac{T_D}{\omega_n}(1 - \sigma_{dD})\left(1 + \frac{T_E}{\omega_n}\mu_E p\right)}{\left(1 + \frac{T_E}{\omega_n} p\right)\left(1 + \frac{T_D}{\omega_n} p\right) - \frac{T_E T_D}{\omega_n^2}(1 - \mu_E)(1 - \mu_D)\,p^2}, \tag{26}$$

$$Y_1 = r + \frac{x_q}{\omega_n} p - T_m \frac{p^3 \frac{T_Q}{\omega_n} x_q(1 - \sigma_{qQ}) - (x_d i_{d0} + i_{E0})\omega_n^2 \times \left\{ i_{d0} \frac{T_Q}{\omega_n}(1 - \sigma_{qQ})\,p + [i_{E0} + i_{d0}(x_d - x_q)]\left(1 + \frac{T_Q}{\omega_n} p\right)\right\}}{\omega_n T_m p \left(1 + \frac{T_Q}{\omega_n} p\right)}, \tag{27}$$

$$Y_2 = f_0 x_d + \frac{\omega_n i_{q0}(x_d - x_q)(x_d i_{d0} + i_{E0})}{T_m p} - \frac{[T_m p f_0 + \omega_n i_{q0}(x_d i_{d0} + i_{E0})]\left[\frac{T_E}{\omega_n}(1 - \sigma_{dE})\left(1 + \frac{T_D}{\omega_n}\mu_D p\right) + \frac{T_D}{\omega_n}(1 - \sigma_{ds})\left(1 + \frac{T_E}{\omega_n}\mu_E p\right)\right]}{T_m p \omega_n \left[\left(1 + \frac{T_E}{\omega_n} p\right)\left(1 + \frac{T_D}{\omega_n} p\right) - \frac{T_E T_D}{\omega_n^2}(1 - \mu_E)(1 - \mu_D)p^2\right]} - p x_d, \tag{28}$$

$$Y_3 = -f_0 x_q - x_q \frac{(\omega_n x_q i_{q0} i_{d0} - f_0 T_m p)\frac{T_Q}{\omega_n}(1-\sigma_{qQ})\,p + \omega_n i_{q0}\,[i_{E0} + i_{d0}(x_d - x_q)]\left(1+\frac{T_Q}{\omega_n}p\right)}{T_m p\left(1+\frac{T_Q}{\omega_n}p\right)}, \tag{29}$$

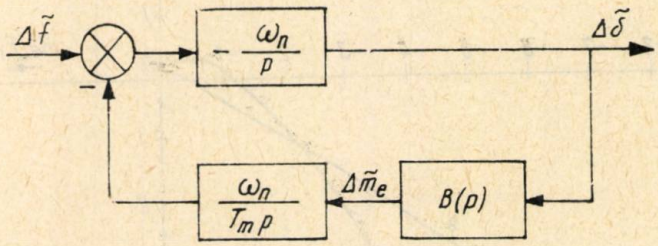


Fig. 2. — Schema structurală a motorului sincron la variația frecvenței.

$$Y_4 = r + \frac{x_d}{\omega_n}p - \frac{\omega_n x_q i_{q0}^2 (x_q - x_q)}{T_m p} - px_d \frac{(T_m p^2 - \omega_n^2 x_q i_{q0}^2)\left[\frac{T_E}{\omega_n}(1-\sigma_{dE})\left(1+\frac{T_D}{\omega_n}\mu_D p\right) + \frac{T_D}{\omega_n}(1-\sigma_{dD})\left(1+\frac{T_E}{\omega_n}\mu_E p\right)\right]}{T_m p\omega_n\left[\left(1+\frac{T_E}{\omega_n}p\right)\left(1+\frac{T_D}{\omega_n}p\right) - \frac{T_E T_D}{\omega_n^2}(1-\mu_E)(1-\mu_D)\,p^2\right]}. \tag{30}$$

Introducînd expresia cuplului electromagnetic în ecuația mișcării (19), se obține

$$B(p)\,\Delta\tilde{\delta} = \frac{T_m}{\omega_n^2}p^2\Delta\tilde{\delta} + \frac{T_m}{\omega_n}p\Delta\tilde{f} \tag{31}$$

sau

$$\Delta\tilde{\delta} = -\frac{\omega_n}{p}\left[\Delta\tilde{f} - B(p)\frac{\omega_n}{T_m p}\Delta\tilde{\delta}\right], \tag{32}$$

care sugerează schema structurală a unui circuit închis (fig. 2), în care mărimea de intrare este $\Delta\tilde{f}$, iar mărimea de ieșire este $\Delta\tilde{\delta}$.

4. ANALIZA STABILITĂȚII

Cunoscînd răspunsul motorului sincron la variația frecvenței, se poate analiza stabilitatea pentru un anumit regim staționar, aplicînd criteriul lui Nyquist. Conform acestui criteriu, un sistem în circuit închis este stabil dacă și numai dacă hodrograful funcției $F(j\nu)$, cu ν variind

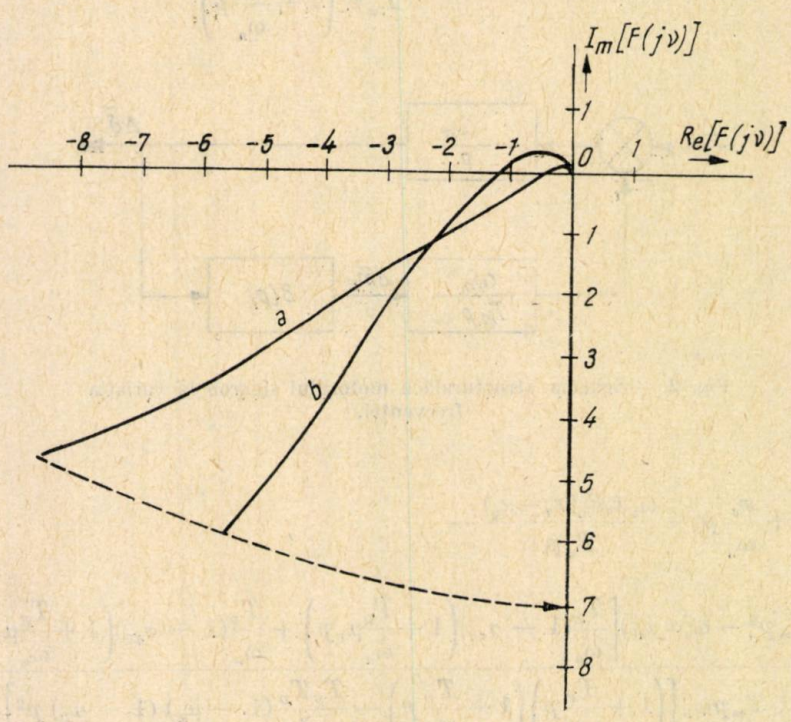


Fig. 3. — Caracteristicile de frecvență ale circuitului deschis: *a* — stabil; *b* — instabil.

de la $-\infty$ la $+\infty$, nu înconjură punctul $(-1, 0)$, cînd funcția de transfer a circuitului deschis $F(p)$ nu are poli cu părți reale pozitive.

Funcția de transfer a circuitului deschis (fig. 2) este

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{T_m p^2} B(p). \tag{33}$$

Din cauza complexității funcției de transfer, este necesar să se facă uz de calculatoarele numerice. În figura 3 se arată două contururi Nyquist, calculate cu un calculator IBM 360/30 pentru un motor de 3,5 kW. Curba *a*, corespunzătoare frecvenței $f = 0{,}25$ u.r. și cuplului $m_{e0} = 0{,}88$ u.r., nu înconjură punctul $(-1, 0)$, deci în acest regim de funcționare motorul este stabil dacă variază frecvența (punctul *a* din figura 5). La aceeași frecvență dar la un cuplu mai mic, egal cu $m_{e0} = 0{,}62$, caracteristica de

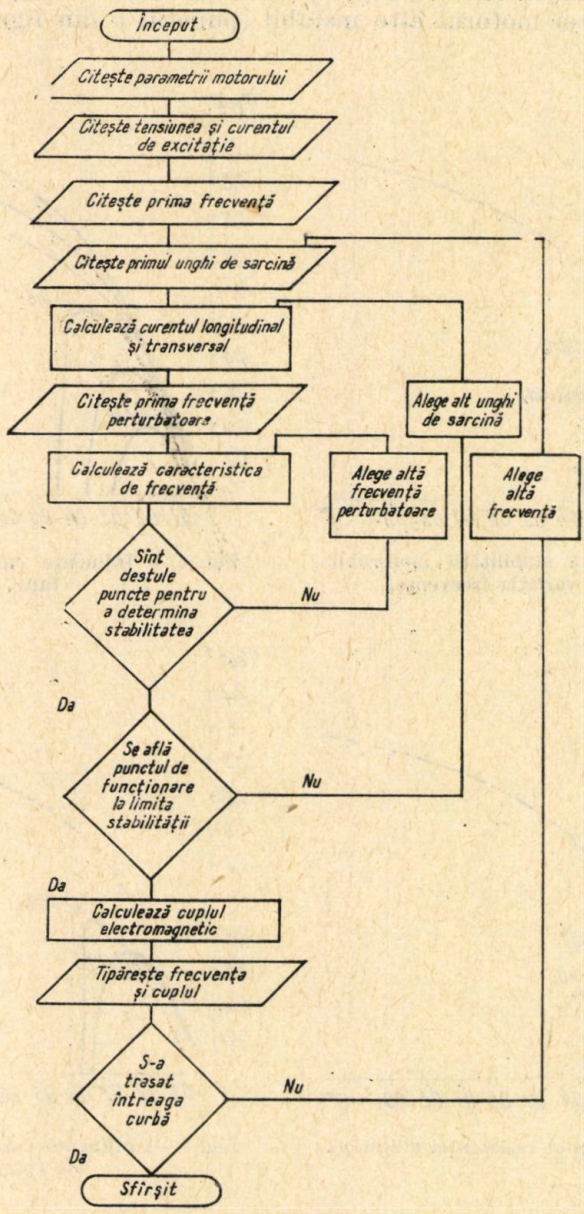


Fig. 4. — Schema logică de calcul al limitei stabilității.

frecvență b înconjură punctul $(-1, 0)$, deci la o variație a frecvenței tensiunii de alimentare oscilațiile produse de această perturbare sînt neamortizate, deci motorul este instabil (punctul b din figura 5).

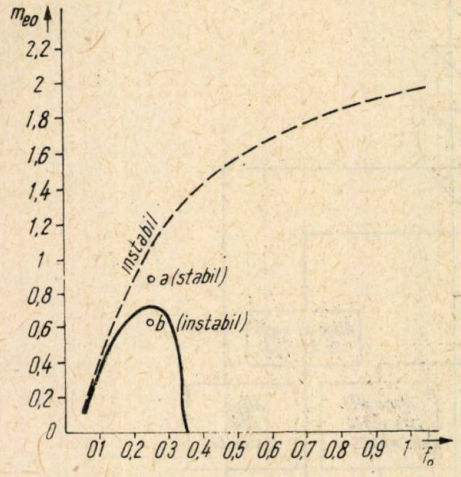


Fig. 5. — Limita stabilității motorului sincron la variația frecvenței.

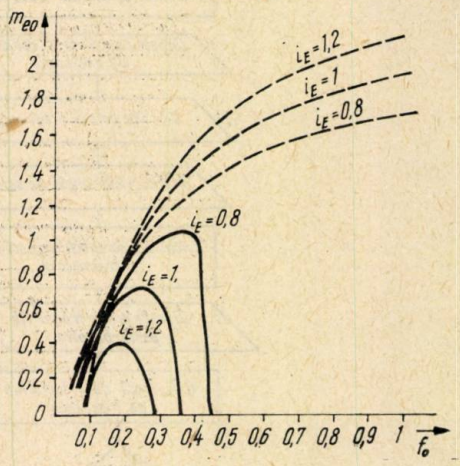


Fig. 6. — Influența curentului de excitație.

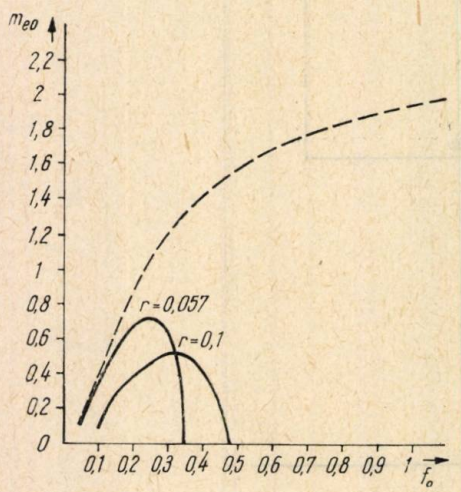


Fig. 7. — Influența rezistenței statorice.

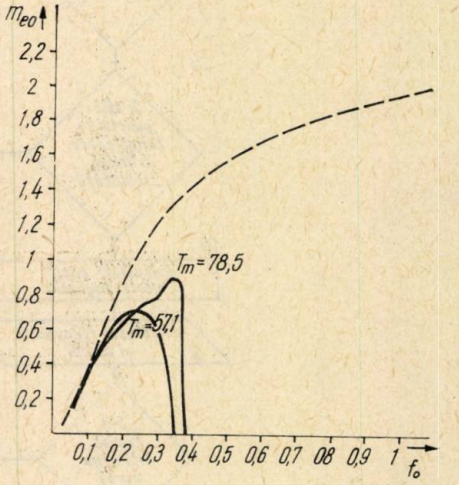


Fig. 8. — Influența constantei mecanice de timp.

Unind toate punctele din planul de coordonate $m_{e0} - f_0$ corespunzătoare regimurilor de funcționare pentru care caracteristicile de frecvență trec prin punctul $(-1, 0)$, se obține o curbă care reprezintă limita stabilității motorului sincron la variația frecvenței (fig. 5). Aceste puncte de funcționare se determină cu ajutorul programului a cărui schemă logică de calcul este dată în figura 4. Schema logică de calcul conține trei bucle,

prima avînd ca parametru pulsația ν, a doua unghiul de sarcină δ și a treia frecvența tensiunii de alimentare f. În cadrul deciziei logice corespunzătoare primei bucle calculatorul stabilește dacă caracteristica de frecvență are destule puncte pentru a se determina stabilitatea, în cadrul celei de-a doua decizii logice dacă caracteristica trece prin apropierea punctului $(-1, 0)$, iar în cadrul ultimei decizii logice dacă s-au considerat toate regimurile staționare în care funcționarea ar putea fi instabilă.

Mărimile corespunzătoare regimului staționar i_{d0}, i_{q0}, m_{e0} pentru un anumit unghi de sarcină și o anumită frecvență se calculează în cadrul aceluiași program cu relațiile stabilite în [4], fără a se neglija rezistența înfășurării indusului, care la frecvențe joase poate deveni comparabilă cu reactanțele.

5. REZULTATELE CALCULELOR

Calculele au fost făcute pentru un motor de 3,5 kW, ai cărui parametri sînt dați în [4]. În figurile 5, 6, 7 și 8, cu linie întreruptă s-a reprezentat cuplul maxim al motorului, iar cu linie continuă delimitarea zonei de instabilitate. S-a stabilit că zona de instabilitate crește cu scăderea curentului de excitație (fig. 6), se deplasează înspre frecvențe mai ridicate cu creșterea rezistenței înfășurării indusului (fig. 7) și crește, contrar așteptărilor, cu creșterea constantei mecanice de timp. În toate cazurile, legea de modificare a tensiunii este aceeași cu a frecvenței staționare $u = f_0$.

6. CONCLUZII

Funcționarea instabilă a motorului sincron poate surveni ca urmare a variației frecvenței tensiunii de alimentare, variație făcută cu scopul de a modifica turația motorului. Zonele de funcționare instabilă pot fi determinate aplicînd criteriul lui Nyquist funcției de transfer obținute prin liniarizarea ecuațiilor diferențiale ale mașinii sincrone din teoria celor două axe. Calculatorul electronic numeric permite determinarea directă a zonelor de instabilitate și a influenței diferiților parametri ai sistemului asupra stabilității motorului.

ANEXĂ

Calculul funcției

$$B(p) = \frac{\Delta\widetilde{m}_e}{\Delta\widetilde{\delta}}$$

se face descompunînd matricea (20) în forma

$$\begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X_1] \\ [X_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X_2] \\ [X_4] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [i_1] \\ [i_2] \end{bmatrix}, \tag{34}$$

în care

$$[u_1] = \begin{bmatrix} u\cos\delta_0 + \dfrac{x_q}{\omega_n} i_{q0} p \\ -\left(u\sin\delta_0 + \dfrac{x_d}{\omega_n} i_{d0} p + \dfrac{1}{\omega_n} i_{E0} p\right) \end{bmatrix} \Delta\tilde{\delta}, \tag{35}$$

$$[u_2] = \left[0,\ 0,\ 0,\ \frac{T_m}{\omega_n^2} p^2\right]_t \Delta\tilde{\delta}, \tag{36}$$

$$[X_1] = \begin{array}{|c|c|} \hline r + \dfrac{x_d}{\omega_n} p & -f_0 x_q \\ \hline f_0 x_d & r + \dfrac{x_q}{\omega_n} p \\ \hline \end{array}, \tag{37}$$

$$[X_2] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dfrac{1}{\omega_n} p & \dfrac{1}{\omega_n} p & -f_\theta & -x_q i_{q0} \\ \hline f_0 & f_0 & \dfrac{1}{\omega_n} p & x_d i_{d0} + i_{E0} \\ \hline \end{array}, \tag{38}$$

$$[X_3] = \begin{array}{|c|c|} \hline g & 0 \\ \hline h & 0 \\ \hline 0 & i \\ \hline j & k \\ \hline \end{array}; \tag{39}$$

$$[X_4] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & 0 & 0 \\ \hline c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e & 0 \\ \hline i_{q0} & i_{q0} & -i_{d0} & -\dfrac{1}{\omega_n} T_m p \\ \hline \end{array}, \tag{40}$$

$$[i_1] = [\Delta\tilde{i}_d,\ \Delta\tilde{i}_q]_t, \tag{41}$$

$$[i_2] = [\Delta\tilde{i}_E, \Delta\tilde{i}_D, \Delta\tilde{i}_Q, \tilde{\Delta}f]_t, \tag{42}$$

cu notațiile

$$a = 1 + \frac{T_E}{\omega_n} p; \tag{43}$$

$$b = \frac{T_E}{\omega_n} (1 - \mu_E) p; \tag{44}$$

$$c = \frac{T_D}{\omega_n} (1 - \mu_D) p, \tag{45}$$

$$d = 1 + \frac{T_D}{\omega_n} p; \tag{46}$$

$$e = 1 + \frac{T_Q}{\omega_n} p; \tag{47}$$

$$g = \frac{T_E}{\omega_n} x_d (1 - \sigma_{dE}) p, \tag{48}$$

$$h = \frac{T_D}{\omega_n} x_d (1 - \sigma_{dD}) p; \tag{49}$$

$$i = \frac{T_Q}{\omega_n} x_q (1 - \sigma_{qQ}) p, \tag{50}$$

$$j = i_{q0}(x_d - x_q); \tag{51}$$

$$k = i_{E0} + i_{d0}(x_d - x_q). \tag{52}$$

Se arată ușor că

$$[u_1] - [X_2][X_4^{-1}][u_2] = \{[X_1] - [X_2][X_4^{-1}][X_3]\}[i_1] \tag{53}$$

sau, notînd

$$[u'] = [u_1] - [X_2][X_4^{-1}][u_2], \tag{54}$$

$$[X'] = [X_1] - [X_2][X_4^{-1}][X_3], \tag{55}$$

avem

$$[i_1] = [X'^{-1}][u']. \tag{56}$$

Cu notațiile (27)—(30) se obține

$$[X'] = \left[\begin{array}{c|c} Y_4 & Y_3 \\ \hline Y_2 & Y_1 \end{array}\right]; \tag{57}$$

$$[X'^{-1}] = \frac{1}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}\left[\begin{array}{c|c} Y_1 & -Y_3 \\ \hline -Y_2 & Y_4 \end{array}\right], \tag{58}$$

$$[u'] = \begin{bmatrix} u\cos\delta_0 \\ -u\sin\delta_0 \end{bmatrix}\Delta\widetilde{\delta}; \tag{59}$$

$$[u'] = \begin{bmatrix} W_2 \\ W_1 \end{bmatrix}\Delta\widetilde{\delta}, \tag{60}$$

$$[i_1] = \frac{1}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}\begin{bmatrix} W_2Y_1 - W_1Y_3 \\ W_1Y_4 - W_2Y_2 \end{bmatrix}\Delta\widetilde{\delta}, \tag{61}$$

$$\Delta\widetilde{i}_d = \frac{W_2Y_1 - W_1Y_3}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}\Delta\widetilde{\delta}; \tag{62}$$

$$\Delta\widetilde{i}_q = \frac{W_1Y_4 - W_2Y_2}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}\Delta\widetilde{\delta}. \tag{63}$$

Din rîndurile 3, 4 și 5 ale matricei (20) rezultă

$$\Delta\widetilde{i}_Q = -\frac{i}{e}\Delta\widetilde{i}_d; \tag{64}$$

$$\Delta\widetilde{i}_D = \frac{ah - gc}{bc - ad}\Delta\widetilde{i}_d; \tag{65}$$

$$\Delta\widetilde{i}_E = \frac{gd - bh}{bc - ad}\Delta\widetilde{i}_d. \tag{66}$$

Din (18) rezultă

$$\Delta\widetilde{m}_e = \left[i_{q0}(x_d - x_q) + i_{q0}\frac{g(d-c) + h(a-b)}{bc - ad}\right]\Delta\widetilde{i}_d + \\ + \left[i_{d0}\frac{i}{e} + i_{d0}(x_d - x_q) + i_{E0}\right]\Delta\widetilde{i}_q \tag{67}$$

sau, cu notațiile (23) — (30),

$$B(p) = \frac{\Delta\widetilde{m}_e}{\Delta\widetilde{\delta}} = \frac{(W_2Y_1 - W_1Y_3)W_4}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3} + \frac{(W_1Y_4 - W_2Y_2)W_3}{Y_1Y_4 - Y_2Y_3}. \qquad (68)$$

NOTAȚII

u — tensiunea la bornele înfășurării statorice reale în regim staționar [u.r.];

u_d, u_q, u_0 — tensiunile de alimentare a înfășurărilor statorice echivalente [u.r.];

i_d, i_q, i_0 — curenții din înfășurările statorice echivalente [u.r.];

i_D, i_Q, i_E — curenții din înfășurarea de amortizare din axa longitudinală, transversală și, respectiv, din înfășurarea de excitație [u.r.];

i_{d0}, i_{q0}, i_{E0} — curenții din înfășurările longitudinală, transversală și, respectiv, de excitație în regim staționar [u.r.];

$\Delta\widetilde{i}_d$, $\Delta\widetilde{i}_q$, $\Delta\widetilde{i}_E$, $\Delta\widetilde{i}_D$, $\Delta\widetilde{i}_Q$ — transformatele Laplace ale abaterilor față de regimul staționar ale curenților din înfășurarea longitudinală, transversală, de excitație și de amortizare;

r — rezistența înfășurărilor statorice [u.r.];

σ_{dE}, σ_{dD}, σ_{qQ}, μ_E, μ_D — coeficienții de dispersie [3];

x_d, x_q — reactanța longitudinală, respectiv transversală [u.r.];

ψ_d, ψ_q, ψ_0 — fluxurile înlănțuite cu înfășurările echivalente [u.r.];

ψ_E, ψ_D, ψ_Q — fluxurile înlănțuite cu înfășurările de excitație, de amortizare din axa longitudinală și, respectiv, transversală [u.r.];

ϑ — unghiul dintre axa înfășurării reale a și axa longitudinală a rotorului;

δ — unghiul de sarcină;

$\Delta\widetilde{\delta}$ — transformata Laplace a abaterii unghiului de sarcină față de valoarea din regimul staționar;

ω — pulsația [unități fizice];

ω_n — pulsația nominală [unități fizice];

f — frecvența [u.r.];

t — timpul [unități fizice];

T_E, T_D, T_Q, T_m — constantele de timp ale înfășurărilor și constanta mecanică de timp [u.r.] [3];

m_m — cuplul mecanic rezistent [u.r.];

m_{e0} — cuplul electromagnetic în regim staționar [u.r.];

$\Delta\widetilde{f}$, $\Delta\widetilde{m}_e$ — transformatele Laplace ale abaterii frecvenței, respectiv ale cuplului electromagnetic, față de valorile regimului staționar;

p — operatorul Laplace;
$B(p)$ — funcția de transfer între $\Delta\tilde{f}$ și $\Delta\tilde{\delta}$;
$F(p)$ — funcția de transfer a circuitului deschis;
0 — indice pentru regimul staționar;
Δ — variații foarte mici ale variabilelor;
$\sim$ — transformata Laplace.

BIBLIOGRAFIE

1. Th. A. Lipo, P. C. Krause, *Stability analysis for variable frequency operation of synchronous machines*, IEEE Trans., **87**, *1*, (1968).
2. R. H. Park, *Two-reaction theory of synchronous machines, generalized method of analysis* AIEE Trans., p. I, **48**, 716–727 (1929).
3. Th. Laible, *Die Theorie der Sinchronmaschine im nichtstationären Betrieb*, Springer-Verlag, 1952.
4. Em. Micu, *Funcția de transfer și stabilitatea motorului sincron la frecvențe joase și cuplu rezistent variabil*, Electrotehnica, *3* (1970).

CÎTEVA NOŢIUNI GENERALE DE STABILITATE DE INTERES SPECIAL ÎN TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

DE

V. M. POPOV

517.9:621.316.7

Se extinde noţiunea de hiperstabilitate, definind-o pentru sisteme generale despre care se presupune doar un minimum de condiţii restrictive. Se pune în evidenţă legătura strînsă dintre hiperstabilitate şi stabilitatea în sensul „indice mărginit-ieşire mărginită", care este interpretată drept noţiunea centrală de stabilitate, întrucît este prezentă (implicit) în orice studiu de stabilitate pentru sistemele automate.

1. INTRODUCERE

Progresele obţinute în teoria stabilităţii sistemelor automate au condus la introducerea unui mare număr de noi criterii de stabilitate. Totodată, noţiunea însăşi de stabilitate s-a îmbogăţit şi s-a diversificat. Alături de noţiunea de stabilitate după Leapunov (vezi, de exemplu, [1]) au căpătat răspîndire alte noţiuni, ca, de exemplu, noţiunea de stabilitate în sensul „intrare mărginită-ieşire mărginită" [2]—[4] sau noţiunea de „hiperstabilitate" [5]—[6]. Legătura dintre aceste noţiuni nu este nicidecum evidentă, ceea ce face necesară elaborarea unei concepţii mai generale, care să grupeze în mod unitar toate aceste noţiuni diferite de stabilitate.

În această ordine de idei se introduce în prezenta lucrare noţiunea de stabilitate în sensul „indice mărginit-ieşire mărginită", ca o generalizare directă a noţiunii de stabilitate în sensul „intrare mărginită-ieşire mărginită". În principal, această generalizare de obţine atribuind un înţeles mai larg cuvintelor „intrare" şi „ieşire". Noţiunea generală de stabilitate astfel obţinută subsumează într-un mod foarte simplu conţinutul principal al celorlalte noţiuni de stabilitate analizate. Totuşi, această noţiune generală nu epuizează conţinutul noţiunii de hiperstabilitate, întrucît, spre deosebire de aceasta din urmă, ea nu este invariantă faţă

de aplicarea interconexiunilor obişnuite din practica sistemelor automate. Pentru a asigura şi această proprietate se introduc anumite condiţii suplimentare, care, în marea majoritate a cazurilor, sînt în mod automat îndeplinite. Se extinde astfel noţiunea de hiperstabilitate la obiecte mai generale decît cele considerate în lucrările anterioare. Această definiţie reprezintă punctul final la care au condus eforturile de a da pentru noţiunea de hiperstabilitate o definiţie care să aibă simplicitatea maximă compatibilă cu gradul de generalitate adoptat.

2. DESCRIEREA OBIECTELOR STUDIATE

Obiectele studiate în teoria stabilităţii sînt descrise de obicei cu ajutorul unor ecuaţii diferenţiale ordinare. Se folosesc însă adeseori diferite mijloace matematice de descriere avînd un caracter mai general, cum sînt, de exemplu, ecuaţiile integrale sau anumite ecuaţii cu derivate parţiale. Pentru a asigura definiţiilor pe care le vom introduce un grad maxim de generalitate, este de dorit să evităm în acest stadiu introducerea unui astfel de mod precis şi particular de descriere matematică a obiectelor studiate. Pentru acest motiv vom defini obiectele noastre drept anumite familii de funcţii (sau familii de soluţii). Mai precis vom considera funcţiile $x(t)$, continue pe porţiuni, definite pentru orice număr real t din intervalul $t_0 \leqslant t$ şi avînd valori în spaţiul vectorial cu n dimensiuni R^n. Pentru concizie vom nota cu $\mathcal{C}_p\,[t_0, \infty)$ clasa acestor funcţii. Vom folosi simbolul $x_{[t_0, t_1]}$, avînd semnificaţia obişnuită (A cunoaşte pe $x_{[t_0, t_1]}$ este echivalent cu a cunoaşte funcţia $x(t)$ în intervalul $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$). Ca urmare, simbolul $x_{[t_0, \infty)}$ desemnează funcţia $x(t)$ în întreg intervalul $t_0 \leqslant t < \infty$.

Un obiect O va fi definit ca o familie de funcţii $x_{[t_0, \infty)}$ din clasa $\mathcal{C}_p[t_0, \infty)$, satisfăcînd anumite condiţii specifice obiectului considerat (De exemplu, se poate cere ca aceste funcţii să satisfacă o anumită ecuaţie diferenţială.). Un obiect este deci o submulţime a mulţimii $\mathcal{C}_p\,[t_0, \infty)$.

Vom mai presupune că submulţimea de funcţii care defineşte obiectul nostru conţine funcţia identic nulă $x(t) \equiv 0$ pentru $t_0 \leqslant t < \infty$. Dacă această condiţie nu este îndeplinită, ea poate, în general, fi asigurată după aplicarea unei transformări convenabil alese.

3. SELECŢIONAREA UNEI PĂRŢI DIN INFORMAŢIA REFERITOARE LA OBIECTUL STUDIAT

Conform celor arătate la punctul precedent, a cunoaşte un obiect înseamnă a cunoaşte familia de funcţii din care este compus. Întrucît aceasta implică prelucrarea unei mari cantităţi de informaţie, este important să se facă o selecţie a informaţiei de care dispunem despre obiect. Această selecţie se poate face după diferite criterii.

Un prim criteriu este uşurinţa cu care se poate obţine informaţia respectivă. În general, există o parte din informaţie care se obţine foarte uşor sau este dată direct, în timp ce restul informaţiei se obţine în urma unor operaţii mai laborioase.

Un alt criteriu este acela al importanței informației respective. Se poate totdeauna selecționa o parte a informației care prezintă o mai mare importanță decît restul. Bineînțeles că aprecierea importanței relative a diferitelor părți din informația de care dispunem este o operație în care intervin și elemente mai mult sau mai puțin arbitrare.

Încă la Poincaré teoria stabilității și-a găsit justificarea și puterea în faptul că există căi simple de a obține informațiile de principală importanță prin prelucrarea informațiilor care sînt date direct sau se obțin în mod simplu. Este evident că eficacitatea metodelor de acest fel depinde în mare măsură de abilitatea cu care se efectuează selecționarea informației. Totodată, elementele arbitrare care apar la selecționarea informației pot fi eliminate, cel puțin în parte, prin alegerea lor în așa fel încît să se obțină cu cît mai mare ușurință informația principală selecționată.

4. „INDICII" ȘI „IEȘIREA" OBIECTULUI

Bineînțeles, informațiile selecționate conform discuției de la punctul precedent trebuie să fie exprimate într-o formă precisă. Aceasta se poate face cu ajutorul unor funcții scalare definite pe mulțimea funcțiilor $x_{[t_0, t]}$, care caracterizează obiectul studiat.

Astfel, informația selecționată ca prezentînd principala importanță va fi descrisă cu ajutorul unei mărimi scalare $\eta_p(x_{[t_0, t]})$, denumită „indice de ieșire", sau, mai scurt, „ieșire" (cînd nu există nici un pericol de confuzie cu ieșirea obiectului în sensul uzual al cuvîntului).

Indicele de ieșire realizează deci o corespondență de forma

$$x_{[t_0, t]} \to \eta_p(x_{[t_0, t]}),$$

unde $x_{[t_0, t]}$ este o secțiune oarecare (pentru $t \geqslant t_0$) a unei funcții oarecare $x_{[t_0, \infty]}$ făcînd parte din mulțimea de funcții care definește obiectul studiat. Acest indice este deci o funcție definită pe mulțimea secțiunilor $x_{[t_0, t]}$, $t \geqslant t_0$ și avînd valori reale. Presupunem că aceste valori sînt pozitive sau nule și că indicele este nul pentru $x_{[t_0, t]} \equiv 0$. În plus, presupunem că are loc și următoarea proprietate de continuitate: oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$ astfel încît, pentru orice funcție $x_{[t_0, t]}$ (din familia care definește obiectul studiat) satisfăcînd condiția $\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \| x(\tau) \| \leqslant \delta$, este îndeplinită inegalitatea $\eta_p(x_{[t_0, t]}) \leqslant \varepsilon$ (Mai sus, $\| x \|$ reprezintă norma vectorului x).

O alegere posibilă a funcției $\eta_p(x_{[t_0, t]})$ este dată de relația

$$\eta_p(x_{[t_0, t]}) = \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \| x(\tau) \|.$$

Această alegere implică faptul că se consideră drept informație principală membrul drept al relației de mai sus și tot restul informației referitoare la funcția $x(t)$ se neglijează ca fiind de importanță secundară.

Indicele de ieșire $\eta_p(x_{[t_0, t]})$ poate fi interpretat ca o măsură a „distanței" dintre funcția $x_{[t_0, t]}$ și funcția identic nulă.

În mod similar, informaţia despre obiect care este dată direct sau se obţine foarte simplu va fi descrisă cu ajutorul unui „indice de intrare”,

$$x_{[t_0, t]} \to \eta_d(x_{[t_0, t]}), \quad (t \geqslant t_0, \ \eta_d(x_{[t_0, t]}) \geqslant 0),$$

care este o funcţie definită pe mulţimea funcţiilor $x_{[t_0, t]}$ şi avînd valori reale şi pozitive sau nule. Se presupune, de asemenea, că acest indice ia valoarea zero pentru funcţia identic nulă şi că este continuu în sensul care a fost precizat mai înainte. Cu ajutorul indicelui de intrare se poate descrie o anumită informaţie despre obiectul studiat, exprimată, de exemplu, cu ajutorul unei inegalităţi de forma $\eta_d(x_{[t_0, t]}) \leqslant \text{const}$. Diferite exemple vor fi date mai jos.

Este util să se separe informaţia dată de indicele de intrare în două componente, punînd în evidenţă o parte care joacă un rol similar cu „condiţiile iniţiale”. Mai precis, să presupunem că se dă un „interval iniţial” fix de forma $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ şi că avem o anumită informaţie despre comportarea obiectului în acest interval iniţial şi urmărim obţinerea unor informaţii despre comportarea obiectului în intervalul $t \geqslant t_1$. Vom considera o descompunere a indicelui de intrare în două componente:

$$\eta_d(x_{[t_0, t]}) = \eta_{in}(x_{[t_0, t_1]}) + \eta_c(x_{[t_0, t]}) \quad (t \geqslant t_1),$$

unde $\eta_{in}(x_{[t_0, t_1]})$ se va numi „indice iniţial”, iar $\eta_c(x_{[t_0, t]})$ „indice curent”. Presupunem că atît indicele iniţial, cît şi indicele curent au aceleaşi proprietăţi generale ca şi ceilalţi indici definiţi mai sus (au valori pozitive sau nule, se anulează pentru funcţia identic nulă şi sînt continue în sensul precizat).

Cu ajutorul indicilor definiţi mai sus se pot obţine diferite proprietăţi ale obiectelor studiate. Evident, aceste proprietăţi vor depinde de alegerea indicilor de intrare şi de ieşire. Din acest motiv este indicat să se introducă un nou obiect (sau un „sistem”), scris sub forma (O, η_d, η_p) şi format din obiectul iniţial O, la care se adaugă indicii η_d şi η_p. În loc de a vorbi despre „proprietăţile obiectului O în raport cu indicii η_d şi η_p” vom putea vorbi, mai simplu, despre „proprietăţile sistemului (O, η_d, η_p)”.

5. STABILITATE ÎN SENSUL „INDICE MĂRGINIT-IEŞIRE MĂRGINITĂ”

Proprietatea principală de stabilitate care poate fi exprimată cu ajutorul indicilor introduşi mai sus este dată de următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 1. Spunem că obiectul O împreună cu indicii η_d şi η_p (sau sistemul (O, η_d, η_p)) este stabil în sensul „indice mărginit-ieşire mărginită”, dacă există o funcţie continuă, nulă în origine, $\varphi(\rho)$, definită pentru $\rho \geqslant 0$, astfel încît, pentru orice funcţie $x_{[t_0, t]}$ $(t \geqslant t_0)$ pentru care indicii η_p şi η_d sînt definiţi, este îndeplinită inegalitatea

$$\eta_p(x_{[t_0, t]}) \leqslant \varphi(\eta_d(x_{[t_0, t]})).$$

Să observăm că din această definiţie rezultă anumite consecinţe asupra funcţiei $\varphi(\rho)$; de exemplu, inegalitatea $\varphi(\eta_d(x_{[t_0, t]})) \geqslant 0$. Funcţia $\varphi(\rho)$ se poate alege şi strict crescătoare, dar nu este necesar să se introducă această condiţie în definiţia generală.

Definiția de mai sus se poate modifica cerînd ca inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ să fie satisfăcută numai în anumite condiții. De exemplu, se poate cere să existe o vecinătate a originii în care inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ este satisfăcută. Se obține atunci o proprietate cu caracter local. În această lucrare ne ocupăm însă în special de proprietățile de stabilitate cu caracter global.

Inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ reprezintă o proprietate referitoare numai la informația reprezentată de indicii η_d și η_p. Această proprietate poate fi exprimată în felul următor: dacă despre o funcție oarecare $x_{[t_0,\infty)}$, făcînd parte din mulțimea de funcții care caracterizează obiectul $\mathcal{O}$, cunoaștem doar o evaluare a valorilor indicelui $\eta_d(x_{[t_0,t]})$ pentru $t \geqslant t_0$ (și nu dispunem de nici o altă informație), atunci obținem o evaluare a indicelui $\eta_p(x_{[t_0,t]})$. De exemplu, dacă cunoaștem inegalitatea $\eta_d(x_{[t_0,t]}) \leqslant \varkappa = \text{Ctă}$ pentru orice $t \geqslant t_0$, atunci obținem imediat inegalitatea $\eta_p(x_{[t_0,t]}) \leqslant \sup\limits_{0\leqslant\rho\leqslant\varkappa} \varphi(\rho) = \text{Ctă}$. Acest rezultat justifică denumirea de „indice mărginit-ieșire mărginită" (pentru simplicitate s-a folosit cuvîntul „indice" în loc de „indice de intrare" și cuvîntul „ieșire" în loc de „indice de ieșire"). Bineînțeles, inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ implică în plus și o proprietate de continuitate în origine (η_p tinde către zero dacă η_d tinde către zero).

Valoarea practică a rezultatelor de acest fel constă în faptul că, prin construcție, η_d reprezintă o informație care se obține direct sau foarte ușor. Inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ permite atunci obținerea imediată a unor concluzii referitoare la η_p, ales astfel încît să reprezinte informația principală privitoare la funcția examinată.

6. EXEMPLE DE ALEGERE A INDICILOR DE INTRARE ȘI DE IEȘIRE

6.1. Să presupunem că obiectul $\mathcal{O}$ este constituit din mulțimea funcțiilor continue $x(t)$, $t \geqslant 0$, satisfăcînd ecuația diferențială

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

unde funcția $f(x)$ satisface condiții care asigură existența și prelungibilitatea soluțiilor pentru $t \geqslant 0$. Presupunem de asemenea că are loc egalitatea $f(0) = 0$ și deci funcția identic nulă $x(t) \equiv 0$ face parte din mulțimea care definește obiectul $\mathcal{O}$.

Informația directă (care se obține imediat) va fi reprezentată de indicele de intrare

$$\eta_d(x_{[0,t]}) = \|x(0)\|,$$

iar informația principală este descrisă de indicele de ieșire

$$\eta_p(x_{[0,t]}) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|x(\tau)\|.$$

Aplicînd definiția 1 pentru sistemul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$ astfel definit, se observă că inegalitatea $\eta_p \leqslant \varphi(\eta_d)$ capătă forma $\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|x(\tau)\| \leqslant \varphi(\|x(0)\|)$ pentru orice $t \geqslant 0$. Ca urmare, afirmația că sistemul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$ definit

mai înainte este stabil în sensul „indice mărginit-ieşire mărginită" revine la a spune că toate soluţiile ecuaţiei $dx/dt = f(x)$ sînt mărginite, iar soluţia trivială $x(t) = 0$ este stabilă în sensul lui Leapunov.

Modificînd expresia indicelui η_p, se poate îngloba în aceeaşi schemă şi noţiunea de stabilitate asimptotică după Leapunov. Pentru aceasta este suficient să se aleagă η_p de forma

$$\eta_p(x_{[0,\,t]}) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| x(\tau) \| + \int_0^t \psi(\| x(\tau) \|) \cdot \mathrm{d}\tau,$$

unde $\psi(\rho)$ este o funcţie continuă, definită pentru $\rho \geqslant 0$, avînd valori reale şi pozitive sau nule, satisfăcînd condiţia $\lim_{\rho \to 0} \psi(\rho) = 0$. Stabilitatea asimptotică se obţine atunci folosind lema lui Barbălat [7].

6.2. Următorul exemplu arată că definiţia 1 înglobează noţiunea obişnuită de stabilitate în sensul „intrare mărginită-ieşire mărginită". Considerăm un obiect O definit cu ajutorul funcţiilor care satisfac ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(u,\ y,\ t),$$

unde u este o funcţie (vectorială sau scalară) definită pentru $t \geqslant 0$ şi continuă pe porţiuni. Presupunem că această ecuaţie diferenţială are soluţii prelungibile pentru $t \geqslant 0$.

Introducem vectorul

$$x = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

şi definim obiectul O cu ajutorul mulţimii tuturor funcţiilor $x(t)$, $t \geqslant 0$, care corespund soluţiilor ecuaţiei diferenţiale considerate.

Funcţia $u(t)$ este cunoscută, astfel încît ea poate interveni în expresia indicelui η_a. Informaţia directă poate fi reprezentată, de exemplu, cu ajutorul unui indice de intrare η_a definit prin relaţia

$$\eta_a(x_{[0,\,t]}) = \| x(0) \| + \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| u(\tau) \|,\ t \geqslant 0$$

(în care caz indicele η_a se descompune într-un „indice-iniţial" şi un „indice curent", după cum am arătat la punctul 4).

Informaţia principală pe care dorim s-o obţinem va fi dată de indicele

$$\eta_p(x_{[0,\,t]}) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| y(\tau) \|,\ t \geqslant 0.$$

Dacă se aplică definiţia 1 pentru sistemul (O, η_a, η_p) definit mai sus, se vede că ecuaţia diferenţială considerată satisface definiţia obişnuită a stabilităţii în sensul „intrare mărginită-ieşire mărginită". În plus se obţine şi concluzia că $\sup \| y(\tau) \|$ tinde către zero dacă $\| x(0) \|$ şi $\sup \| u(\tau) \|$ tind către zero.

6.3. Pentru a ilustra o altă categorie de rezultate care pot fi interpretate în spiritul definiției 1, să arătăm cum se poate încadra în aceeași schemă ca mai sus binecunoscuta lemă a lui Gronwall. Examinăm inegalitatea

$$y(t) \leqslant \lambda \cdot y(0) + \int_0^t u(\tau) \cdot y(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 1,$$

unde $u(t)$ și $y(t)$ sînt funcții scalare continue definite pentru $t \geqslant 0$ și avînd valori pozitive sau nule. Introducem vectorul

$$x = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

și definim obiectul $\mathcal{O}$ drept totalitatea funcțiilor $x(t)$ pentru care inegalitatea considerată este satisfăcută. Informația dată direct este reprezentată de numărul $\lambda \cdot y(0)$ și funcția $u(\tau)$, $\tau \geqslant 0$ și, prin urmare, indicele $\eta_d(x_{[0,t]})$ va depinde de aceste mărimi. Informația principală pe care vrem s-o obținem poate fi descrisă de indicele η_p, definit prin relația

$$\eta_p(x_{[0,t]}) = y(t).$$

Ghidați de lema lui Gronwall, alegem indicele η_d conform relației

$$\eta_d(x_{[0,t]}) = \lambda \cdot y(0) \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t u(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau},$$

obținînd în acest caz inegalitatea $\eta_p(x_{[0,t]}) \leqslant \eta_d(x_{[0,t]})$. Cu alte cuvinte, sistemul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$, definit mai sus, satisface definiția 1.

Exemple de acest fel pot fi obținute cu ușurință interpretînd convenabil alte inegalități diferențiale cunoscute (vezi, de exemplu, [8]). Interpretarea unor astfel de rezultate cunoscute în sensul definiției 1 este interesantă prin faptul că pune în evidență strînsa legătură a acestor rezultate cu noțiunea de stabilitate și focalizează totodată atenția asupra conținutului acestor rezultate, privite ca un mijloc de a obține o informație, considerată de principală importanță, dintr-o altă informație, dată direct.

6.4. Trecînd la domeniul principal de aplicație a definiției 1, vom considera doar un exemplu reprezentativ, dat de modelul de sistem automat introdus de A. I. Lurie [9]:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A \cdot x + b \cdot \rho(c^T \cdot x),$$

unde matricea A și vectorii b și c sînt constante, iar $\rho(\nu)$ este o funcție scalară continuă, definită pentru toate valorile reale ale argumentului și satisfăcînd condiția $\rho(\nu) \cdot \nu \leqslant 0$ pentru orice ν real.

Vom defini, obiectul O drept totalitatea soluțiilor $x(t)$ ale ecuației considerate, prelungibile pentru $t \geqslant 0$. Informația dată direct cuprinde în primul rînd condițiile inițiale $x(0)$. În același timp, relația $\rho(\nu) \cdot \nu \leqslant 0$ dă posibilitatea să se obțină direct o altă informație despre obiectul examinat. Indicele de intrare η_d va trebui să depindă de informațiile directe, discutate mai sus. Ghidați de rezultatele din teoria sistemelor de tip Lurie, putem alege, de exemplu, indicele η_d sub forma

$$\eta_d(x_{[0,t]}) = \|x(0)\|^2 + \left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \int_0^s \rho(c^T \cdot x(\tau)) \cdot c^T \cdot x(\tau) \cdot d\tau\right)_+, \quad t \geqslant 0,$$

unde simbolul $(\alpha)_+$ are următoarea semnificație:

$$(\alpha)_+ = \begin{cases} \alpha \text{ dacă } \alpha \geqslant 0, \\ 0 \text{ dacă } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pentru această alegere a indicelui η_d este evident că mărginirea acestui indice este automat asigurată, ca o consecință a inegalității $\rho(\nu) \cdot \nu \leqslant 0$. Informația principală pe care dorim să o obținem poate fi descrisă cu ajutorul indicelui

$$\eta_p(x_{[0,t]}) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|x(\tau)\|, \quad t \geqslant 0.$$

Dacă sistemul (O, η_d, η_p) definit mai sus satisface definiția 1, indicele η_p este mărginit (întrucît mărginirea indicelui η_d este asigurată prin însuși felul în care am ales acest indice). Astfel, definiția 1 exprimă o proprietate acceptabilă de stabilitate pentru sistemul studiat. Se știe că, dacă un anumit criteriu frecvențial este îndeplinit și sînt satisfăcute și anumite condiții auxiliare, atunci există un număr pozitiv $\varkappa$ astfel încît are loc inegalitatea $\eta_p \leqslant \varkappa \cdot \sqrt{\eta_d}$. Criteriul frecvențial respectiv asigură deci stabilitatea sistemului (O, η_d, η_p) în sensul definiției 1.

Un rezultat mai general se obține dacă se introduce un alt obiect $\tilde{O}$, format din totalitatea funcțiilor $x(t)$ pentru care există o funcție $\mu(t)$ definită pentru $t \geqslant 0$ și continuă pe porțiuni, astfel încît să fie satisfăcută ecuația

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b \cdot \mu.$$

Evident, obiectul $\tilde{O}$ este mai general decît obiectul anterior O (are loc relația $O \subset \tilde{O}$). Definim, prin analogie cu alegerea făcută anterior indicii $\tilde{\eta}_d$ și $\tilde{\eta}_p$ cu ajutorul relațiilor

$$\tilde{\eta}_d(x_{[0,t]}) = \|x(0)\|^2 + \left(\sup_{0 \leqslant \rho \leqslant t} \int_0^\rho \mu(\tau) \cdot c^T \cdot x(\tau) \cdot d\tau\right)_+, \quad t \geqslant 0,$$

$$\tilde{\eta}_p(x_{[0,t]}) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|x(\tau)\|.$$

În acest caz, același criteriu frecvențial amintit anterior asigură stabilitatea sistemului $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ în sensul definiției 1. Mai mult, acest criteriu este de astă dată necesar și suficient pentru stabilitatea sistemului $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ în sensul definiției 1 (dacă anumite condiții auxiliare sînt îndeplinite). Stabilitatea sistemului $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ în sensul definiției 1 implică evident stabilitatea sistemului anterior $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ în sensul aceleiași definiții.

Stabilitatea sistemului $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ în sensul definiției 1 este echivalentă cu *hiperstabilitatea* obiectului $\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b \cdot \mu$, în sensul în care a fost definită această noțiune în lucrările anterioare ale autorului, privind obiectele de această formă (vezi, de exemplu, [10]). Restul prezentei lucrări are ca scop extinderea noțiunii de hiperstabilitate pentru obiectele generale descrise la punctul 2.

7. COMBINAȚII DE SISTEME STABILE

Sistemele automate sînt formate prin combinarea unor elemente mai simple sau pot fi descompuse conceptual într-o asociație de astfel de elemente. Prezintă, ca urmare, interes să se examineze ce se întîmplă cînd se combină două elemente stabile în sensul definiției 1.

Dacă (O, η_d, η_p) și $(\widetilde{O}, \widetilde{\eta}_d, \widetilde{\eta}_p)$ sînt două sisteme stabile în sensul definiției 1, atunci este ușor de văzut că sistemul compus $(O \times \widetilde{O}, \eta_d + \widetilde{\eta}_d \; \eta_p + \widetilde{\eta}_p)$ este stabil în sensul aceleiași definiții. Aceeași proprietate o are evident, și orice sistem $(\hat{O}, \hat{\eta}_d, \hat{\eta}_p)$ satisfăcînd condițiile $\hat{O} \subset O \times \widetilde{O}$ $\hat{\eta}_d \geqslant \eta_d + \widetilde{\eta}_d$ și $\hat{\eta}_p \leqslant \eta_p + \widetilde{\eta}_p$. Proprietatea este, evident, valabilă pentru un număr arbitrar de sisteme stabile.

Pentru a satisface condițiile care intervin în aplicațiile uzuale este nevoie de un rezultat mai puternic. Vom stabili acest rezultat pentru o clasă specială de sisteme (O, η_d, η_p) care generalizează sistemele considerate la punctul 6.4. Indicele η_d al acestor sisteme va fi format, după cum s-a arătat la punctul 4, din suma unui indice inițial și a unui indice curent. În plus, indicele curent va avea o formă specială, astfel încît întregul indice η_d va fi de forma

$$\eta_d(x_{[t_0,\, t_1]}) = \eta_{in}(x_{[t_0,\, t_1]}) + (\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \eta(x_{[t_0,\, \tau]}))_+ \,, \quad t \geqslant t_1. \tag{7.1}$$

Expresia $\eta\,(x_{[t_0,\, \tau]})$, care intervine în relația de mai sus poate fi considerată ca un nou indice, dar are proprietăți mai puțin restrictive decît cele cerute la punctul 4 indicilor de intrare și de ieșire. Ca și în cazul acestor indici, $\eta\,(x_{[t_0,\, t]})$ este o funcție definită pe mulțimea funcțiilor $x_{[t_0,\, t]}$ $(t \geqslant t_1)$ corespunzătoare obiectului studiat și are valori reale. De astă dată aceste valori pot fi și negative. Ca și la punctul 4, funcția $\eta\,(x_{[t_0,\, t]})$ se anulează dacă funcția $x_{[t_0,\, t]}$ este identic nulă și $\eta\,(x_{[t_0,\, t]})$ este o funcție

continuă (în înțelesul precis dat acestor cuvinte la punctul 4). Este evident că forma de mai sus a indicelui $\eta_d(x_{[t_0,\,t]})$ generalizează forma indicelui $\eta_d(x_{[0,\,t]})$ care intervine în exemplul dat la punctul 6.4.

Un sistem $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$ pentru care indicele η_d are forma (7.1) va fi scris (temporar) mai explicit sub forma $(\mathcal{O}; \eta_{in}, \eta; \eta_p)$, punînd astfel în evidență componentele η_{in} și η care intervin în expresia (7.1) a indicelui η_d.

Să considerăm acum două sisteme de această formă: $(\mathcal{O}; \eta_{in}, \eta; \eta_p)$ și $(\widetilde{\mathcal{O}}; \widetilde{\eta}_{in}, \widetilde{\eta}; \widetilde{\eta}_p)$ și să introducem sistemul compus $(\mathcal{O} \times \widetilde{\mathcal{O}}; \eta_{in} + \widetilde{\eta}_{in}, \eta + \widetilde{\eta}; \eta_p + \widetilde{\eta}_p)$. Presupunînd că cele două sisteme componente sînt stabile în sensul definiției 1 se pune întrebarea dacă sistemul compus este de asemenea stabil în sensul aceleiași definiții. Se dovedește că această proprietate nu este (în general) satisfăcută, dar o proprietate similară se poate asigura dacă se introduc anumite condiții suplimentare. Întrucît în schema introdusă mai sus se pot încadra numeroase aplicații, stabilirea unor astfel de condiții suplimentare prezintă interes.

8. STABILITATEA ÎN SENSUL „INDICE MĂRGINIT-IEȘIRE MĂRGINITĂ"

Este indicat să se introducă mai întîi o altă noțiune de stabilitate. Să considerăm sistemele de forma $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$, în care η_d are forma (7.1). Se poate observa că termenul inițial $\eta_{in}(x_{[t_0,\,t_1]})$ are o importanță mai mică decît termenul $(\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \eta(x_{[t_0,\,\tau]}))_+$. Neglijînd informația dată de termenul inițial, să introducem sistemele de forma $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$, unde simbolul trecut în paranteze (η) ține locul unei expresii $\eta(x_{[t_0,\,t]})$, avînd aceleași proprietăți ca și simbolul similar din expresia (7.1). Vom defini stabilitatea unui astfel de sistem în modul următor:

DEFINIȚIA 2. Spunem că sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ este stabil în sensul „indice majorat-ieșire mărginită" dacă există un „indice de intrare" $\eta_{in}(x_{[t_0,\,t_1]})$ cu proprietățile generale arătate la punctul 4, astfel încît obiectul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$, în care η_d este dat de relația (7.1), este stabil în sensul definiției 1.

Să observăm că, în această definiție, cuvîntul „indice" se referă la membrul mediu (η) al simbolului $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$, iar cuvîntul „ieșire" se referă la membrul final η_p. Întrucît indicele η poate lua de astă dată și valori negative, care nu intervin însă în expresia (7.1), am înlocuit expresia „indice mărginit" prin expresia „indice majorat".

O parte dintre exemplele date la punctul 6 ilustrează și noțiunea de stabilitate dată de definiția 2. Astfel, în cazul exemplului de la punctul 6.2 se poate lua $\eta(x_{[0,\,t]}) = \|u(t)\|$. Se obține astfel sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$. Se vede imediat că, dacă sistemul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$ de la punctul 6.2 este stabil în sensul definiției 1, atunci sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ este stabil în sensul definiției 2. O observație similară este valabilă pentru sistemul $(\mathcal{O}, \eta_d, \eta_p)$, considerat la punctul 6.4. De astă dată se poate lua $\eta(x_{[0,\,t]}) = \int_0^t \mu(\tau) \cdot c^T \cdot x(\tau) \cdot d\tau$.

Să considerăm acum două sisteme $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ și $(\widetilde{\mathcal{O}}, (\widetilde{\eta}), \widetilde{\eta}_p)$, stabile în sensul definiției 2. Se pune întrebarea dacă sistemul combinat $(\mathcal{O} \times \widetilde{\mathcal{O}}, (\eta + \widetilde{\eta}), \eta_p + \widetilde{\eta}_p)$ este stabil în sensul aceleiași definiții. Examinarea detaliată a acestei probleme conduce la concluzia că proprietatea nu este

în general adevărată, dar, de astă dată, poate fi asigurată după introducerea unor condiții suplimentare. Introducerea acestor condiții ne conduce la noțiunea generală de hiperstabilitate.

9. NOȚIUNEA DE HIPERSTABILITATE

DEFINIȚIA 3. Spunem că sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ este hiperstabil dacă este stabil în sensul definiției 2 și dacă este îndeplinită următoarea proprietate P_λ: oricare ar fi numărul $\lambda \geqslant 0$, există un „indice inițial" $\eta_{in,\lambda}(x_{[t_0,t_1]})$ avînd proprietățile generale cerute acestor indici la punctul 4 astfel încît:

a) indicele $\eta_\lambda(x_{[t_0,t]})$, definit prin relația

$$\eta_\lambda(x_{[t_0,t]}) = \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \eta(x_{[t_0,\tau]}) + \lambda \cdot \inf_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \eta(x_{[t_0,\tau]}) + \eta_{in,\lambda}(x_{[t_0,t_1]}), \tag{9.1}$$

satisface condiția

$$\eta_\lambda(x_{[t_0,t]}) \geqslant 0 \text{ pentru orice } t \geqslant t_0 \tag{9.2}$$

și

b) sistemul $(\mathcal{O}, (\eta_\lambda), \eta_p)$ este stabil în sensul definiției 2.

Se constată că pentru o categorie largă de sisteme, dacă sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ satisface definiția 2, atunci proprietățile P_λ pentru $\lambda \geqslant 0$ sînt automat îndeplinite. Acest fapt justifică prezentarea proprietăților P_λ drept condiții auxiliare. În același timp, se poate observa că stabilitatea sistemului $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$, în sensul definiției 2, este o consecință a proprietății P_λ pentru $\lambda = 0$, astfel încît condiția ca sistemul $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ să fie stabil (definiția 2) se poate suprima din enunțul definiției 3.

10. COMBINAREA SISTEMELOR HIPERSTABILE

Pentru sistemele hiperstabile, proprietatea enunțată la sfîrșitul punctului 8 este totdeauna îndeplinită, după cum rezultă din următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 1. Dacă sistemele $(\mathcal{O}, (\eta), \eta_p)$ și $(\widetilde{\mathcal{O}}, (\widetilde{\eta}), \widetilde{\eta}_p)$ sînt hiperstabile în sensul definiției 3, atunci sistemul combinat $(\mathcal{O} \times \widetilde{\mathcal{O}}, (\eta + \widetilde{\eta}), \eta_p + \widetilde{\eta}_p)$ este de asemenea hiperstabil în sensul aceleiași definiții.

Pentru simplificarea notațiilor, în demonstrația care urmează vom considera un interval oarecare $[t_0, t]$, $t \geqslant t_1$, și funcțiile oarecare $x_{[t_0,t]}$ și $\widetilde{x}_{[t_0,t]}$, corespunzînd obiectelor $\mathcal{O}$ și, respectiv, $\widetilde{\mathcal{O}}$. Vom folosi notația $\eta(\tau)$ în loc de $\eta(x_{[t_0,\tau]})$ și $\sup \eta$ în loc de $\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \eta(x_{[t_0,\tau]})$. Vom folosi cu semnificații analoge simbolurile $\inf \eta$, $\widetilde{\eta}(\tau)$, $\sup \widetilde{\eta}$, $\inf \widetilde{\eta}$ și $\sup(\eta + \widetilde{\eta})$. Demonstrăm mai întîi următoarea lemă:

LEMA 1. Există $\lambda_0 \geqslant 0$ și $\widetilde{\lambda}_0 \geqslant 0$ astfel încît

$$\sup(\eta + \widetilde{\eta}) \geqslant \frac{1}{2}(\sup \eta + \lambda_0 \cdot \inf \eta) + \frac{1}{2}(\sup \widetilde{\eta} + \widetilde{\lambda}_0 \cdot \inf \widetilde{\eta}). \tag{10.1}$$

Într-adevăr, pentru orice τ din intervalul $[t_0, t]$ putem scrie

$$\eta(\tau) = \eta_+(\tau) - \eta_-(\tau),$$

unde

$$\eta_+(\tau) = \begin{cases} \eta(\tau) & \text{dacă } \eta(\tau) \geqslant 0, \\ 0 & \text{dacă } \eta(\tau) < 0, \end{cases}$$

și

$$\eta_-(\tau) = \begin{cases} -\eta(\tau) & \text{dacă } \eta(\tau) \leqslant 0, \\ 0 & \text{dacă } \eta(\tau) > 0. \end{cases}$$

Observăm că avem $\eta_+ \geqslant 0$ și $\eta_- \geqslant 0$. Din egalitatea

$$\eta(\tau) + \tilde{\eta}(\tau) = \eta_+(\tau) - \eta_-(\tau) + \tilde{\eta}_+(\tau) - \eta_-(\tau),$$

sau

$$\eta(\tau) + \tilde{\eta}(\tau) + \eta_-(\tau) + \tilde{\eta}_-(\tau) = \eta_+(\tau) + \tilde{\eta}_+(\tau)$$

se deduce inegalitatea

$$\eta(\tau) + \tilde{\eta}(\tau) + \eta_-(\tau) + \tilde{\eta}_-(\tau) \geqslant \eta_+(\tau)$$

și deci

$$\sup(\eta + \tilde{\eta}) + \sup \eta_- + \sup \tilde{\eta} \geqslant \eta_+(\tau).$$

Această inegalitate are loc pentru orice τ din intervalul $[t_0, t]_1$ de unde rezultă

$$\sup(\eta - \tilde{\eta}) + \sup \eta_- + \sup \tilde{\eta}_- \geqslant \sup \eta.$$

La fel se obține inegalitatea simetrică

$$\sup(\eta + \tilde{\eta}) + \sup \eta_- + \sup \tilde{\eta}_- \geqslant \sup \tilde{\eta}.$$

Adunînd ultimele două inegalități, se obține

$$2.\sup(\eta + \tilde{\eta}) + 2.\sup \eta_- + 2.\sup \tilde{\eta}_- \geqslant \sup \eta + \sup \tilde{\eta}.$$

De aici se obține inegalitatea căutată (10.1) dacă definim numerele λ_0 și $\tilde{\lambda}_0$ conform relațiilor

$$\lambda_0 = \begin{cases} 2 & \text{dacă } \sup \eta_- > 0, \\ 0 & \text{dacă } \sup \eta_- = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_0 = \begin{cases} 2 & \text{dacă } \sup \tilde{\eta}_- > 0, \\ 0 & \text{dacă } \sup \tilde{\eta}_- = 0 \end{cases}$$

și observăm că în acest caz avem 2. $\sup \eta_- \geqslant -\lambda_0 \cdot \inf \eta$ și 2. $\sup \tilde{\eta} \geqslant -\tilde{\lambda}_0 \cdot \inf \tilde{\eta}$.

LEMA 2. Are loc inegalitatea

$$\inf (\eta + \tilde{\eta}) \geqslant \inf \eta + \inf \tilde{\eta}. \tag{10.2}$$

Într-adevăr, din $\eta(\tau) \geqslant \inf \eta$ și $\tilde{\eta}(\tau) \geqslant \inf \tilde{\eta}$, rezultă $\eta(\tau) + \tilde{\eta}(\tau) \geqslant \inf \eta + \inf \tilde{\eta}$ pentru orice τ din intervalul $[t_0, t]$, de unde rezultă (10.2).

LEMA 3. Oricare ar fi numărul $\lambda \geqslant 0$, există numerele $\lambda_1 \geqslant 0$ și $\tilde{\lambda}_1 > 0$ astfel încît

$$\sup (\eta + \tilde{\eta}) + \lambda \cdot \inf (\eta + \tilde{\eta}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot (\sup \eta + \lambda_1 \cdot \inf \eta) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sup \tilde{\eta} + \tilde{\lambda}_1 \cdot \inf \tilde{\eta}). \tag{10.3}$$

Într-adevăr, înmulțind inegalitatea (10.2) cu $\lambda \geqslant 0$ și adunînd rezultatul cu inegalitatea (10.1), se obține inegalitatea (10.3), unde $\lambda_1 = \lambda_0 + 2 \cdot \lambda$ și $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_0 + 2 \cdot \lambda$.

LEMA 4. Dacă obiectele $(O, (\eta), \eta_p)$ și $(\tilde{O}, (\tilde{\eta}), \tilde{\eta}_p)$ sînt hiperstabile (definiția 3), atunci pentru orice $\lambda \geqslant 0$ există $\lambda_1 \geqslant 0$ și $\tilde{\lambda}_1 \geqslant 0$, astfel încît are loc inegalitatea

$$\sup (\eta + \tilde{\eta}) + \lambda \cdot \inf_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} (\eta + \tilde{\eta}) + \frac{1}{2} \cdot \eta^{in, \lambda_1}(x_{[t_0, t_1]}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \tilde{\eta}_{in, \tilde{\lambda}_1}(x_{[t_0, t_1]}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \eta_{\lambda_1}(x_{[t_0, t]}) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{\eta}_{\tilde{\lambda}_1}(x_{[t_0, t]}) \geqslant 0, \tag{10.4}$$

unde $\eta_{in, \lambda_1}(x_{[t_0, t_1]})$ și $\tilde{\eta}_{in, \tilde{\lambda}_1}(x_{[t_0, t_1]})$ sînt indicii inițiali a căror existență se afirmă în definiția 3 (aplicată succesiv celor două sisteme), iar $\eta_{\lambda_1}(x_{[t_0, t]})$ și $\tilde{\eta}_{\tilde{\lambda}_1}(x_{[t_0, t]})$ se obțin cu formula (9.1), aplicată succesiv celor două sisteme.

Să arătăm acum că sistemul combinat definit în propoziția 1 este hiperstabil. Vom arăta mai întîi că acest sistem are proprietatea P_λ din definiția 3. Într-adevăr, se poate defini „indicele inițial", cerut în definiția 3, prin relația

$$\check{\eta}_{in, \lambda}(\check{x}_{[t_0, t_1]}) = \frac{1}{2} \cdot \eta_{in, \lambda_1}(x_{[t_0, t_1]}) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{\eta}_{in, \tilde{\lambda}_1}(\tilde{x}_{[t_0, t_1]}), \tag{10.5}$$

unde $\check{x}$ este vectorul

$$\check{x} = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}.$$

Folosind în mod similar notațiile $\check{O} = O \times \widetilde{O}$, $\check{\eta} = \eta + \widetilde{\eta}$ și $\check{\eta}_p = \eta_p + \widetilde{\eta}_p$ pentru sistemul combinat și scriind formula (9.1) pentru sistemul combinat (ceea ce se realizează suprapunînd semnul „$\check{}$" deasupra simbolurilor η și x), obținem indicele $\check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,t]})$, a cărui expresie coincide cu membrul stîng al inegalității (10.4). De aici se obține, în primul rînd, inegalitatea $\check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,t]}) \geqslant 0$, cerută în definiția 3 (vezi (9.2)). În al doilea rînd, se obține inegalitatea

$$\check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,\,t]}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \eta_{\lambda_1}(x_{[t_0,\,t]}) + \frac{1}{2} \cdot \widetilde{\eta}_{\widetilde{\lambda}_1}(\widetilde{x}_{[t_0,\,t]}), \tag{10.6}$$

care va fi folosită pentru încheierea demonstrației.

Întrucît sistemele componente $(O, (\eta), \eta_p)$ și $(\widetilde{O}, (\widetilde{\eta}), \widetilde{\eta}_p)$ sînt hiperstabile, sistemele $(O, (\eta_\lambda), \eta_p)$ și $(\widetilde{O}, (\widetilde{\eta}_\lambda), \widetilde{\eta}_p)$ sînt stabile în sensul definiției 2, oricare ar fi $\lambda \geqslant 0$ (vezi definiția 3, condiția b). Cu alte cuvinte (luînd $\lambda = \lambda_1$), există un indice inițial $\eta'_{in,\lambda_1}(x_{[t_0,t_1]})$ și o funcție $\varphi(\rho)$, continuă și nulă în origine, astfel încît

$$\eta_p(x_{[t_0,\,t]}) \leqslant \varphi\left(\eta'_{in,\lambda_1}(x_{[t_0,t_1]}) + \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t'} \eta_{\lambda_1}(x_{[t_0,\,\tau]})\right), \quad t \geqslant t_1 \tag{10.7}$$

(semnul $(\ )_+$ nu mai este necesar aici, întrucît avem $\eta_\lambda(x_{[t_0,\,\tau]}) \geqslant 0$). În mod similar se obține inegalitatea

$$\widetilde{\eta}_p(\widetilde{x}_{[t_0,\,t]}) \leqslant \widetilde{\varphi}(\widetilde{\eta}'_{in,\widetilde{\lambda}_1}(\widetilde{x}_{[t_0,\,t_1]}) + \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \widetilde{\eta}_{\widetilde{\lambda}_1}(\widetilde{x}_{[t_0,\,\tau]})), \; t \geqslant t_1. \tag{10.8}$$

Funcția $\varphi(\rho)$ este majorată de funcția $\Phi(\rho) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \rho} \varphi(\tau)$, care este de asemenea continuă și nulă în origine, dar, în plus, este și crescătoare. Folosind acest fapt și inegalitatea $\eta_{\lambda_1}(x_{[t_0,t]}) \leqslant 2 \cdot \check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,t]})$, care rezultă din (10.6), întrucît avem $\eta_{\widetilde{\lambda}_1}(\widetilde{x}_{[t_0,t]}) \geqslant 0$, se obține din (10.7) inegalitatea

$$\eta_p(x_{[t_0,t]}) \leqslant \Phi(\check{\eta}'_{in,\lambda}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + 2 \cdot \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,\,\tau]})), \quad t \geqslant t_1, \tag{10.9}$$

unde

$$\check{\eta}'_{in,\lambda}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) = \eta'_{in,\lambda_1}(x_{[t_0,\,t_1]}) + \widetilde{\eta}'_{in,\widetilde{\lambda}_1}(\widetilde{x}_{[t_0,\,t_1]}). \tag{10.10}$$

În mod similar se obține din (10.8) inegalitatea

$$\widetilde{\eta}_p(\widetilde{x}_{[t_0,t]}) \leqslant \widetilde{\Phi}(\check{\eta}'_{in,\lambda}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + 2 \cdot \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,\,\tau]})), \quad t \geqslant t_1. \tag{10.11}$$

Funcțiile $\Phi(\rho)$ și $\widetilde{\Phi}(\rho)$ sînt majorate de funcția $\psi(\rho)$, definită prin relația $\psi(\rho) = \max(\Phi(\rho), \widetilde{\Phi}(\rho))$. Această funcție este de asemenea

continuă și nulă în origine. Cu aceste observații, se obține din (10.9) și (10.11) inegalitatea

$$\check{\eta}_p(\check{x}_{[t_0,\,t]}) \leqslant 2 \cdot \psi\,(\check{\eta}'_{in,\,\lambda}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + 2 \cdot \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}_\lambda(\check{x}_{[t_0,\,\tau]})), \qquad t \geqslant t_1, \quad (10.12)$$

unde am folosit egalitatea $\widetilde{\eta}_p\,(\check{x}_{[t_0,\,t]}) = \eta_p\,(x_{[t_0,\,t]}) + \widetilde{\eta}_p\,(\widetilde{x}_{[t_0,\,t]})$. Relația (10.12) exprimă faptul că sistemul $(\check{O}, (\check{\eta}), \check{\eta}_p)$ este stabil în sensul definiției 2. Am demonstrat astfel că sistemul compus $(\check{O}, (\check{\eta}), \check{\eta}_p)$ din propoziția 1 satisface proprietatea P_λ din definiția 3. Pentru a demonstra că sistemul $(\check{O}, (\check{\eta}), \check{\eta}_p)$ este hiperstabil, rămîne, conform definiției 3, să se arate că acest sistem este stabil în sensul definiției 2. După cum am remarcat la sfîrșitul punctului 9, această proprietate rezultă din proprietatea P_λ. Aici însă vom demonstra acest fapt. Scriind relația (9.1) pentru sistemul compus și pentru $\lambda = 0$, se obține

$$\check{\eta}_0\,(\check{x}_{[t_0,\,t]}) = \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}) + \check{\eta}_{in,0}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}),$$

de unde, folosind și inegalitatea evidentă

$$\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}) \leqslant (\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}))_+\,,$$

se obține

$$\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}_0\,(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}) \leqslant \check{\eta}_{in,0}\,(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + (\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}\,(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}))_+\,,$$

$t \geqslant t_1$. Folosind această inegalitate și inegalitatea (10.12) pentru $\lambda = 0$ și observînd că funcția $\psi\,(\rho)$ din această inegalitate este crescătoare, se obține inegalitatea

$$\check{\eta}_p\,(\check{x}_{[t_0,\,t]}) \leqslant 2 \cdot \psi\,(\check{\eta}'_{in,\,0}\,(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + 2 \cdot \check{\eta}_{in,0}(\check{x}_{[t_0,\,t_1]}) + 2 \cdot (\sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \check{\eta}(\check{x}_{[t_0,\,\tau]}))_+), \quad t \geqslant t_1,$$

de unde rezultă că sistemul $(\check{O}, (\check{\eta}), \check{\eta}_p)$ este într-adevăr stabil în sensul definiției 2. Astfel propoziția 1 este demonstrată.

11. CÎTEVA OBSERVAȚII FINALE

În această lucrare am definit noțiunea de hiperstabilitate pentru o clasă de obiecte căreia i s-a impus doar un minimum de condiții restrictive. Am precizat totodată poziția relativă a noțiunii de hiperstabilitate față de noțiunea de stabilitate în sensul „indice mărginit-ieșire mărginită", care de fapt se întîlnește în substratul oricărui studiu de stabilitate.

Cîteva probleme principale se ridică în legătură cu noțiunea de stabilitate definită în această lucrare. În primul rînd, este oare definiția 3 mai generală decît definițiile date anterior proprietății de hiperstabilitate? Răspunsul la această întrebare este afirmativ, după cum se demonstrează în anexă.

Se pune de asemenea întrebarea dacă nu cumva există o clasă mai generală de sisteme, care cuprinde sistemele hiperstabile definite în această lucrare și pentru care proprietățile combinatorice definite în propoziția 1 rămîn îndeplinite. În momentul de față nu cunoaștem răspunsul la această problemă de interes teoretic neîndoielnic.

Un interes matematic evident îl prezintă și extinderea proprietăților combinatorice din prezenta lucrare la cazul combinării unui număr infinit de sisteme. În forma actuală, proprietatea de hiperstabilitate se conservă (în sensul propoziției 1) numai față de combinarea unui număr finit de sisteme hiperstabile, deși acest număr poate fi oricît de mare.

Prezintă interes și problema opusă: aceea a restrîngerii proprietăților combinatorice numai la combinarea unui număr de obiecte mai mic decît un număr dat. Analizînd demonstrația propoziției 1, se poate vedea că această proprietate este asigurată dacă se cere ca proprietatea P_λ din definiția 3 să fie îndeplinită numai pentru numerele λ dintr-un interval de forma $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Mai mult, se poate vedea că în acest caz este suficient ca proprietatea P_λ să fie îndeplinită numai pentru $\lambda = \lambda_0$.

În general, se poate arăta că dacă proprietatea P_λ din definiția 3 este îndeplinită pentru un anumit $\lambda_0 > 0$, atunci ea este îndeplinită și pentru orice λ din intervalul $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ (De altfel, din demonstrația propoziției 1 rezultă fără vreun alt calcul că este suficient ca proprietatea P_λ să fie îndeplinită numai pentru orice număr întreg pozitiv). Rezultă astfel că este posibil să se simplifice condițiile cerute în definiția 3 fără a restrînge generalitatea rezultatelor. Deși simplificările indicate mai sus par importante, exemplele concrete arată că avantajul cîștigat este în realitate neglijabil (vezi, de exemplu, calculele din anexă). Din acest motiv am preferat să definim sistemele hiperstabile în forma, mai completă, din definiția 3.

ANEXĂ

Se consideră un obiect O definit ca la punctul 2 și un „indice" $\eta(x_{[t_0,t]})$ avînd proprietățile de la punctul 7. Cea mai generală definiție dată în trecut proprietății de hiperstabilitate poate fi exprimată în modul următor (cu ajustarea notațiilor conform convențiilor adoptate în prezenta lucrare):

Există funcțiile $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ și $\delta(x)$ astfel încît pentru orice $T_0 > t_0$:

a) inegalitatea

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta(x_{[t_0,t]}) \leqslant \beta_0^2 \qquad (\beta_0 > 0) \tag{A.1}$$

implică

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \alpha(x(t)) \leqslant \beta_0 + \beta(x(t_0)) \tag{A.2}$$

și

b) are loc inegalitatea

$$\eta(x_{[t_0,t]}) \geqslant -\gamma^2(x(t_0)) - \delta(x(t_0)) \cdot \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \alpha(x(\tau)) \tag{A.3}$$

pentru orice t din intervalul $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$.

Se presupune că funcțiile $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ și $\delta(x)$ îndeplinesc anumite condiții. Vom utiliza aici doar faptul că aceste funcții sînt continue, nule în origină și nu iau valori negative.

Vom arăta că definiția de mai sus este inclusă în definiția 3. Dacă introducem indicele η_p definit prin relația

$$\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \alpha(x(t)), \tag{A.4}$$

obținem un sistem $(O, (\eta), \eta_p)$ care, după cum se va arăta, este hiperstabil în sensul definiției 3. În primul rînd, sistemul $(O, (\eta), \eta_p)$ este stabil în sensul definiției 2. Într-adevăr, inegalitatea (A.1) este satisfăcută dacă se alege

$$\beta_0^2 = (\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta(x_{[t_0,t]}))_+. \tag{A.5}$$

Folosind inegalitatea $\beta_0 + \beta(x(t_0)) \leqslant \sqrt{2 \cdot \beta_0^2 + 2 \cdot \beta^2(x(t_0))}$, se obține din (A.2), (A.4) și (A.5) inegalitatea

$$\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) \leqslant \sqrt{2 \cdot \beta^2(x(t_0)) + (\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta(x_{[t_0,t]}))_+}$$

și deci, întrucît intervalul $[t_0, T_0]$ este arbitrar, sistemul $(O, (\eta), \eta_p)$ este într-adevăr stabil în sensul definiției 3.

Rămîne să arătăm că are loc proprietatea P_λ din definiția 3. În cazul în care este îndeplinită inegalitatea

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta(x_{[t_0,t]}) \leqslant 0, \tag{A.6}$$

se poate lua $\beta_0 = 0$ în relația (A.1) și din (A.2) rezultă (folosind (A.4))

$$\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) \leqslant \beta(x(t_0)). \tag{A.7}$$

Tot din (A.2), pentru $\beta_0 = 0$ se obține, folosind (A.3),

$$\eta(x_{[t_0,t]}) \geqslant -\gamma^2(x(t_0)) - \delta(x(t_0)) \cdot \beta(x(t_0)), \tag{A.8}$$

de unde

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0} \eta(x_{[t_0,t]}) + \lambda \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0} \eta(x_{[t_0,t]}) \geqslant -(1+\lambda) \cdot (\gamma^2 \cdot x(t_0) +$$

$$+ \delta(x(t_0)) \cdot \beta(x(t_0))). \tag{A.9}$$

Definind

$$\eta_{in,\lambda}(x(t_0)) = (1 + \lambda) \cdot (\gamma^2(x(t_0)) + \delta(x(t_0)) \cdot \beta(x(t_0)), \tag{A.10}$$

inegalitatea (A.9) se scrie sub forma (9.2), unde η_λ este dat de relaţia (9.1). Totodată din (A.7) şi $\eta_\lambda \geqslant 0$ rezultă

$$\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) \leqslant \beta(x(t_0)) + \eta_\lambda(x_{[t_0,T_0]})$$

şi deci sistemul $(\mathcal{O}, (\eta_\lambda), \eta_p)$ este stabil în sensul definiţiei 2.

În cazul în care inegalitatea (A.6) nu este satisfăcută, se poate alege în (A.1)

$$\beta_0^2 = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta\,(x_{[t_0,t]}). \tag{A.11}$$

Inegalitatea (A.2) implică $\sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \alpha^2\,(x(t)) \leqslant 2 \cdot \beta_0^2 + 2 \cdot \beta^2\,(x(t_0))$, de unde, folosind (A.11) şi (A.4), rezultă

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta\,(x_{[t_0,t]}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot (\eta_p(x_{[t_0,T_0]}))^2 - \beta^2(x(t_0)).$$

Din (A.3) şi (A.4) rezultă, oricare ar fi $\lambda \geqslant 0$,

$$\lambda \cdot \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta\,(x_{[t_0,t]}) \geqslant -\lambda \cdot \gamma^2(x(t_0)) - \lambda \cdot \delta(x(t_0)) \cdot \eta_p(x_{[t_0,T_0]}).$$

Adunînd ultimele două inegalităţi, se poate prezenta rezultatul sub forma

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta\,(x_{[t_0,t]}) + \lambda \cdot \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant T_0} \eta\,(x_{[t_0,t]}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot (\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) - \lambda \cdot \delta(x(t_0)))^2 -$$

$$- \beta^2(x(t_0)) - \lambda \cdot \gamma^2(x(t_0)) - \frac{\lambda^2}{4} \cdot \delta^2(x(t_0)). \tag{A.12}$$

Alegînd

$$\eta_{in,\lambda}(x(t_0)) = 2 \cdot \beta^2(x(t_0)) + \lambda \cdot \gamma^2(x(t_0)) + \frac{\lambda^2}{4} \cdot \delta^2(x(t_0)), \tag{A.13}$$

inegalitatea (A.12) se poate scrie sub forma

$$\eta_\lambda(x_{[t_0,T_0]}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot (\eta_p(x_{[t_0,T_0]}) - \lambda \cdot \delta(x(t_0))^2, \tag{A.14}$$

unde $\eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})$ este dat de (9.1). Din (A.14) rezultă

$$\eta_{lp}(x_{[t_0, T_0]}) \leqslant \sqrt{2 \cdot \eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})} + \lambda \cdot \delta(x(t_0)).$$

Întrucît membrul drept este majorat de expresia $\sqrt{2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta^2(x(t_0)) + 4 \cdot \eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})}$, se obține inegalitatea

$$\eta_{lp}(x_{[t_0, T_0]}) \leqslant \sqrt{2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta^2(x(t_0)) + 4 \cdot \eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})}, \tag{A.15}$$

care arată că și de astă dată sistemul $(O, (\eta_{l\lambda}), \eta_{lp})$ este stabil în sensul definiției 2.

Dacă, pe intervalele $[t_0, T_0]$ diferite, avem atît inegalitatea (A.6), cît și inegalitatea contrară, se alege drept indice $\eta_{lm,\lambda}(x(t_0))$ cel mai mare dintre numerele date de (A.10) și (A.13). În acest caz, inegalitatea (A. 14) continuă să fie satisfăcută și se obține din aceeași relație (A.15) (se schimbă doar indicele $\eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})$). În același timp, în intervalul în care este satisfăcută condiția (A.6) are loc inegalitatea (A.7). În ambele cazuri este deci satisfăcută inegalitatea

$$\eta_{lp}(x_{[t_0, T_0]}) \leqslant \sqrt{\beta^2(x(t_0)) + 2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta^2(x(t_0)) + 4 \cdot \eta_{l\lambda}(x_{[t_0, T_0]})},$$

ceea ce arată că sistemul $(O, (\eta_{l\lambda}), \eta_{lp})$ satisface și de astă dată definiția 2. Am demonstrat astfel că sistemul $(O, (\eta_l), (\eta_{lp})$ este hiperstabil în sensul definiției 3.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Edit. Academiei, 1963.
2. P. P. Varaiya și R. Liu, *Bounded-input bounded-output stability for the Lur'e problem*, IEEE Tr. AC-11 (corresp.), 745—746 (1966).
3. G. Zames, *On the input-output stability of timevarying nonlinear feedback systems*, IEEE Tr. AC-11, 228—238 (1966).
4. I. W. Sandberg, *Some stability results related to those of V. M. Popov*, BSTJ, **44**, 2133—2148 (1965).
5. V. M. Popov, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, Edit. Academiei, 1966.
6. B. D. O. Anderson, *A simplified viewpoint of hyperstability*, IEEE Tr. AC-13, 292—297 (1968).
7. I. Barbălat, *Systémes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires*, Rev. math. pures et appliquées, **IV**, *2*, 267—270 (1959).
8. V. Lakshmikantham și S. Leela, *Differential and integral inequalities*, Academic Press, 1969.
9. A. I. Lurie, *Nekotorîe nelineinîe zadaci teorii avtomaticeskovo regulirovaniia*, Moskva, Gostehizdat, 1951.
10. V. M. Popov, *Reșenie novoi zadaci ustoicivosti reguliruemîh sistem*, Avtom. i telemah., **XXIV**, *1* (1963).

STABILITATEA UNOR SISTEME DISCRETE CU NELINIARITĂȚI DE FORMĂ PARTICULARĂ

DE

S. GHEȚARU

517.9.621.316.7

Se obțin criterii de stabilitate absolută mai largi pentru sistemele de reglare automată. Se utilizează în acest scop mijloacele teoriei hiperstabilității, extinse la blocurile anticipative (noncauzale). Rezultatele obținute sînt aplicabile unor sisteme a căror parte neliniară prezintă anumite particularități.

1. INTRODUCERE

În cel mai simplu caz, studiul stabilității unei familii de sisteme automate impune analiza comportării unor ansambluri realizate prin conectarea în reacție negativă a unui bloc liniar L cu un bloc N (acesta poate fi neliniar, neautonom), aparținînd unei familii determinate de blocuri. Cele mai eficace criterii de stabilitate absolută a unor astfel de sisteme au fost obținute prin utilizarea metodei frecvențiale, datorată lui V. M. Popov. Astfel, sistemele de reglaj automat continuu, a căror parte neliniară este descrisă de o funcție monoton crescătoare, formează subiectul lucrărilor [2] și [3], în timp ce sistemele de reglaj automat cu factor de amplificare variabil în timp au fost studiate în [5] și [6]. Sistemele neliniare a căror caracteristică este monotonă au fost analizate cu mijloacele teoriei hiperstabilității în monografia [1]. Stabilitatea absolută a sistemelor automate discrete a căror parte neliniară este presupusă strict monotonă este studiată într-unul din paragrafele monografiei [4].

În cele ce urmează se arată că problema stabilității absolute a unor sisteme realizate prin conectarea în reacție negativă a unui bloc liniar autonom neanticipativ (cauzal) cu un bloc neliniar neautonom poate fi rezolvată utilizînd rezultatele obținute în [8] prin extinderea noțiunii de hiperstabilitate asupra blocurilor anticipative (noncauzale). Se demonstrează că, pentru sistemele arătate mai înainte, asigurarea stabilității absolute depinde de îndeplinirea a două condiții. Prima dintre condițiile de stabilitate absolută este exprimată cu ajutorul funcției de transfer a părții liniare a sistemului studiat, alături de care intervine un „multi-

plicator". Acesta reprezintă funcția de transfer a unui bloc liniar autonom noncauzal, pentru care este îndeplinită o a doua condiție, care, împreună cu prima condiție amintită, asigură stabilitatea absolută a sistemului studiat. A doua condiție este legată în exclusivitate de proprietățile părții neliniare sau neautonome a sistemului.

Se arată de asemenea că extinderea noțiunii de hiperstabilitate la blocurile anticipative face posibilă obținerea unor criterii de stabilitate mai largi pentru anumite sisteme cu reacție.

2. MIJLOACE PENTRU STUDIEREA STABILITĂȚII

Se consideră blocul discret descris de relația

$$\nu(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa(k, j) \cdot \mu(j), \tag{2.1}$$

unde $\mu(k)$ și $\nu(k)$ sînt termeni cu valori reale sau complexe ai unor șiruri definite pentru toți k întregi, iar $\varkappa(k, j)$ termeni cu valori reale sau complexe ai unui șir definit pentru toți k și j întregi. Șirul va fi notat cu termenul său general. Se presupune că termenii șirului $\varkappa(k, j)$ au următoarele proprietăți :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varkappa(k, j)| \leqslant \alpha_1 \text{ pentru orice } j, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varkappa(k, j)| \leqslant \alpha_1 \text{ pentru orice } k, \tag{2.3}$$

unde α_1 este o constantă pozitivă. Vom nota în cele ce urmează constantele pozitive cu α_j.

Relația (2.1) determină univoc mărimea de ieșire $\nu(k)$ corespunzătoare unei comenzi $\mu(k)$, cu proprietatea

$$|\mu(k)| \leqslant \alpha_2 \text{ pentru orice } k. \tag{2.4}$$

Se spune că blocul discret descris de relația (2.1) este definit de șirul dublu $\varkappa(k, j)$.

Propoziția 1. Fiind dat blocul discret definit de șirul dublu $\varkappa(k, j)$ cu proprietățile (2.2), (2.3), oricare ar fi comanda $\mu(k)$ pentru care este verificată inegalitatea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu(k)|^2 \leqslant \alpha_3 \tag{2.5}$$

este îndeplinită și inegalitatea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\nu(k)|^2 \leqslant \alpha_1^2 \cdot \alpha_3. \tag{2.6}$$

Demonstrație. Se demonstrează mai întîi inegalitatea

$$|\sum_j (a_j \cdot b_j)|^2 \leqslant \sum_j (|a_j|^2 \cdot |b_j|) \cdot \sum_j |b_j|, \tag{2.7}$$

unde a_j și b_j sînt numere reale sau complexe. Evident,

$$|\sum_j (a_j \cdot b_j)|^2 \leqslant (\sum_j |a_j| \cdot |b_j|)^2. \tag{2.8}$$

Dacă se notează

$$u_j = |a_j| \cdot \sqrt{|b_j|},$$

$$v_j = \sqrt{|b_j|},$$

din inegalitatea Schwartz-Cauchy-Buniakovski

$$(\sum_j u_j \cdot v_j)^2 \leqslant \sum_j u_j^2 \cdot \sum_j v_j^2$$

rezultă

$$(\sum_j |a_j| \cdot |b_j|)^2 \leqslant \sum_j (|a_j|^2 \cdot |b_j|) \cdot \sum_j |b_j|.$$

Inegalitatea (2.7) este o consecință imediată a inegalității precedente și a inegalității (2.8).

Pentru $a_j = \mu(j)$ și $b_j = \varkappa(k, j)$, inegalitatea (2.7) devine

$$|\nu(k)|^2 = |\sum_j (\varkappa(k, j) \cdot \mu(j))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j (|\mu(j)|^2 \cdot |\varkappa(k, j)|) \cdot \sum_j |\varkappa(k, j)| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 \cdot \sum_j (|\mu(j)|^2 \cdot |\varkappa(k, j)|).$$

Însumînd după indicele k, rezultă

$$\sum_k |\nu(k)|^2 \leqslant \alpha_1 \cdot \sum_j |\mu(j)|^2 \cdot \sum_k |\varkappa(k, j)|) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 \cdot \sum_j (|\mu(j)|^2 \cdot \alpha_1) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1^2 \cdot \sum_j |\mu(j)|^2.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Se consideră blocul discret L descris pentru orice k întreg de relația

$$\nu_L(k) = \sum_{j=-\infty}^{k} \varkappa_L(k-j) \cdot \mu_L(j), \tag{2.9}$$

unde $\mu_L(k)$, $\nu_L(k)$, $\varkappa_L(k)$ sînt termeni cu valori reale sau complexe ai unor șiruri definite pentru toți k întregi. Se presupune că nucleul $\varkappa_L(k)$ are următoarele proprietăți:

$$\operatorname{Im} \varkappa_L(0) = 0, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{Re} \varkappa_L(0) \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_L(k)| \leqslant \alpha_L. \tag{2.12}$$

Blocului L i se asociază funcția de transfer

$$\gamma_L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_L(k) \cdot s^{-k}. \tag{2.13}$$

Relația (2.9) determină univoc mărimea de ieșire $\nu_L(k)$, corespunzătoare unei comenzi $\mu_L(k)$ mărginite.

Se consideră blocul discret N ale cărui variabile terminale (mărimea de comandă $\mu_N(k)$ și mărimea de ieșire $\nu_N(k)$) verifică relația

$$\nu_N(k) = \varphi(k, \mu_N(k)), \tag{2.14}$$

unde funcția cu valori reale sau complexe $\varphi(k, \mu)$ este definită și continuă

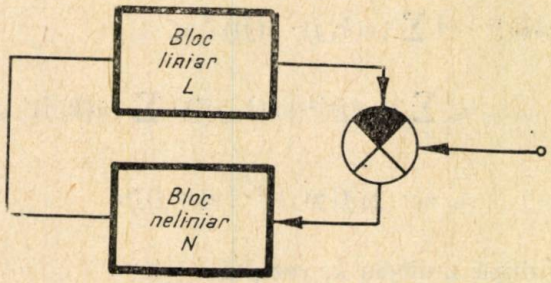


Fig. 1. — Sistemul LN.

pentru orice μ real sau complex oricare ar fi numărul întreg k. Se presupune că

$$\varphi(k, 0) = 0 \text{ pentru orice } k. \tag{2.15}$$

Fie LN sistemul cu reacție negativă din figura 1, format prin conectarea blocurilor L și N astfel încît

$$\mu_L(k) = \nu_N(k), \quad \mu_N(k) = \mu(k) - \nu_L(k). \tag{2.16}$$

DEFINIȚIA 1. Ansamblul format din șirurile *mărginite* $\mu(k)$ și $\mu_L(k)$ pentru care sînt verificate relațiile (2.9), (2.14), (2.16) se numește *soluție a sistemului LN*.

Evident, sistemul *LN* admite soluția banală $\mu(k) \equiv 0$, $\mu_L(k) \equiv 0$.

DEFINIȚIA 2. Soluția banală a sistemului *LN* este asimptotic stabilă în mare dacă pentru toate soluțiile sistemului cu proprietatea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu(k)|^2 \leqslant \text{const} \tag{2.17}$$

este îndeplinită inegalitatea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_L(k)|^2 \leqslant \text{const}, \tag{2.18}$$

ceea ce implică $\lim_{k \to \infty} \mu_L(k) = 0$.

PROPOZIȚIA 2. Dacă toate soluțiile sistemului *LN* corespunzătoare comenzilor $\mu(k)$ cu proprietatea (2.17) sînt mărginite, dacă există un șir $\varkappa_x(k)$ cu proprietățile

$$\varkappa_x(0) = 1, \tag{i}$$

$$2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varkappa_x(k)| \geqslant \alpha_x > 0, \tag{ii}$$

astfel încît

a) $\operatorname{Re} \gamma_L(z) \cdot \gamma_x(z) \geqslant \varepsilon > 0$ pentru orice z complex al cărui modul este egal cu unitatea, unde

$$\gamma_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varkappa_x(k) \cdot z^{-k}; \tag{2.19}$$

b) oricare ar fi șirul mărginit μ_k și $k_1 \geqslant k_0$, este îndeplinită inegalitatea

$$\operatorname{Re} \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varphi(k, \mu_k) \cdot \varkappa_x(k-j) \cdot \mu_j \geqslant 0, \tag{2.20}$$

atunci soluția banală a sistemului *LN* este asimptotic stabilă în mare.

Demonstrație. Așa cum rezultă din (i) și (ii), termenii șirului $\varkappa_x(k)$ îndeplinesc condițiile de forma (2.10)—(2.12) : $\operatorname{Re} \varkappa_x(0) \neq 0$, $\operatorname{Im} \varkappa_x(0) = 0$, $\sum_k |\varkappa_x(k)| \leqslant 2$. Fie X blocul discret definit de șirul $\varkappa_x(k)$. Evident, funcția de transfer asociată blocului X este $\gamma_x(z)$, iar variabilele terminale ale acestuia (mărimea de comandă $\mu_x(k)$ și mărimea de ieșire $\nu_x(k)$) verifică relația

$$\nu_x(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_x(k-j) \cdot \mu_x(j). \tag{2.21}$$

Totodată, proprietățile (i) și (ii) ale șirului $\varkappa_X(k)$ asigură existența șirului $\varkappa_{X'}(k)$ astfel încît

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varkappa_{X'}(k)| \leqslant \alpha_{X'}, \\ &\sum_{h=-\infty}^{\infty} (\varkappa_{X'}(k-h) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_X(h-j) \cdot \mu(j)) = \mu(k), \\ &\sum_{h=-\infty}^{\infty} (\varkappa_X(k-h) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_{X'}(h-j) \cdot \mu(j)) = \mu(k) \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

oricare ar fi șirul $\mu(k)$ ai cărui termeni, definiți pentru orice număr întreg k, sînt mărginiți.

Fie X' blocul discret definit de șirul $\varkappa_{X'}(k)$. Variabilele terminale ale acestuia (mărimea de comandă $\mu_{X'}(k)$ și mărimea de ieșire $\nu_{X'}(k)$) verifică relația

$$\nu_{X'}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_{X'}(k-j) \cdot \mu_{X'}(j), \tag{2.23}$$

iar funcția de transfer asociată blocului X' verifică identitatea

$$\gamma_{X'}(z) \cdot \gamma_X(z) \equiv 1. \tag{2.24}$$

Se spune că blocurile X și X' sînt unul inversul celuilalt.

Fie L' blocul realizat cu L și X prin conexiunea

$$\left.\begin{aligned} &\mu_L(k) = \mu_{L'}(k), \\ &\mu_X(k) = \nu_L(k) - \mu(k), \\ &\nu_{L'}(k) = \nu_X(k), \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

unde $\mu(k)$ și $\mu_{L'}(k)$ sînt mărimi de comandă, iar $\nu_{L'}(k)$ este mărimea de ieșire a blocului L'.

Fie N' blocul realizat cu X' și N prin conexiunea serie

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{X'}(k) = \mu_{N'}(k), \\ &\mu_N(k) = \nu_{X'}(k), \\ &\nu_{N'}(k) = \nu_N(k), \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

unde $\mu_{N'}(k)$ este mărimea de comandă, în timp ce $\nu_{N'}(k)$ este mărimea de ieșire a blocului N'.

Fie $L'N'$ sistemul cu reacție negativă din figura 2, format prin conectarea blocurilor L' și N', astfel încît

$$\left.\begin{aligned} \mu_{L'}(k) &= \nu_{N'}(k), \\ \mu_{N'}(k) &= -\nu_{L'}(k). \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

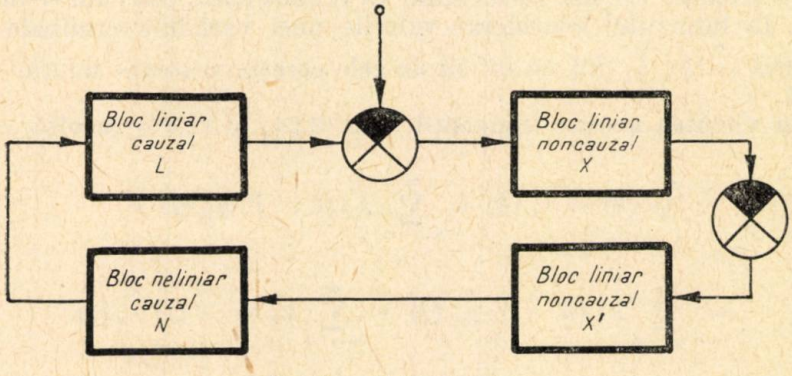


Fig. 2. — Sistemul $L'N'$.

DEFINIȚIA 3. Ansamblul format din șirurile *mărginite* $\mu(k)$ și $\mu_{L'}(k)$ pentru care sînt verificate relațiile (2.9), (2.14), (2.21), (2.23), (2.25)—(2.27) se numește *soluție a sistemului* $L'N'$.

LEMA 1. Dacă $\{\mu(k), \mu_L(k)\}$ este soluție a sistemului LN, atunci $\{\mu(k), \mu_{L'}(k)\}$, unde $\mu_{L'}(k) \equiv \mu_L(k)$ este soluție a sistemului $L'N'$. Afirmația reciprocă este de asemenea adevărată.

Demonstrația lemei este dintre cele mai simple. Se observă că în sistemul $L'N'$ este îndeplinită identitatea $\mu_N(k) \equiv \mu(k) - \mu_L(k)$.

În cele ce urmează, de cele mai multe ori nu vom mai face distincție între $\mu_{L'}(k)$ și $\mu_L(k)$. Evident, nu se va putea proceda la fel cu $\nu_L(k)$ și $\nu_{L'}(k)$.

LEMA 2. Dacă $\{\mu(k), \mu_L(k)\}$ este soluție a sistemului LN, iar

$$\hat{\mu}(k) = \begin{cases} \mu(k) & \text{pentru } k \leqslant k_1, \\ \sum\limits_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_L(k-j) \cdot \mu_L(j) & \text{pentru } k > k_1, \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_L(k) = \begin{cases} \mu_L(k) & \text{pentru } k \leqslant k_1, \\ 0 & \text{pentru } k > k_1, \end{cases}$$

atunci $\{\hat{\mu}(k), \hat{\mu}_L(k)\}$ este soluție a sistemului LN oricare ar fi numărul întreg k_1.

Demonstrația lemei este elementară.

Fie $\{\mu(k), \mu_L(k)\}$ o soluție a sistemului LN și, ca urmare a *lemei 1*, a sistemului $L'N'$, pentru care este verificată inegalitatea (2.17). Variabilele terminale (mărimile de comandă și de ieșire) ale blocurilor L, X, X', N corespunzătoare soluției $\{\hat{\mu}(k), \hat{\mu}_L(k)\}$ definite în *lema 2* vor purta semnul „$\hat{}$". Prin aceasta ele se vor deosebi de variabilele terminale ale acelorași blocuri, variabile terminale corespunzătoare soluției $\{\mu(k), \mu_L(k)\}$ a aceluiași sistem. Acest semn va fi omis dacă, așa cum se întîmplă uneori, în intervalul considerat valorile unei variabile terminale legate de soluția $\{\hat{\mu}(k), \hat{\mu}_L(k)\}$ nu diferă de cele corespunzătoare soluției $\{\mu(k), \mu_L(k)\}$.

În virtutea acestor convenții, din (2.21) și (2.25) rezultă

$$\hat{\nu}_{L'}(k) = \hat{\nu}_X(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_X(k-j) \cdot \hat{\mu}_X(j) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \hat{\mu}_X(j) + \sum_{j=k_1+1}^{\infty} \varkappa_X(k-j) \cdot \hat{\mu}_X(j).$$

Prin urmare, întrucît $\hat{\mu}_X(k) = \hat{\nu}_L(k) - \hat{\mu}(k)$ (a doua dintre formulele (2.25)) și $\hat{\mu}(k) = \hat{\nu}_L(k)$ pentru $k > k_1$, așa cum rezultă din formula (2.9) și din definiția dată în *lema 2* șirului $\hat{\mu}(k)$, avem

$$\hat{\nu}_{L'}(k) = -\sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \hat{\mu}(j) + \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \hat{\nu}_L(j).$$

În virtutea convențiilor amintite, folosind formula (2.9), relația precedentă devine

$$\hat{\nu}_{L'}(k) = -\sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j) + \sum_{j=-\infty}^{k_1} \left[\varkappa_X(k-j) \cdot \sum_{h=-\infty}^{j} \varkappa_L(j-h) \cdot \mu_L(h)\right] =$$

$$= -\sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j) + \sum_{j=-\infty}^{k_1} \hat{\varkappa}_{L'}(k,j) \cdot \mu_L(j), \tag{2.28}$$

unde

$$\hat{\varkappa}_{L'}(k,j) = \sum_{h=j}^{k_1} \varkappa_X(k-h) \cdot \varkappa_L(h-j). \tag{2.29}$$

Fie de asemenea

$$\varkappa_{L'}(k-j) = \sum_{h=j}^{\infty} \varkappa_X(k-h) \cdot \varkappa_L(h-j), \tag{2.30}$$

astfel încît

$$\gamma_{L'}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varkappa_{L'}(k) \cdot z^{-k} \equiv \gamma_L(z) \cdot \gamma_X(z). \tag{2.31}$$

Pornind de la inegalitatea evidentă

$$\sum_{j=-\infty}^{k_1} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j)| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=j}^{\infty} (|\varkappa_X(k-h)| \cdot |\varkappa_L(h-j)|)$$

și folosind proprietățile șirurilor $\varkappa_X(k)$ și $\varkappa_L(k)$, se verifică inegalitățile

$$\sum_{j=-\infty}^{k_1} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j)| \leqslant 2 \cdot \alpha_L, \tag{2.32}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{k_1} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j)| \leqslant 2 \cdot \alpha_L. \tag{2.33}$$

Totodată, întrucît

$$\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{k_1-K} \sum_{h=k_1+1}^{\infty} |\varkappa_X(k-h)| \cdot |\varkappa_L(h-j)|,$$

K fiind un număr întreg și pozitiv, este verificată inegalitatea

$$\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)| \leqslant 2 \cdot \sum_{h=k_1+1}^{\infty} |\varkappa_L(h-j) \tag{2.34}$$

pentru orice număr întreg și pozitiv K și orice j întreg din intervalul $[-\infty, k_1]$.

Din inegalitatea (2.34), cu ajutorul proprietății (2.12) a șirului $\varkappa_L(k)$, rezultă, oricare ar fi numărul $\varepsilon_1 > 0$, existența unui număr întreg și pozitiv $K(\varepsilon_1)$ (numărul $K(\varepsilon_1)$ nu depinde de k_1) astfel încît

$$\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)| \leqslant \varepsilon_1, \quad \text{pentru } j \leqslant k_1 - K(\varepsilon_1). \tag{2.35}$$

În același fel, oricare ar fi numărul $\varepsilon_2 > 0$, rezultă existența unui număr întreg și pozitiv $K'(\varepsilon_2)$ (numărul $K'(\varepsilon_2)$ nu depinde de k_1) astfel încît este îndeplinită inegalitatea

$$\sum_{j=-\infty}^{k_1-K'} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)| \leqslant \varepsilon_2, \text{ pentru } k \leqslant k_1 - K'(\varepsilon_2. \tag{2.36}$$

Se consideră expresia

$$\hat{\eta}(-\infty, k_1) = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \overline{\hat{\mu}_{L'}(k)} \cdot \hat{\nu}_{L'}(k), \tag{2.37}$$

unde „—" notează conjugarea complexă. Folosind formulele (2.27) în membrul drept al relației (2.36), rezultă

$$\hat{\eta}(-\infty, k_1) = -\operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \overline{\hat{\mu}_{N'}(k)} \cdot \hat{\nu}_{N'}(k). \tag{2.38}$$

Întrucît $\hat{\mu}_N(k) = \hat{\nu}_{X'}(k) = \hat{\mu}_X(k)$ (așa cum rezultă din a doua dintre relațiile (2.26) și din faptul că blocul X' este inversul blocului X), iar $\hat{\mu}_X(k) = 0$ pentru $k > k_1$ (deoarece $\hat{\mu}(k) = \nu_L(k)$ pentru $k > k_1$, așa cum s-a mai arătat) și $\hat{\mu}_X(k) = \mu_X(k)$ pentru $k \leqslant k_1$ (aceasta fiind o consecință imediată a faptului că blocul L este neanticipativ), expresia din membrul drept al formulei (2.38) poate fi adusă la forma

$$\hat{\eta}(-\infty, k_1) = -\operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \sum_{j=-\infty}^{k_1} \overline{\varphi}(k, \mu_N(k)) \cdot \varkappa_X(k-j) \cdot \mu_N(j),$$

din care, prin utilizarea inegalității (2.20) din ipoteza (b) rezultă

$$\hat{\eta}(-\infty, k_1) \leqslant 0. \tag{2.39}$$

Pe de altă parte, folosind relația (2.28) în membrul drept al formulei (2.37), în virtutea unor convenții stabilite mai înainte rezultă

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(-\infty, k_1) = &-\operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \overline{\mu}_L(k) \cdot \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j) + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \sum_{j=-\infty}^{k_1} \overline{\mu}_L(k) \cdot \hat{\varkappa}_{L'}(k, j) \cdot \mu_L(j). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pentru primul termen al membrului drept al relației (2.40), cu ajutorul inegalității Cauchy-Schwartz-Buniakovski, se verifică evaluarea

$$\begin{aligned} &-\operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \left(\overline{\mu}_L(k) \cdot \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j)\right) \geqslant \\ &\geqslant -\operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1} \left(|\overline{\mu}_L(k)| \cdot \left| \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j) \right| \right) \geqslant \\ &\geqslant -\operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1} \left| \sum_{j=-\infty}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \mu(j) \right|^2 \right)^{1/2} \geqslant \end{aligned}$$

(apoi cu ajutorul propoziției 1)

$$\geqslant -4 \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1} |\mu(k)|^2 \right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant -4 \text{ const.} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.41}$$

Al doilea termen al membrului drept al relației (2.40) poate fi adus la forma $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$, unde

$$N_1 = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1-K} \sum_{j=-\infty}^{k_1-K} (\bar{\mu}_L(k) \cdot (\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)) \cdot \mu_L(j)),$$

$$N_2 = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1-K} \sum_{j=-\infty}^{k_1-K} \bar{\mu}_L(k) \cdot \varkappa_{L'}(k-j) \cdot \mu_L(j),$$

$$N_3 = \operatorname{Re} \sum_{k=k_1-K+1}^{k_1} \sum_{j=k_1-K+1}^{k_1} \bar{\mu}_L(k) \cdot \hat{\varkappa}_{L'}(k, j) \cdot \mu_L(j),$$

$$N_4 = \operatorname{Re} \sum_{k=k_1-K+1}^{k_1} \sum_{j=-\infty}^{k_1-K} \bar{\mu}_L(k) \cdot \hat{\varkappa}_{L'}(k, j) \cdot \mu_L(j),$$

$$N_5 = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{k_1-K} \sum_{j=k_1-K+1}^{k_1} \bar{\mu}_L(k) \cdot \hat{\varkappa}_{L'}(k, j) \cdot \mu_L(j).$$

Cu ajutorul inegalității Cauchy-Schwartz-Buniakovski poate fi stabilită evaluarea

$$N_1 \geqslant -\left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} \left(\sum_{j=-\infty}^{k_1-K} |\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \varkappa_{L'}(k-j)| \cdot |\mu_L(j)| \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Aplicînd propoziția 1 unui bloc definit de șirul dublu $|\hat{\varkappa}_{L'}(k, j) - \varkappa_{L'}(k-j)|$ cu proprietățile (2.36) — (2.37), rezultă

$$N_1 \geqslant -\varepsilon_1^2 \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\mu_L(k)|^2 \right) \tag{2.42}$$

pentru orice $K \geqslant \sup.(K(\varepsilon_1), K'(\varepsilon_1))$.

Din ipoteza (a), ținînd seama de identitatea (2.31), rezultă că inegalitatea $\operatorname{Re}\gamma_{L'}(z) \geqslant \varepsilon > 0$ este îndeplinită pentru orice număr complex z al cărui modul este egal cu unitatea, astfel încît, așa cum rezultă din propoziția 3 din [8], poate fi verificată evaluarea

$$N_2 \geqslant \varepsilon \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\mu_L(k)|^2 \right). \tag{2.43}$$

Pornind de la inegalitățile (2.32) și (2.33), printr-un procedeu asemănător celui întrebuințat la obținerea inegalității (2.42), pot fi stabilite următoarele inegalități :

$$N_3 \geqslant -4 \cdot \alpha_L^2 \cdot \left(\sum_{k=k_1-K+1}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right), \tag{2.44}$$

$$N_4 \geqslant -4 \cdot \alpha_L^2 \cdot \left(\sum_{k=k_1-K+1}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2}, \tag{2.45}$$

$$N_5 \geqslant -4 \cdot \alpha_L^2 \cdot \left(\sum_{k=k_1-K+1}^{k_1} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k_1-K} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.46}$$

Se notează

$$\left(\sum_{k=h}^{j} |\mu_L(k)|^2 \right)^{1/2} = n(h, j).$$

Cu această notație, din inegalitățile (2.39) și (2.41)—(2.46) rezultă

$$(\varepsilon - \varepsilon_1^2) \cdot n^2(-\infty, k_1 - K) - 4 \cdot \alpha_L^2 \cdot 2 \cdot n(k_1 - K + 1, k_1) \cdot n(-\infty, k_1 - K) - 4 \cdot \alpha_L^2 \cdot n^2(k_1 - K + 1, k_1) - 4 \cdot \text{const.} \cdot (n(-\infty, k_1 - K) + n(k_1 - K + 1, k_1)) \leqslant 0. \tag{2.47}$$

Întrucît șirul $\mu_L(k)$ este mărginit, toate soluțiile sistemului LN și toate soluțiile sistemului $L'N'$ fiind mărginite prin ipoteză, este îndeplinită inegalitatea $n(k_1 - K + 1, k_1) \leqslant \text{const}$, în care constanta pozitivă din membrul drept nu depinde de k_1, ci numai de ε_1. Prin alegerea lui ε_1 astfel încît $\varepsilon^2{}_1 < \varepsilon$, inegalitatea (2.47) poate fi adusă la forma

$$n^2(-\infty, k_1 - K) - \alpha_1 \cdot n(-\infty, k_1 - K) - \alpha_2 \leqslant 0, \tag{2.48}$$

în care α_1 și α_2 sînt constante pozitive independente de k_1, iar K este un număr întreg și pozitiv constant. În aceste condiții, inegalitatea (2.48) implică mărginirea superioară a sumei $n(-\infty, k)$ pentru orice k întreg, deci și a sumei

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_L(j)|^2.$$

Propoziția 2, a cărei demonstrație este acum încheiată, arată cum poate fi rezolvată problema stabilității absolute a unor sisteme compuse prin conectarea în reacție negativă a unui bloc liniar autonom neanticipativ (cauzal) cu un bloc neliniar neautonom cu mijloacele rezultate prin extinderea noțiunii de hiperstabilitate asupra blocurilor anticipative. Mărginirea soluțiilor sistemului *LN* poate fi de multe ori ușor de verificat așa cum se întîmplă dacă neliniaritatea este de tipul cu saturație. Condiția (a) de stabilitate absolută este exprimată cu ajutorul funcției de transfer $\gamma_L(z)$ a părții liniare a sistemului studiat, alături de care intervin „multiplicatorul" $\gamma_X(z)$. Acesta poate fi ales din o mulțime de multiplicatori pentru care este îndeplinită condiția (b). Această a doua condiție este legată în exclusivitate de proprietățile părții neliniare sau neautonome a sistemului cu reacție negativă studiat. În continuare vor fi prezentate o familie de „multiplicatori" pentru care condiția (b) din propoziția 2 este îndeplinită dacă partea neliniară a sistemului studiat are o caracteristică monotonă și o familie de „multiplicatori" pentru care aceeași condiție este îndeplinită dacă partea neautonomă a sistemului studiat este un amplificator al cărui cîștig este variabil. În încheiere este indicat un exemplu în care numai un multiplicator anticipativ(multiplicator care este funcția de transfer a unui bloc anticipativ) poate fi convenabil pentru îndeplinirea condiției (a) din propoziția 2.

Observația 1. Pentru $\varkappa_X(k) = 0$ pentru $k \leqslant 0$ (multiplicator neanticipativ), propoziția 2 poate fi demonstrată fără a presupune soluțiile sistemului *LN* mărginite. În acest caz, mărginirea soluțiilor rezultă din îndeplinirea condițiilor (a) și (b).

Observația 2. Dacă

$$\operatorname{Re} \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \overline{\varphi}(k, \mu_k) \cdot \varkappa_X(k-j) \cdot \mu_j \geqslant \varepsilon_1 \cdot \sum_{k=k_0}^{k_1} |\mu_k|^2,$$

unde $\varepsilon_1 > 0$, proprietatea de stabilitate asimptotică în mare a soluție banale a sistemului *LN* este asigurată și dacă în condiția (a) avem $\varepsilon \geqslant 0$.

3. SISTEME DISCRETE CU NELINIARITATE MONOTONĂ

Fie $\varphi(\mu)$ o funcție definită pentru orice μ real, continuă și cu valori reale. Pentru această funcție se consideră proprietățile

$$\varphi(0) = 0, \tag{3.1}$$

$$\delta_0(\mu_1 - \mu_2)^2 \leqslant (\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)) \cdot (\mu_1 - \mu_2) \leqslant (\delta_1 - \varepsilon) \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2, \tag{3.2}$$

oricare ar fi μ_1 și μ_2 reali, pentru $\delta_0 < \delta_1 - \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(\mu) = -\varphi(-\mu) \tag{3.3}$$

oricare ar fi μ.

Se consideră blocul discret N neliniar, ale cărui variabile terminale (mărimea de comandă $\mu_N(k)$ și mărimea de ieșire $\nu_N(k)$) sînt determinate pentru orice k întreg astfel încît

$$\nu_N(k) = \varphi(\mu_N(k)). \tag{3.4}$$

Fie M blocul neliniar realizat prin conectarea blocului N cu elementele amplificatoare A_0 și A_1 (al căror cîștig este δ_0, respectiv $(\delta_1 - \delta_0)^{-1}$, astfel încît

$$\mu_M(k) = \delta_1 \cdot \mu_N(k) - \nu_N(k), \tag{3.5}$$

$$\nu_M(k) = \nu_N(k) - \delta_0 \cdot \mu_N(k), \tag{3.6}$$

unde $\mu_M(k)$ este mărimea de comandă a blocului M și $\nu_M(k)$ mărimea de ieșire corespunzătoare.

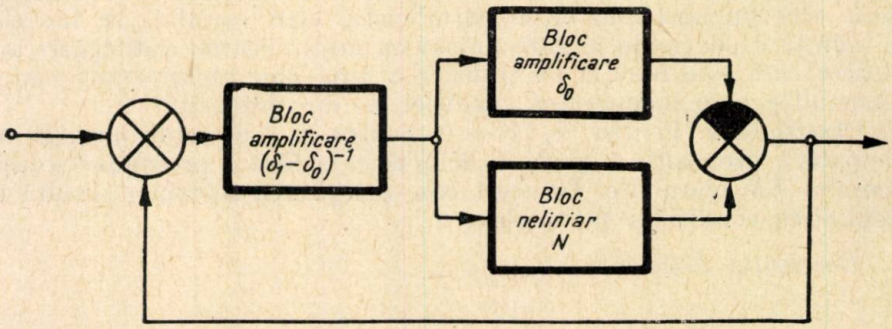


Fig. 3. — Blocul M.

Propoziția 3. Dacă funcția $\varphi(\mu)$ definită pentru orice μ real, continuă și cu valori reale are proprietățile (3.1)—(3.2) (respectiv (3.1)—(3.3)), există funcția $\varphi_M(\mu)$ univoc determinată, definită pentru orice μ real, continuă și cu valori reale, astfel încît

$$\nu_M(k) = \varphi_M(\mu_M(k)) \text{ oricare ar fi comanda } \mu_M(k).$$

Totodată, funcția $\varphi_M(\mu)$ are proprietățile (3.7) — (3.8) (respectiv (3.7)—(3.9)), unde

$$\varphi_M(0) = 0, \tag{3.7}$$

$$(\varphi_M(\mu_1) - \varphi_M(\mu_2)) \cdot (\mu_1 - \mu_2) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

oricare ar fi μ_1 și μ_2,

$$\varphi_M(\mu) = -\varphi_M(-\mu) \tag{3.9}$$

oricare ar fi μ.

Demonstrație. Pentru orice μ_M real există μ_N univoc determinat, astfel încît $\mu_M = \delta_1 \cdot \mu_N - \varphi(\mu_N)$. Într-adevăr, în virtutea proprietăților (3.1)—(3.2), funcția $\psi(\mu) = \delta_1 \cdot \mu - \varphi(\mu)$ are proprietatea $\psi(0) = 0$, este monotonă strict crescătoare și continuă. Prin urmare, $\psi(\mu)$ este inversabilă și inversa ei (notată ψ^{-1}) este definită pentru orice argument real, continuă și monoton crescătoare. Atunci $\varphi_M(\mu) = \varphi(\psi^{-1}(\mu)) - \delta_0 \cdot \psi^{-1}(\mu)$ este funcția univoc determinată pentru orice argument real μ, continuă și cu valori reale, astfel încît, oricare ar fi $\mu_M(k)$, dacă $\nu_M(k)$ și $\mu_M(k)$ îndeplinesc relațiile (3.5)—(3.6), atunci

$$\nu_M(k) = \varphi_M(\mu_M(k)). \tag{3.10}$$

Funcția $\varphi_M(\mu)$ are proprietatea (3.7). Într-adevăr,

$$\varphi_M(0) = \varphi(\psi^{-1}(0)) - \delta_0 \cdot \psi^{-1}(0) = \varphi(0) - \delta_0 \cdot 0 = 0.$$

Funcția $\varphi_M(\mu)$ are proprietatea (3.8). Într-adevăr,

$$(\varphi_M(\mu_1) - \varphi_M(\mu_2)) \cdot (\mu_1 - \mu_2) = (\varphi(\psi^{-1}(\mu_1)) - \varphi(\psi^{-1}(\mu_2))) \cdot (\mu_1 - \mu_2) -$$
$$- \delta_0 \cdot (\psi^{-1}(\mu_1) - \psi^{-1}(\mu_2)) \cdot (\mu_1 - \mu_2).$$

Dacă $\psi^{-1}(\mu_1) = \psi^{-1}(\mu_2)$, proprietatea (3.8) este imediat verificată. Dacă $\psi^{-1}(\mu_1) \neq \psi^{-1}(\mu_2)$, întrucît $\psi^{-1}(\mu)$ este o funcție continuă monoton crescătoare, rezultă $\mu_1 \neq \mu_2$ și diferența $\mu_1 - \mu_2$ are același semn cu expresia $\psi^{-1}(\mu_1) - \psi^{-1}(\mu_2)$. Înmulțind și împărțind cu

$$(\mu_1 - \mu_2)/(\psi^{-1}(\mu_1) - \psi^{-1}(\mu_2))$$

expresia găsită mai înainte pentru $(\varphi_M(\mu_1) - \varphi_M(\mu_2)) : (\mu_1 - \mu_2)$, cu ajutorul inegalității (3.2) se demonstrează că $\varphi_M(\mu)$ este o funcție monoton crescătoare.

Funcția $\varphi_M(\mu)$ are proprietatea (3.3). Într-adevăr, dacă $\varphi(\mu)$ îndeplinește condiția (3.3), se observă că

$$\psi(\mu) = \delta_1 \cdot \mu - \varphi(\mu) = -\delta_1 \cdot (-\mu) - (-\varphi(-\mu)) = -\psi(-\mu),$$

$$\psi^{-1}(\mu) = -\psi^{-1}(-\mu),$$

$$\varphi_M(\mu) = \varphi(\psi^{-1}(\mu) - \delta_0 \cdot \psi^{-1}(\mu) = -\varphi(\psi^{-1}(-\mu) - \delta_0 \cdot \psi^{-1}(-\mu)) = -\varphi_M(-\mu).$$

Cu aceasta se încheie demonstrația propoziției 3.

Propoziția 4. Oricare ar fi șirul cu termeni reali $\varkappa_X(k)$ cu proprietățile (i)—(ii) (rsp. (i)—(iii)):

$$\varkappa_X(0) = 1, \tag{i}$$

$$2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varkappa_X(k)| \geqslant \alpha_X > 0, \tag{ii}$$

$$\varkappa_X(k) \leqslant 0 \quad \text{pentru } k \neq 0, \tag{iii}$$

oricare ar fi funcția $\varphi_M(\mu)$ definită pentru orice μ real, continuă și cu valori reale, cu proprietățile (3.7)—(3.9) (respectiv (3.7)—(3.8)), este îndeplinită inegalitatea

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varphi_M(\mu_k) \cdot \varkappa_X(k-j) \cdot \mu_j \geqslant 0 \tag{3.11}$$

oricare ar fi șirul mărginit μ_k și $k_1 \geqslant k_0$.

Demonstrație. Se presupune mai întîi că șirul $\varkappa_X(k)$ are proprietățile (i)—(iii). Se notează suma din membrul stîng al inegalității (3.11) cu $S(k_0, k_1)$. Evident,

$$S(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varphi_M(\mu_k) \cdot \varkappa_X(k-j) \cdot (\mu_j - \mu_k + \mu_k).$$

Lema 7 din [3] demonstrează că pentru orice funcție $\varphi_M(\mu)$ continuă monoton crescătoare (nu neapărat strict crescătoare) este verificată inegalitatea

$$\varphi_M(\mu_k) \cdot (\mu_i - \mu_k) \leqslant \zeta(\mu_j) - \zeta(\mu_k), \tag{3.12}$$

unde

$$\zeta(\mu_k) = \int_0^{\mu_k} \varphi_M(\mu) \cdot d\mu.$$

Din inegalitatea precedentă rezultă

$$\varkappa_X(k-j) \cdot \varphi_M(\mu_k) \cdot (\mu_j - \mu_k) \geqslant \varkappa_X(k-j) \cdot (\zeta(\mu_j) - \zeta(\mu_k)).$$

Într-adevăr, pentru $k = j$ acest fapt este evident, iar pentru $k \neq j$ se observă că în acest caz $\varkappa_X(k-j) \leqslant 0$.

Însumînd după j și apoi după k, din inegalitatea precedentă, după o grupare convenabilă a termenilor, rezultă

$$S(k_0, k_1) \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot (\zeta(\mu_j) - \zeta(\mu_k)) +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \varphi_M(\mu_k) \cdot \mu_k \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \zeta(\mu_j) +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{k_1} \left[(\varphi_M(\mu_k) \cdot \mu_k - \zeta(\mu_k)) \cdot \sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \right].$$

Din inegalitatea (3.12) rezultă pentru $\mu_j = 0$

$$\varphi_M(\mu_k) \cdot \mu_k - \zeta(\mu_k) \geqslant 0$$

și, folosind proprietățile șirului $\varkappa_X(k)$, se arată că

$$\sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \geqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varkappa_X(k-j) > 0$$

pentru oricare k din intervalul $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$.

Cu acestea se verifică inegalitățile

$$S(k_0, k_1) \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j) \cdot \zeta(\mu_j) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=k_0}^{k_1} (\zeta(\mu_j) \cdot \sum_{k=k_0}^{k_1} \varkappa_X(k-j)) \geqslant \alpha_X \cdot \sum_{j=k_0}^{k_1} \zeta(\mu_j) \geqslant 0.$$

Propoziția 4 este demonstrată în ipoteza că sînt îndeplinite condițiile (i)—(iii).

În cele ce urmează se presupune că funcția $\varphi_M(\mu)$ are proprietățile (3.7)—(3.9) și se renunță la ipoteza (iii). În aceste condiții se verifică inegalitățile

$$\varphi_M(\mu_k) \cdot (\mu_j + \mu_k) = \varphi_M(\mu_k) \cdot (\mu_k - (-\mu_j)) \geqslant$$

$$\geqslant \zeta(\mu_k) - \zeta(-\mu_j) \geqslant \zeta(\mu_k) - \zeta(\mu_j). \tag{3.13}$$

Folosind inegalitatea (3.12) pentru termenii sumei $S(k_0, k_1)$ pentru care $\varkappa_X(k-j)$ este negativ și inegalitatea (3.13) pentru termenii sumei $S(k_0, k_1)$ pentru care $k \neq j$ și $\varkappa_X(k-j)$ este pozitiv, se demonstrează că

$$S(k_0, k_1) \geqslant \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \hat{\varkappa}_X(k-j) \cdot (\zeta(\mu_j) - \zeta(\mu_k)) +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \hat{\varkappa}_X(k-j) \cdot \varphi_M(\mu_k) \cdot \mu_k,$$

unde s-a folosit notația

$$\hat{\varkappa}_X(k) = \begin{cases} \varkappa_X(k) & \text{pentru } k = 0, \\ -\varkappa_X(k) & \text{pentru } k \neq 0. \end{cases}$$

Din inegalitatea precedentă, cu procedeele folosite în prima parte a demonstrației, se arată că și în acest caz este îndeplinită inegalitatea $S(k_0, k_1) \geqslant 0$.

4. SISTEME DISCRETE CU AMPLIFICARE VARIABILĂ

Se consideră blocul discret N ale cărui variabile terminale (mărimea de comandă $\mu_N(k)$ și mărimea de ieșire $\nu_N(k)$) sînt determinate pentru orice k întreg astfel încît

$$\nu_N(k) = \lambda(k) \cdot \mu_N(k), \tag{4.1}$$

unde μ_N, ν_N și $\lambda(k)$ sînt mărimi cu valori reale.

Pentru cîștigul $\lambda(k)$ al amplificatorului N se consideră proprietățile

$$\lambda(k) \geqslant 0 \tag{4.2}$$

pentru orice k,

$$1/\beta^2 \leqslant \lambda(k+1)/\lambda(k) \leqslant \alpha^2 \tag{4.3}$$

pentru orice k,
unde α și β sînt constante mai mari decît unitatea.

Propoziția 5. Fiind dat blocul N cu proprietățile (4.2)—(4.3) pentru orice șir mărginit $\varkappa_X(k)$ ai cărui termeni au valori reale și îndeplinesc condițiile :

$$\varkappa_X(0) = 1, \tag{4.4}$$

$$3 - \sum_{k=-\infty}^{0} |\varkappa_X(k)| \cdot \beta^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_X(k)| \cdot \alpha^k \geqslant \alpha_X > 0, \tag{4.5}$$

unde constantele α și β sînt cele din inegalitatea (4.3), este îndeplinită inegalitatea

$$S(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \nu_N(k) \cdot \varkappa_X(k-j) \cdot \mu_N(j) \geqslant 0, \tag{4.6}$$

oricare ar fi comanda mărginită $\mu_N(k)$ și $k_0 \leqslant k_1$.

Mai înainte de a demonstra această propoziție se observă că șirul $\varkappa_x(k)$ cu proprietățile (4.4)—(4.5) îndeplinește condițiile (i)—(ii) din propoziția 2.

Demonstrație. Fiind date șirurile $u(k)$ și $v(k)$ definite pentru orice k întreg cu termeni avînd valori reale sau complexe, poate fi verificată egalitatea

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} u(k) \cdot v(k) = u(k_1+1) \cdot w(k_1) - \sum_{k=k_0}^{k_1} (u(k+1) - u(k)) \cdot w(k), \tag{4.7}$$

unde

$$w(k) = \sum_{j=k_0}^{k} v(j) \text{ pentru } k_0 \leqslant k \leqslant k_1 \tag{4.8}$$

oricare ar fi $k_0 \leqslant k_1$.

Relația (4.7) este analogul discret al formulei de integrare prin părți (formula lui Abel).

Proprietățile (4.4)—(4.5) ale șirului $\varkappa_x(k)$ sînt suficiente pentru a demonstra existența șirurilor $\varkappa_{x,\alpha}(k)$ și $\varkappa_{x,\beta}(k)$ cu următoarele proprietăți :

$$\varkappa_{x,\alpha}(k) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } k < 0, \\ \varkappa_x(k) \cdot \alpha^k & \text{pentru } k > 0, \end{cases}$$

$$\varkappa_{x,\beta}(k) = \begin{cases} \varkappa_x(k) \cdot \beta^{-k} & \text{pentru } k < 0, \\ 0 & \text{pentru } k > 0, \end{cases}$$

$$\varkappa_{x,\alpha}(0) + \varkappa_{x,\beta}(0) = \varkappa_x(0),$$

$$2 \cdot \varkappa_{x,\alpha}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_{x,\alpha}(k)| \geqslant 0,$$

$$2 \cdot \varkappa_{x,\beta}(0) - \sum_{k=-\infty}^{0} |\varkappa_{x,\beta}(k)| \geqslant 0.$$

Dacă se notează

$$\gamma_{x,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_{x,\alpha}(k) \cdot z^{-k},$$

$$\gamma_{x,\beta}(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} \varkappa_{x,\beta}(k) \cdot z^{-k},$$

din inegalitățile de mai sus rezultă

$$\operatorname{Re} \gamma_{x,\alpha}(z) \geqslant 0 \quad \text{pentru } |z| = 1, \tag{4.9}$$

$$\operatorname{Re} \gamma_{x,\beta}(z) \geqslant 0 \quad \text{pentru } |z| = 1. \tag{4.10}$$

Suma $S(k_0, k_1)$ poate fi scrisă sub forma $S_\alpha + S_\beta$, unde

$$S_\alpha = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \nu_N(k) \cdot \varkappa_{x,\alpha}(k-j) \cdot \alpha^{j-k} \cdot \mu_N(j),$$

$$S_\beta = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} \nu_N(k) \cdot \varkappa_{x,\beta}(k-j) \cdot \beta^{k-j} \cdot \mu_N(j).$$

Suma S_α mai poate fi scrisă sub forma

$$S_\alpha = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k_1} (\lambda(k) \cdot \alpha^{-2k} \cdot \mu_N(k) \cdot \alpha^k \cdot \varkappa_{x,\alpha}(k-j) \cdot \mu_N(j) \cdot \alpha^j).$$

Folosind formula (4.7) pentru

$$u(k) = \lambda(k) \cdot \alpha^{-2k},$$

$$v(k) = \mu_N(k) \cdot \alpha^k \cdot \sum_{j=k_0}^{k} \varkappa_{X,\alpha}(k-j) \cdot \mu_N(j) \cdot \alpha^j,$$

expresia de mai înainte a sumei S_α devine

$$S_\alpha = \lambda(k_1+1) \cdot \alpha^{-2(k_1+k)} \cdot \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{j=k_0}^{k} \mu_N(k) \cdot \alpha^k \cdot \varkappa_{X,\alpha}(k-j) \cdot \mu_N(j) \cdot \alpha^j -$$

$$- \sum_{k=k_0}^{k_1} ((\lambda(k+1) \cdot \alpha^{-2(k+1)} - \lambda(k) \cdot \alpha^{-2k}) \cdot \sum_{h=k_0}^{k} \sum_{j=k_0}^{h} \mu_N(h) \cdot \alpha^h \cdot \varkappa_{X,\alpha}(h-j) \cdot \mu_N(j) \cdot \alpha^j).$$

Primul termen al acestei expresii a sumei S_α este pozitiv întrucît $\lambda(k) \geqslant 0$ pentru orice k $\alpha > 1$, iar suma dublă este pozitivă în virtutea proprietății „transformata-Z a nucleului $\varkappa_{x,\alpha}(k)$ este real pozitivă, așa cum rezultă din (4.9)" (teorema 3, [7]). Al doilea termen al aceleiași expresii este de asemenea pozitiv, întrucît, așa cum rezultă din (4.3), $\lambda(k+1) \cdot \alpha^{-2(k+1)} - \lambda(k) \cdot \alpha^{-2k} \leqslant 0$, iar suma dublă este pozitivă, așa cum s-a arătat pentru suma dublă considerată mai înainte, prin urmare $S_\alpha \geqslant 0$.

Suma S_β mai poate fi scrisă sub forma

$$S_\beta = \sum_{\hat{k}=k_0}^{k_1} (\hat{\lambda}(\hat{k}) \cdot \hat{\mu}_N(\hat{k}) \cdot \sum_{\hat{j}=k_0}^{k_1} \hat{\varkappa}_{X,\beta}(\hat{k}-\hat{j}) \cdot \hat{\mu}_N(\hat{j}) \cdot \beta^{\hat{j}-\hat{k}},$$

unde

$$\hat{k} = k_0 + k_1 - k,$$

$$\hat{j} = k_0 + k_1 - j,$$

$$\hat{\lambda}(k) = \lambda(k),$$

$$\hat{\mu}_N(\hat{k}) = \mu_N(k),$$

$$\hat{\varkappa}_{X,\beta}(\hat{k}-\hat{j}) = \varkappa_{X,\beta}(k-j).$$

Procedînd ca pentru S_α, se obține

$$S_\beta = \hat{\lambda}(k_1+1) \cdot \beta^{-2(k_1+1)} \cdot \sum_{\hat{k}=k_0}^{k_1} \sum_{\hat{j}=k_0}^{\hat{k}} (\hat{\mu}_N(\hat{k}) \cdot \beta^{\hat{k}} \cdot \hat{\varkappa}_{X,\beta}(\hat{k}-\hat{j}) \cdot \hat{\mu}_N(\hat{j}) \cdot \beta^{\hat{j}}) -$$

$$- \sum_{\hat{k}=k_0}^{k_1} ((\hat{\lambda}(\hat{k}+1)\cdot\beta^{-2(\hat{k}+1)} - \hat{\lambda}(\hat{k})\cdot\beta^{-2\hat{k}})\cdot$$

$$\cdot \sum_{\hat{h}=k_0}^{\hat{k}} \sum_{\hat{j}=k_0}^{\hat{h}} \hat{\mu}_N(\hat{h})\cdot\beta^{\hat{h}}\cdot\hat{\varkappa}_{X,\beta}(\hat{h}-\hat{j})\cdot\hat{\mu}_N(\hat{j})\cdot\beta^{\hat{j}}).$$

Primul termen al acestei expresii a sumei S_β este pozitiv. Într-adevăr, $\hat{\lambda}(k_1+1) = \lambda(k_0-1) \geqslant 0$, $\beta > 1$, iar suma

$$\sum_{\hat{h}=k_0}^{\hat{k}} \sum_{\hat{j}=k_0}^{\hat{h}} \hat{\mu}_N(\hat{h})\cdot\beta^{\hat{h}}\cdot\hat{\varkappa}_{X,\beta}(\hat{h}-\hat{j})\cdot\hat{\mu}_N(\hat{j})\cdot\beta^{\hat{j}} =$$

$$\sum_{l=k_0}^{\hat{k}} \sum_{i=k_0}^{l} \hat{\mu}_N(l)\cdot\beta^{l}\cdot\varkappa_{X,\beta}(i-l)\cdot\hat{\mu}_N(i)\cdot\beta^{i}$$

este pozitivă, întrucît

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_{X,\beta}(-k)\cdot z^{-k} = \operatorname{Re} \gamma_{X,\beta}(z) \geqslant 0 \text{ pentru } |z| = 1.$$

Al doilea termen al aceleiași expresii este de asemenea pozitiv, întrucît, așa cum rezultă din (4.3),

$$\hat{\lambda}(\hat{k}+1)\cdot\beta^{-2(\hat{k}+1)} - \hat{\lambda}(\hat{k})\cdot\beta^{-2\hat{k}} = \beta^{-2\hat{k}}\cdot(\lambda(k-1)\cdot\beta^{-2} - \lambda(k)) \leqslant 0,$$

prin urmare $S_\beta \geqslant 0$. Rezultă imediat $S(k_0, k_1) \geqslant 0$ și propoziția este demonstrată.

5. EXEMPLU. MULTIPLICATOR ANTICIPATIV

Se consideră blocul discret, liniar și autonom a cărui funcție de transfer este

$$\gamma_L(z) = \frac{(z^2-1)\cdot(z^2-0{,}5\cdot z-0{,}25)}{z\cdot(z^2+0{,}3)\cdot(2\cdot z-1)}.$$

Așa cum rezultă din propozițiile 2 și 4, pentru rezolvarea unei probleme de stabilitate absolută poate fi suficientă existența unui „multiplicator" (o funcție de transfer a unui bloc liniar, autonom, anticipativ sau cauzal)

$$\gamma_X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varkappa_X(k)\cdot z^{-k},$$

pentru care sînt îndeplinite condițiile (i)—(iii) din propoziția 4 și inegalitatea $\mathrm{Re}\,(\gamma_L(z)\cdot\gamma_X(z)) \geqslant 0$ pentru $|z| = 1$.

Tabela 1

θ	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,\gamma_L(e^{i\theta})}{\mathrm{Re}\,\gamma_L(e^{i\theta})}\right)$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,\gamma_X(e^{i\theta})}{\mathrm{Re}\,\gamma_X(e^{i\theta})}\right)$
0°	90°	0
15°	107°45′	−27°15′
30°	97°	−12°15′
45°	76°	− 1°
60°	53°30′	6°30′
75°	33°15′	10°30′
90°	− 4°15′	11°45′
105°	−44°45′	11°45′
120°	−57°15′	10°30′
135°	−70°45′	8°30′
150°	−81°	5°45′
165°	−86°30′	3°
180°	−90°	0°

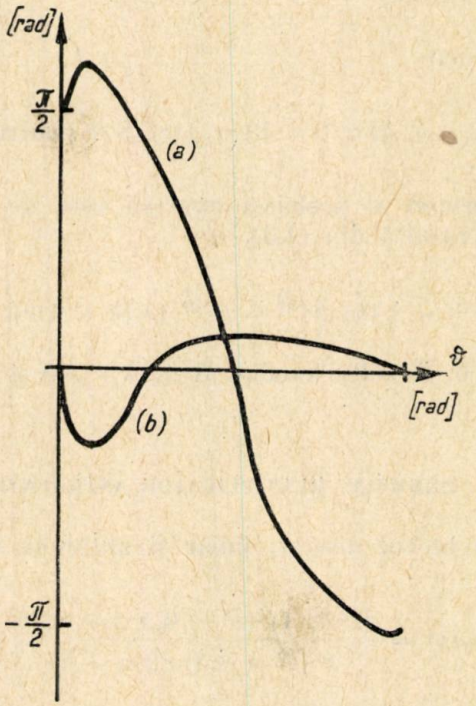


Fig. 4. — Graficul funcției $\operatorname{arctg}(\mathrm{Im}\,\gamma_L(z)/\mathrm{Re}\,\gamma_L(z))$ pentru $z = e^{i\theta}$, $\theta = 0 \div \pi(a)$ și al funcției $\operatorname{arctg}(\mathrm{Im}\,\gamma_X(z)/\mathrm{Re}\,\gamma_X(z))$ pentru $z = e^{i\theta}$, $\theta = 0 \div \pi(b)$.

Întrucît, așa cum rezultă din datele prezentate în tabela 1 și din figura 4 *a*, multiplicatorul $\gamma_X(z)$ trebuie ales în condițiile arătate astfel

încît să introducă atît defazaje pozitive pentru anumiți z, cît și defazaje negative pentru alți z, multiplicatorul $\gamma_x(z)$ nu poate fi cauzal. În schimb, multiplicatorul anticipativ

$$\gamma_x(z) = 0{,}95^{-1} \cdot (0{,}45 - 0{,}4 \cdot z^{-1} + 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}95 \cdot z)/(1 - 0{,}5 \cdot z)),$$

care poate fi scris sub forma

$$\gamma_x(z) = -0{,}4/(0{,}95 \cdot z) + 1 - \frac{0{,}225}{0{,}950}(z + z^2/2 + z^3/4 + \ldots),$$

îndeplinește, evident, toate condițiile (i)—(iii) din propoziția 4 și inegalitatea $\mathrm{Re}\,(\gamma_L(z) \cdot \gamma_x(z)) \geqslant 0$ pentru $|z| = 1$.

În acest fel este pusă în evidență utilitatea studiului hiperstabilității blocurilor anticipative pentru rezolvarea unor probleme de stabilitate absolută a sistemelor formate prin conectarea în reacție negativă a unor blocuri neanticipative.

BIBLIOGRAFIE

1. V. M. Popov, *Teoria hiperstabilității sistemelor automate*, București, Edit. Academiei, 1966.
2. R. W. Brockett, J. L. Willems, *Frequency Domain Stability Criteria*, I.E.E.E. Trans. on Automatic Control, Vol. AC-10, July 1965, Oct. 1965, p. 407—413.
3. G. Zames, P. L. Falb, *Stability Conditions for Systems with Monotone and Slope-restricted Nonlinearities*, S.I.A.M. Journal on Control, **6**, *1*, 89—108 (1968).
4. A. Halanay, D. Wexler, *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri*, București, Edit. Academiei, 1968.
5. Chi-Tsong Chen, *On the Stability of Sampled-Data Systems with Time-Varying Gain*, I.E.E.E. Trans. on Automatic Control, vol. AC-11, July 1966.
6. Y. V. Venkatesh, *Noncausal Multipliers for Linear System Stability*, Report 1, Dept. of Electrical Engineering, Indian Inst. of Science, Bangalore 12, Feb. 1969.
7. A. Halanay, *Polojitelino opredeleonnie iadra i ustoicivosti avtomaticeskih sistem*, Rev. Roum. de math. putes et appliquées, **IX**, *8*, 751—765 (1964).
8. S. Gheţaru, *Hiperstabilitatea blocurilor discrete, liniare, autonome, anticipative*, St. cerc. energ. electr., **19**, *4*, 871—877 (1969).

ASUPRA DETERMINĂRII VITEZEI UNUI CALCULATOR PENTRU FUNCȚIONAREA ÎN TIMP REAL

DE

M. VARTOLOMEI

681.142 : 62.011.56

În lucrare sînt expuse principalele aspecte privind dimensionarea echipamentelor de calcul în timp real din punctul de vedere al vitezei de lucru.
Pentru problemele enunțate se expun metode de rezolvare într-o prezentare unitară. Au fost elaborate extinderi pentru cazuri mai generale, care pot interveni la sisteme cu structuri complexe de prelucrare a informației.

1. SISTEME CU SOLICITARE CONSTANTĂ

Problemele atribuite spre rezolvare unui calculator cu funcționare în timp real pot fi în general de două tipuri : cu caracter permanent și timp de ocupare constant și cu caracter aleator. Există, în general, și o ordine de prioritate cu posibilitatea de întrerupere în favoarea problemei celei mai urgente.

Programele utilizate în sistem se împart în trei categorii : de supraveghere, de aplicație și auxiliare [1], [2]. Într-o primă aproximație putem stabili de cîte ori face apel fiecare program de aplicație (problemă de rezolvat) la programul supraveghetor pentru operații de intrare-ieșire, adresare la memorii externe etc. Putem de aceea adăuga pentru scopurile noastre de calcul, cu o anumită pondere, lungimea programului supraveghetor la fiecare problemă de rezolvat. La fel, lungimea anumitor programe auxiliare, cum ar fi cele de testare *on line*, se poate include cu o anumită pondere în lungimea problemelor de rezolvat.

Într-un sistem de conducere prin calculator a unui proces industrial, fiecărei bucle de reglare p îi corespunde o perioadă proprie de eșantionare T_p, depinzînd în general de natura mărimii reglate [3]. Unii autori indică valori orientative specifice cum ar fi 1—1,5 s pentru debite, 1—20 s pentru presiuni, 10—20 s pentru temperaturi. O prescripție generală empirică este aceea ca perioada de eșantionare să fie aproximativ o optime din perioada proprie de oscilație a buclei conduse printr-un regulator analogic.

Limita superioară a perioadei are un maximum maximorum dat de teorema lui Shannon, $T = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_c}\right)$, unde ω_c este cea mai mare pulsație de semnal. Limitele inferioare apar numai din considerente economice.

Considerînd toate problemele ca avînd caracter permanent, se poate stabili viteza de calcul necesară:

$$v = \sum_{p=1}^{n} V_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{K_p}{T_p},$$

unde K_p este numărul de instrucțiuni din programul problemei p.

Pentru a asigura rezolvarea tuturor problemelor este necesar să se îndeplinească restricțiile de timp [4]:

$$1)\ \tau_1 < T_1,$$

$$2)\ \left[\frac{T_2}{T_1}\right]\tau_1 + \tau_2 < T_2,$$

$$3)\ \left[\frac{T_3}{T_1}\right]\tau_1 + \left[\frac{T_3}{T_2}\right]\tau_2 + \tau_3 < T_3,$$

. . . . . .

$$n)\ \left[\frac{T_n}{T_1}\right]\tau_1 + \left[\frac{T_n}{T_2}\right]\tau_2 + \ldots + \tau_n < T_n,$$

$[\alpha]$ este întregul imediat inferior lui α.

Aici, în calculul vitezei, două probleme cu același T se comasează, K_p fiind suma numerelor de instrucțiuni, iar τ_p timpul de rezolvare a problemei.

Se poate arăta că viteza de calcul stabilită mai sus satisface restricțiile de timp real: Întrucît $\tau_1 = \frac{K_1}{v} = \frac{K_1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{K_p}{T_p}}$ introducînd în 1) $\frac{K_1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{K_p}{T_p}} < T_1$ sau $\frac{K_1}{T_1} < \sum_{p=1}^{n} \frac{K_p}{T_p} = \frac{K_1}{T_1} + \sum_{p=2}^{n} \frac{K_p}{T_p}$, adică 1) este verificat. Analog se pot verifica toate restricțiile 1) — n).

În lipsa restricțiilor tehnologice, ordinea $T_1, T_2, \ldots, T_n$ este și cea a repartizării problemelor pe nivele de prioritate [5].

Odată ales un echipament de calcul avînd viteza $V \geqslant v$, determinat ca mai sus, componentele vitezei V_i se pot determina astfel ca erorile de redare prin eșantionare a mărimilor continue de ieșire să fie minime. Dacă buclei i îi corespunde eroarea pătratică medie $Q_i(V_i)$, se poate alege ca funcție criteriu

$$Q(V_1 V_2 \ldots V_i \ldots V_n) = \rho_1 Q_1(V_1) + \rho_2 Q_2(V_2) + \ldots +$$

$$+ \rho_i Q_i(V_i) + \ldots + \rho_n Q_n(V_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i Q_i(V_i),$$

unde ρ_i sînt niște coeficienți de pondere, atribuiți după importanța problemei i. Minimizarea criteriului se poate face prin programare dinamică.

Restricțiile pentru V_i sînt

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V,$$

$$V_{i\min} \leqslant V_i \leqslant V_{i\max},$$

$$V_i > 0.$$

Avem de calculat deci

$$f_N(V) = \min_{\{V_i\}} Q(V_1, V_2, \ldots, V_K),$$

$$V_{i\min} \leqslant V_i \leqslant V_{i\max},$$

$$\sum_{i=1}^{K} V_i = V.$$

Observăm că

$$f_N(0) = 0 \quad , \quad N = 1, 2, \ldots, K,$$

$$f_1(V) = Q_1(V).$$

Putem scrie în continuare

$$f_N(V) = \min_{\{V_i\}} Q_N(V_N) + f_{N-1}(V - V_N)\} \quad (N = 2, 3, \ldots, K).$$

Expresiile Q_i pot fi alese de forma

$$Q(T) = |\overline{C_d(t) - C(t)}|^2,$$

unde bara superioară definește operația de medie pe o perioadă, C_d este mărimea de ieșire dorită, iar C ieșirea reală a buclei.

Fie, de exemplu, o buclă ca în figura 1. Mărimea de ieșire rezultă în acest caz din expresia generală

$$C(s) = \frac{G(s)\, R^*(s)}{1 + HG^*(s)}.$$

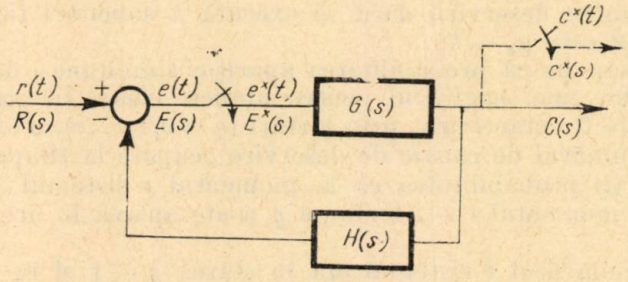


Fig. 1. — Exemplu de sistem cu eșantionare

În cazul unei intrări armonice $r(t) = Ae^{\sim\omega t}$, rezultă

$$C(j\omega) = \frac{AG(j\omega)}{T(1 + HG^*(j\omega))} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - j(\omega - n\omega_s)},$$

apoi

$$c(t) = \frac{A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G[j(\omega - n\omega_s)]}{1 + HG^*(j\omega)} e^{j(\omega - n\omega_s)t}.$$

Această problemă poate interveni atunci cînd calculatorul dispune de o rezervă de timp de calcul, eventual prin nefolosirea tuturor buclelor prevăzute inițial.

2. SISTEME CU SOLICITARE ALEATOARE

În caz că în afară de problemele conectate permanent în sistem apar și solicitări aleatoare pentru alte probleme, determinarea vitezei calculatorului devine mai complicată. Partea constantă va fi calculată ca mai sus.

Dacă problemele care intervin aleator ar fi considerate conectate permanent, viteza de calcul alocată ar fi folosită nerațional.

Pentru calculul vitezei necesare s-au stabilit metode de calcul bazate pe teoria așteptării. Vom prezenta pe scurt o asemenea metodă [6] și vom da o extindere a ei pentru cazul priorităților multiple.

2.1. SISTEME CU DOUĂ CLASE DE SOLICITĂRI

Se consideră calculatorul ca un sistem de deservire avînd C canalei din care N conectate la o clasă de obiecte deservite fără pierderi, restul de M fiind conectate la o clasă în deservire căreia pot apărea pierder, atît datorită ocupării tuturor canalelor, cît și prin deconectarea de către un obiect din cealaltă clasă.

Evident, în acest caz $C < M + N = Q$, de asemenea $C \geqslant N$. Speranța matematică a apariției unei solicitări neîndeplinite pentru ambele clase este λ', iar dacă solicitările sînt îndeplinite este egală cu zero.

Intensitatea surselor de solicitări de clasa 1 dacă n se îndeplinesc este $\lambda'_n = (N - n)\lambda'$, iar pentru clasa 2 : $\lambda'_m = (M - m)\lambda'$.

Intensitatea deservirii dacă se execută k solicitări fie de clasa 1, fie de clasa 2 este $\mu_k = k\mu$.

Se presupune că probabilitatea apariției simultane a două solicitări este un infinit mic, neglijabil pentru ambele clase. În aceste condiții, sistemul poate fi caracterizat prin q stări ($q = 0,1,\ldots c$), o stare fiind definită prin numărul de canale de deservire ocupate la timpul considerat.

Fie $P_q(t)$ probabilitatea ca la momentul t sistemul să se afle în starea q. La momentul $t + \Delta t$, starea q poate apărea în următoarele trei cazuri :

a) la momentul t sistemul era în starea $q - 1$ și în intervalul Δt s-a ocupat încă un canal. Probabilitatea acestei situații este $P_{q-1,q}$;

b) sistemul se găsea în starea $q+1$ și în intervalul Δt s-a eliberat un canal. Probabilitatea acestei situații este $P_{q+1,q}$;

c) sistemul se găsea în starea q și în intervalul t nu s-a eliberat și nu s-a ocupat nici un canal. Probabilitatea acestei situații este P_{qq}.

Se poate astfel scrie următoarea ecuație:

$$P_q(t+\Delta t) = P_{q-1}(t)\,P_{q-1,q} + P_{q+1}(t)\,P_{q+1,q} + P_q(t)\,P_{qq}.$$

Trecerea din starea $q-1$ în q se poate face dacă a apărut o solicitare din clasa 1 sau o solicitare de clasa 2.

Alte cazuri (apariții și dispariții simultane) au probabilități de valoare foarte mică și se neglijează.

Putem de aceea scrie

$$P_{q-1,q} = \Lambda_{q-1}\,\Delta t,$$

$$\Lambda_{q-1} = \lambda'\,[(N+M) - (n+m)],$$

$$n+m = q-1.$$

La fel putem scrie

$$P_{q+1,q} = M_{q+1},\,\Delta t,$$

$$M_{q+1} = \mu\,(n+m),$$

$$n+m = q+1.$$

Probabilitatea P_{qq} se obține astfel:

$$P_{qq} = 1 - \Lambda_q\,\Delta t - M_q\,\Delta t$$

și ecuația devine

$$P_q(t+\Delta t) = P_{q-1}(t)\,\Lambda_{q-1}\,\Delta t + P_{q+1}(t)\,M_{q+1}\,\Delta t + \\ + P_q(t)\,[1 - (\Lambda_q + M_q)\,\Delta t].$$

Trecînd P_q în membrul stîng, împărțind cu Δt și luînd limita cînd $\Delta t \to 0$, obținem sistemul de ecuații

$$\frac{dP_0}{dt} = P_1(t)\,M_1 - P_0(t)\,\Lambda_0 \quad , \quad q=0,$$

. . . . . .

$$\frac{dP_q}{dt} = P_{q-1}(t)\,\Lambda_{q-q} + P_{q+1}(t)\,M_{q+1} - P_q(t)\,(\Lambda_q + M_q),\ 1 \leqslant q \leqslant C-1, \quad (1)$$

. . . . . .

$$\frac{dP_c}{dt} = P_{c-1}(t)\,\Lambda_{c-1} - P_c(t)\,M_c' \quad , \quad q=C,$$

unde $M_c' = M_c + \lambda' \sum_{n=0}^{N} (N-n) = M_c + \left[N^2 - \frac{(N+1)\,N}{2}\right]\lambda'.$

În lucrarea [6] se arată în continuare că $\lim_{\substack{t\to\infty \\ 0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant k\leqslant n}} P_{ik}(t) = p_k$ este o soluție staționară, care nu depinde de condițiile inițiale. Pentru regimul staționar, sistemul de ecuații devine algebric:

$$\begin{aligned} 0 &= -\Lambda_0 p_0 + M_1 p_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \Lambda_{q-1} p_{q-1} + M_{q+1} p_{q+1} - p_q(\Lambda_q + M_q), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \Lambda_{c-1} p_{c-1} - M_c' p_c. \end{aligned} \tag{2}$$

În aceste condiții, soluția este

$$p_q = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{q-1}}{M_1 M_2 \dots M_q} p_0 = F_q p_0$$

sau, ținînd seama că

$$\sum_{q=0}^{c} p_q = 1, \text{ putem scrie } p_q = \frac{F_q}{\sum_{i=0}^{c} F_i}, \quad F_0 = 1. \tag{3}$$

În particular, probabilitatea ocupării complete este

$$p_c = \frac{F_c}{\sum_{i=0}^{c} F_i}, \quad F_0 = 1.$$

Urmează calculul pierderilor (al solicitărilor nesatisfăcute). Se pierd numai solicitările de clasa 2, atît datorită ocupării complete, cît și prin substituirea solicitărilor de clasa 2 prin cele de clasa 1.

Aceasta permite pentru $C \geqslant N$ să imaginăm un sistem care deservește numai solicitările de clasa 1:

$$\frac{dP_n'}{dt} = (N - n + 1)\lambda' P_{n-1}'(t) + (n+1)\mu P_{n+1}'(t) - [(N-n)\lambda' + n\mu] P_n'(t) \quad (n = 0, 1, \dots, N). \tag{4}$$

La fel ca mai sus, se poate căuta soluția staționară prin anularea derivatelor:

$$0 = (N - n + 1)\lambda' p_{n-1}' + (n+1)\mu p_{n+1}' - [(N-n)\lambda' + n\mu] p_n' \quad (n = 0, 1, \dots, N). \tag{5}$$

Soluția va fi

$$p'_n = C_n^N \left(\frac{\lambda'}{\lambda' + \mu}\right)^N \left(\frac{\mu}{\lambda' + \mu}\right)^{N-n}, \tag{6}$$

iar pentru $n = N$ se obține $p'_N = \left(\frac{\lambda'}{\lambda' + \mu}\right)^N$.

Din acest sistem se poate determina numărul mediu de canale ocupate cu solicitări de clasa 1 :

$$\overline{n} = En = \sum_{n=0}^{N} np'_n.$$

Din sistemul anterior se poate determina numărul mediu de canale ocupate cu ambele tipuri de solicitări :

$$\overline{q} = Eq = \sum_{q=0}^{c} qp_q.$$

Numărul mediu de canale ocupate cu solicitări de clasa 2 este

$$\overline{m} = \overline{q} - n,$$

intensitatea medie a surselor de clasa 1 $\lambda'_{\text{med}} = (N - \overline{n})\,\lambda'$, iar intensitatea medie a surselor de clasa 2 $\lambda''_{\text{med}} = (M - \overline{m})\,\lambda'$.

Deoarece pentru clasa 2 P_c este probabilitatea pierderilor prin plin de capacitate, în intervalul $0 \ldots T$ se vor pierde

$$m_{\text{med}\,1} = \lambda''_{\text{med}}\, p_c\, T.$$

Deoarece pierderile prin substituire sînt determinate de deservirea clasei 1, probabilitatea substituirii fiind p_c, pierderile prin substituire vor fi în intervalul $0 \ldots T$

$$m_{\text{med}\,2} = \lambda'_{\text{med}}\, p_c\, T.$$

Pierderile totale medii vor fi

$$m_{\text{med}} = m_{\text{med}\,1} + m_{\text{med}\,2}.$$

Calculul pierderilor permite determinarea rațională a numărului de canale necesare, de fapt a vitezei de calcul.

Criteriul de optimizare poate fi ales de forma $\alpha(c) = m_{\text{med}}(c)\,\rho_1 + c\,\rho_2$, unde ρ_1 este prețul pierderii unei solicitări, iar ρ_2 costul unui canal de deservire (componenta unitară de viteză).

Urmează a se determina

$\min_{C \geqslant N} \alpha(c) = \min_{C \geqslant N} \{m_{\text{med}}(c)\, \rho_1 + c\rho_2\}$ și valoarea $C = C_0$, corespunzătoare minimului.

Viteza calculatorului va fi aleasă astfel:

$$V = C_0 v + V_{\text{const}},$$

unde v este viteza necesară pentru o problemă componentă cu conectare aleatoare, iar V_{const} este viteza necesară pentru problemele constante permanent.

Pentru a aprecia eroarea de metodă datorită utilizării soluției staționare se poate rezolva primul sistem de ecuații cu ajutorul transformatei Laplace. Sistemul devine:

$$\begin{aligned}
&(\Lambda_0 + s)\,\pi_0(s) - M_1\,\pi_1(s) = 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\Lambda_{q-1}\pi_{q-1}(s) + (\Lambda_q + M_q + s)\,\pi_q(s) - M_{q+1}\,\pi_{q+1}(s) = 0, \qquad (7)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\Lambda_{C-1}\,\pi_{C-1}(s) + (M_c + s)\,\pi_C(s) = 0.
\end{aligned}$$

Soluția generală $P_q(t) = p_q + \sum_{i=1}^{C} A_{qi}\, e^{-\alpha_i t}$ (8)

permite a se aprecia rapiditatea cu care se atinge în timp valoarea de regim staționar.

2.2. SISTEME CU MAI MULTE CLASE DE SOLICITĂRI

Sarcinile ce se atribuie unui calculator destinat în principal pentru conducerea unui proces pot fi în general grupate și clasificate după cum urmează:

— probleme conectate permanent, cum ar fi conducerea buclelor de reglare, controlul stării agregatelor și supravegherea limitelor la parametrii principali;

— probleme cu conectarea și durata aleatoare (în ordinea urgenței), cum ar fi manevre de oprire, regimuri de avarie, calcule de demarare, stocare de date, calculul regimurilor optime din punct de vedere tehnologic, optimizări economice, deservirea mai multor canale în regim de *time-sharing*, grupate pe priorități.

Calculele privind regimurile de avarie, opririle și demararea întrerup problemele conectate permanent. Celelalte probleme sînt inferioare ca prioritate, dar se pot întrerupe într-o ordine stabilită.

În figura 2 se poate vedea atribuirea priorităților pentru toate categoriile de solicitări arătate și legăturile posibile dintre ele.

Pentru problemele conectate permanent se calculează viteza necesară conform indicațiilor din paragraful 1.

Întrucît primele trei grupe cu caracter aleator nu vor lucra niciodată simultan și la utilizarea lor se întrerup problemele cu caracter permanent, în cazul lor se poate calcula viteza necesară pentru cea mai lungă grupă

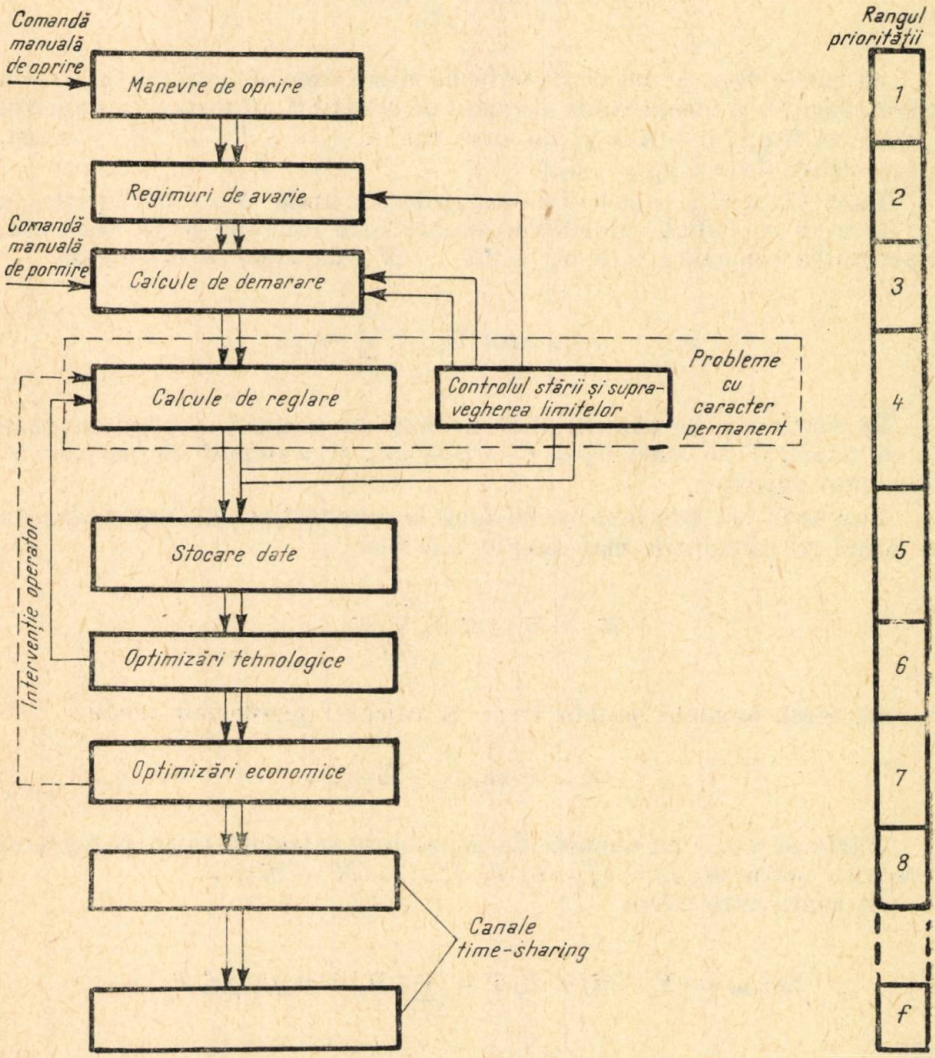


Fig. 2. — Categorii de probleme atribuite unui calculator cu funcționare în timp real.

prin aceeași formulă ca mai sus, verificînd dacă rezultatul se încadrează în viteza deja stabilită, care în caz contrar va fi majorată corespunzător.

Pentru problemele de rang 5, 6, ..., f se face o împărțire provizorie în două clase, considerînd pentru rangul 5 deservirea fără pierderi. Se scrie în acest caz sistemul de ecuații (2) din paragraful 2.1, obținînd soluțiile $p_a \dots p_c$.

Se scrie de asemenea sistemul de ecuații (5), obținînd soluțiile $p'_n \to p'_N$. Se calculează astfel

$$\overline{n} = En = \sum_{n=0}^{N} np'_n.$$

Se poate face acum abstracție de deservirea de rangul 5, scriind pentru rangul 6 și următoarele sistemul de ecuații 2′, pentru care numărul de stări va fi $q \leqslant c - \overline{n} = c_1^*$, în care caz $\Lambda_{q-1} = \lambda' M$, iar $M_{q+1} = \mu m$. Se calculează de aci $p_{1q} \ldots p_{1c_1^*}$.

Dacă $C_1^* \geqslant M_1$, se pot scrie ecuațiile 5′, unde N se înlocuiește cu M_1, iar n cu m_1, adică valorile corespunzătoare rangului 6. În acest caz, numerotarea ecuațiilor este $m_1 = 0{,}1 \ldots M_1$, de unde se calculează

$$p'_{m_1} \ldots p'_{M_1}, \text{ apoi } \overline{m}_1 = \sum_{m_1=0}^{M_1} m_1 p'_{m_1}.$$

În continuare se elimină și deservirea de rangul 6, scriind sistemul 2″, cu numărul de stări $C_2^* = C - \overline{n} - m_1$, și sistemul de ecuații 5″ și așa mai departe.

Lucrurile pot continua astfel pînă la nivelul final f. Pentru aceasta din urmă se calculează mai simplu mărimea

$$\overline{m}_f = \overline{q} - \overline{n} - \sum_{k=1}^{f-1} \overline{m}_k.$$

În acest moment putem trece la calculul pierderilor medii:

$$m_{\text{med}} = m_{\text{med}\,1} + \Sigma m_{\text{med}\,k}.$$

Mărimea $m_{\text{med}\,1}$ nu depinde de M_k și este calculată ca în paragraful precedent, adică $m_{\text{med}\,1} = \lambda''_{\text{med}}\, P_c\, T$, $\lambda''_{\text{med}} = (M - \overline{m})\,\lambda'$.

În continuare avem

$$\Sigma m_{\text{med}} = (N - \overline{n})\,\lambda'\, P_c\, T + \sum_{k=1}^{f} (M_k - m_k)\,\lambda'\, pc_k^*\, T,$$

unde

$$C_k^* = C - \overline{n} - \sum_{k} \overline{m}_{k-1}.$$

După efectuarea acestor calcule se poate scrie expresia $\alpha(c) = m_{\text{med}}(c)\,\rho_1 + C\rho_2$ și determina ca în paragraful 2, valoarea $C = C_0$ care o minimizează.

Viteza de calcul are și în acest caz expresia $V = C_0 v + V_{\text{const}}$, cu aceleași semnificații date în cazul anterior.

BIBLIOGRAFIE

1. James Martin, *Programming real-time computer systemes*, Pretice Hall, New York, Englewood Clifts, 1965.
2. T. H. Lee, G. E. Adams, W. M. Gaines, *Computer process control, modelling and optimization*, New York, John Willey, 1968.
3. M. S. Beck, M. Wainwright, *Direct Digital Control of the chemical proceses*, Control, **11**, 111—114 (1967); **12**, 115 (1968).
4. Г. П. Чугуев, В. В. Зданович, *Прогнозирование длины цикла вычислений сборник цифровое управление в системах автоматики*, „Наука", Ленинград, 1968.
5. M. Vartolomei, *Asupra bilanțului de timp al calculatorului industrial*, St. cerc. energ. electr., **19**, *1*, 217 (1969).
6. Г. П. Чугуев, *Приближенный метод вылзора выстродействия цифровой управияющей машины, сборник цифровое управление в системах автоматики*, „Наука", Ленинград, 1968.
7. Benjamin C. Kuo, *Sisteme automate cu eșantionare. Analiză și sinteză*, București, Edit. tehnică, 1967.

G. N. ALEXANDROV, V. L. IVANOV şi V. E. KIZEVETTER, *Electriceskaia procinostī narujnoi visocovoltnoi izolaţii* (Rigiditatea dielectrică a izolaţiei externe de înaltă tensiune), Leningrad, „Energhia", 1969, 237 p.

Utilizarea unor tensiuni din ce în ce mai ridicate pentru transportul energiei electrice impune necesitatea de a adînci diferite probleme privind izolaţia instalaţiilor electroenergetice de înaltă tensiune.

Lucrarea de faţă, elaborată de G. N. Alexandrov ş.a., aduce o serie de contribuţii interesante, adesea originale, cu privire la fenomenologia descărcărilor electrice în aer şi a descărcărilor superficiale, influenţa contaminării izolaţiei asupra tensiunii de conturnare, metodologia alegerii nivelului de izolaţie.

Prin modul de prezentare a problemelor tratate şi prin numeroasele date pe care le prezintă, bazate pe calcule sau pe date experimentale, lucrarea este nu numai interesantă, dar şi deosebit de utilă specialiştilor în tehnica tensiunilor înalte.

Primul capitol se referă la mecanismul dezvoltării descărcărilor în scînteie.

În prima parte a capitolului se determină relaţia de autonomie a descărcării în scînteie luîndu-se în considerare coeficientul de ionizare α, coeficientul de alipire a unui electron la o particulă neutră η, coeficientul de absorbţie a fotonilor μ şi factorul geometric q_μ, relaţia reprezentînd o contribuţie originală a unuia dintre autori, G. N. Alexandrov.

Studiindu-se în continuare descărcarea în cîmpuri uniforme la presiune atmosferică, se arată rolul important pe care îl are concentraţia locală a electronilor în producerea procesului de descărcare. Se arată că apariţia unui strimer este posibilă numai în cazul cînd numărul electronilor dintr-o avalanşă este mai mare ca 10^8. Totodată se arată că creşterea conductibilităţii canalului descărcării principale se datoreşte în mare parte ionizărilor, concluzii în concordanţă cu cercetările lui R. Rompl şi W. Weizel ca şi ale cercetărilor lui F. Heilbroner şi H. Kärner.

Detaliat şi cu multe precizări importante este expusă fenomenologia descărcărilor de lungime mare în cîmpuri neuniforme. Paralel cu prezentarea contribuţiei autorilor în acest domeniu, se arată contribuţiile lui I. S. Stekolnikov şi ale altor cercetători; totodată se dau numeroase date privind lungimea strimerului, viteza liderului, etc. Luîndu-se în considerare condiţia de producere a descărcării complete care constă în transformarea strimerului în lider, se determină relaţii de calcul care permit determinarea valorii medii de calcul a cîmpului electric de descărcare.

În capitolul al doilea se analizează fenomenologia descărcărilor superficiale în cazul izolatoarelor poluate sau umezite. Analizîndu-se condiţiile de poluare a izolatoarelor, luînd în considerare şi acţiunea vîntului, se studiază modul de producere a descărcărilor parţiale pe suprafaţa acestor izolatoare. Autorii prezintă relaţii de calcul elaborate, originale şi utile

în aplicații. Aceste relații permit determinarea rezistenței stratului depus, a intensității curentului de fugă, a energiei ce se degajă în acest caz; totodată se dau o serie de diagrame pentru analizarea fenomenologiei descărcărilor parțiale produse pe suprafața izolatoarelor poluate. Rezultatele obținute prin calcule analitice concordă suficient de bine cu cele experimentate.

Contribuții originale și interesante se aduc și în legătură cu condițiile de producere a conturnării izolatoarelor poluate. Autorii determină relații de calcul privind rezistența căii de conturnare și a tensiunii minime de conturnare.

În cadrul capitolului al treilea se studiază metodologia de cercetare a rigidității dielectrice a izolației externe.

În prima parte a capitolului se analizează forma undei pentru reprezentarea supratensiunilor interne, ajungîndu-se la concluzia că adoptarea undei de impulsie lungi, propuse de C.E.I. este mai puțin indicată. Autorii propun luarea în considerare a unor unde de tensiune oscilante, cu durata frontului pînă la 5.000 μs, însă generarea acestor unde pune probleme mai dificile.

În continuare se prezintă metodele statistice de interpretare a rezultatelor experimentale. În mod succint și concret se prezintă relațiile de calcul privind determinarea limitelor de încredere a tensiunii de descărcare, a erorii relative și absolute de calcul, a tensiunii de descărcare de 50%, a timpului de întîrziere a descărcării. Totodată se interpretează caracteristicile statistice a unor mărimi aleatoare; astfel pentru verificarea distribuției normale în cazul valorilor extreme se utilizează criteriul χ^2, metoda celor mai mici pătrate precum și metoda grafică.

În cazul tensiunii de descărcare de 50% era indicat să se analizeze recomandările C.E.I. asistîndu-se inconsistența acestor recomandări (vezi lucrările G. Drăgan și alții — sesiunea Blitzschutzkonferenz, Lugano 1967; A. Hochereiner ETZ, 1969, H2 etc.).

După ce se analizează influența instalațiilor de încercare asupra tensiunii de descărcare, se studiază în ce măsură distanța pînă la obiectele înconjurătoare; forma și poziția electrozilor determină valoarea acestei tensiuni. Rezultatele prezentate, interesante și concludente, atestă faptul că pentru tensiuni nominale superioare tensiunii de 400 kV, actualele metode de încercare trebuie în bună parte revăzute.

Concluzii interesante se referă și la influența condițiilor meteorologice asupra tensiunii de descărcare și conturnare; aceste concluzii arată că normele actuale nu mai corespund, îndeosebi în legătură cu influența umidității pentru umidități mai mari decît 11 g/m^3. De menționat că ulterior au apărut noi contribuții în privința influenței umidității (prezentare la ședința Comitetului nr. 33 al C.I.G.R.E., septembrie 1969, Sidney), de care n-a putut să se țină seama, dar care nu modifică concluziile prezentate în lucrare.

Capitolul al patrulea se referă la tensiunea de descărcare în curent continuu și curent alternativ pentru diferite distanțe dintre electrozi, corespunzător unor configurații caracteristice din instalațiile electro-energetice de înaltă tensiune; se prezintă totodată abateri medii pătratice ale tensiunii de descărcare.

În cadrul capitolului al cincilea se studiază comportarea izolației poluate la acțiunea tensiunii de frecvență industrială.

Încercările experimentale efectuate în diferite condiții au permis autorilor să deducă concluzii utile cu privire la influența intensității de poluare asupra tensiunii de conturnare sau cu privire la energia căii de conturnare. Valorile relativ mari ale dispersiei tensiunii de conturnare, precum și valorile relativ coborîte ale acestei tensiuni în cazul poluărilor interne impune necesitatea acordării unei importanțe deosebite acestei probleme. Autorii determină relații de calcul pentru tensiunea de conturnare de 50% a izolatoarelor poluate.

În capitolul al şaselea se prezintă problema comportării intervalelor de străpungere şi a izolatoarelor la acţiunea undelor de supratensiune internă. Pe baza unei bibliografii bogate se face o analiză detaliată a diferitelor aspecte ale acestei probleme, rezultatele obţinute avînd adesea un caracter inedit. Astfel, în prima parte a capitolului se studiază influenţa undei de supratensiune internă asupra tensiunii de descărcare, arătîndu-se că apare o valoare minimă a tensiunii de descărcare pentru durata frontului undei cuprinse între 100—300 μs; de asemenea se analizează variaţia dispersiei, funcţie de durata frontului undei sau de raportul dintre timpul de întîrziere de descărcare şi durata frontului.

Sînt menţionate date numeroase cu concluzii interesante în legătură cu tensiunile de descărcare în cazul liniilor aeriene (conductor-pămînt, conductor-conductor, conductor-traversa stîlpului) sau al izolaţiilor staţiilor şi aparatajului de înaltă şi de foarte înaltă tensiune (inel-inel, inel-pămînt etc.).

Rezultatele obţinute, îndeosebi pentru tensiuni foarte înalte, sînt extrem de interesante, ele impunînd modificarea în parte a actualelor concepţii în acest domeniu.

Ultima parte a capitolului se referă la caracteristicele tensiunii de conturnare a izolatoarelor sub ploaie sau poluate. O importanţă deosebită se acordă interpretării statistice a rezultatelor experimentale; în cazul instalaţiilor de foarte înaltă tensiune deoarece nivelul de izolaţie nu diferă cu mult de tensiunea nominală a reţelei, considerarea dispersiei tensiunii de conturnare prezintă o deosebită importanţă.

Capitolul al şaptelea cuprinde prezentarea bazelor metodologiei de alegere a izolaţiei reţelelor electrice de înaltă tensiune.

În introducere se prezintă criterii tehnico-economici de optimizare a izolaţiei conform normelor sovietice; această problemă se poate analiza şi pe baza matematicii statistice (vezi G. Carrara şi alţii; CIGRE, 1966. R. 421) însă pentru aceasta trebuie să se dispună de o cantitate suficientă de informaţie privind caracteristicele statistice ale mărimilor aleatoare, considerate.

Pe baza analizei statistice a rezultatelor experimentale, autorii studiază proprietăţile dielectrice ale izolaţiei instalaţiilor electroenergetice, pentru fiecare izolaţie în parte; totodată se determină caracteristicile statistice în cazul izolaţiilor în paralel. În continuare pe baza teoriei probabilităţii şi a matematicii statistice se determină numărul probabil de deconectări a liniei.

Luîndu-se în considerare influenţa a o serie de parametri ca intensitatea poluării, gradul de umezire, intensitatea vîntului, se deduc relaţii concrete de calcul privind tensiunea de conturnare a izolaţiei în condiţiile normale de funcţionare; deoarece se presupune o repartiţie normală, rezolvarea relaţiilor deduse nu reprezintă dificultăţi deosebite. Autorii studiază influenţa descărcătorului cu rezistenţă variabilă asupra probabilităţii de conturnare a izolaţiei şi asupra numărului probabil de deconectări.

În ultima parte a acestui capitol se studiază alegerea izolaţiei liniei pentru asigurarea unei bune funcţionări în regim normal, precum şi în cazul supratensiunii lor; alegerea izolaţiei se face pe baze tehnice-economice, precum şi pe baza teoriei matematicii statistice. Datele obţinute, îndeosebi pentru tensiunile de 1000, 1.250 şi 1.500 kV prezintă un deosebit interes.

Datele prezentate de autori sînt în bună parte în concordanţă cu unele cercetări (Dillard, I. K. Whats Ahead in Transmission Systems, I.E.E.E. Inter. Conv. martie 1964) diferind în parte de rezultatele obţinute de alte cercetări (Hileman, A.R.s.a. CIGRE, 1968, R 25-06); o concordanţă bună pentru aceste date este dificil de obţinut pentru tensiuni de 1.100—1.500 kV.

De menţionat că majoritatea problemelor tratate în capitolul al şaptelea reprezintă contribuţii ale autorilor şi îndeosebi ale lui G. N. Alexandrov, care are numeroase lucrări în acest domeniu. De altfel şi în cadrul celorlalte capitole se prezintă multe dintre contribuţii originale ale autorilor.

În lucrare se dau numeroase diagrame și tabele, multe dintre ele avînd un caracter inedit. Bibliografia consultată este bogată (cca. 200 de lucrări); o bună parte din lucrările citate sînt elaborate de autori.

Lucrarea se caracterizează printr-o înaltă ținută științifică și prin faptul că este la zi în ceea ce privește lucrările publicate în domeniul tratat.

În concluzie, prin modul științific de abordare a problemei alegerii nivelului de izolație a instalațiilor electro-energetice de înaltă și foarte înaltă tensiune, precum și prin numeroase date pe care le cuprinde, lucrarea este valoroasă și prezintă un deosebit interes pentru specialiștii în tehnica tensiunilor înalte.

G. Drăgan

Rezumatele articolelor apărute în „Revue Roumaine des sciences tehniqués", Série electrotechnique et énergétique, Tom. 14, No. 3, 1970.

R. RĂDULEȚ, AL. TIMOTIN, A. ȚUGULEA

621.315.09.017.21

Cîmpul electromagnetic al liniilor electrice cu pierderi

Cîmpul electromagnetic al liniilor electrice cu pierderi prin efect pelicular și de proximitate, în conductoare și în sol, și prin efecte de relaxație neomogenă în dielectricul slab conductor (dar liniar) este studiat pe baza unui model anisotrop, care permite demonstrarea unicității soluțiilor ecuațiilor cîmpurilor transversale și demonstrarea existenței ecuațiilor de propagare. Ultimele sînt în general ecuații cu parametri tranzitorii stabilite de autori în alte lucrări.

I. R. CIRIC

517.512

Funcții Green ale operatorului lui Laplace pentru probleme Neumann interioare

Pentru construirea funcției Green, definită sub forma fie a unei expresii unice în domeniul considerat, fie a două expresii valabile fiecare într-unul din cele două subdomenii în care se împarte acest domeniu se caută în primul rînd o funcție particulară care să asigure satisfacerea condițiilor neomogene cel puțin pe anumite porțiuni ale frontierei; diferența dintre funcția Green și această funcție particulară va satisface condiții de frontieră omogene, ceea ce permite utilizarea metodei funcțiilor proprii.

Ilustrarea metodei prezentate se face pentru cazul particular al domeniului plan (bidimensional) în formă de dreptunghi.

C. NEMOIANU, N. CRISTEA

621.3.011.1

Rezistența tranzitorie de strictiune la cuplarea contactului liniar

Se determină expresiile analitice ale rezistenței tranzitorii de strictiune ale unui contact liniar format între două corpuri conductoare, folosind soluțiile problemei plan-paralele de cîmp electromagnetic dintr-o secțiune transversală a contactului.

Se prezintă valorile numerice ale rezistenței tranzitorii de strictiune universale, definită adimensional, în funcție de timpul generalizat și de un parametru, care indică raportul dintre lățimea reală a contactului și lățimea sa geometrică.

C. I. MOCANU

631.3.014.12.011.6

Parametrii locali de timp ai fenomenelor de difuzie

În lucrare se definesc principalii parametri de timp care permit evaluarea duratei proceselor tranzitorii de difuzie volumetrică şi normală. Se calculează timpul de răspuns tranzitoriu al difuziei pentru diferite forme geometrice ale domeniului în care are loc difuzia: placa, cînd pe una dintre feţe sau pe ambele feţe se aplică excitaţia treaptă; cilindru; tub cilindric, cînd pe faţa interioară, pe faţa exterioară sau pe ambele feţe se aplică excitaţia treaptă; cavitatea cilindrică circulară; sfera plină şi coaja sferică.

C. I. MOCANU

631.3.014.12.011.6

Problema tridimensională a regimului tranzitoriu a difuziei normale

În regim tranzitoriu de difuzie normală, mărimile scalare şi vectoriale difuzează parţial în vecinătatea suprafeţei domeniului pe o adîncime de pătrundere de ordinul celei mai mici dintre razele principale de curbură pozitivă. Într-o lucrare anterioara s-a rezolvat ecuaţia difuziei normale pentru problema plan paralelă şi pentru două cazuri-limită ale problemei tridimensionale. În această lucrare se integrează ecuaţia difuziei în cazul general, raportînd fenomenele la un sistem de coordonate intrinsec ataşat elipsoidului fundamental de curbură.

G. DRĂGAN, D. CRISTESCU, N. GOLOVANOV

621.3.015.1

Asupra repartiţei tensiunii de-a lungul unui circuit *R-C* cu capacităţi variabile

Se determină relaţii teoretice de calcul privind repartiţia tensiunii de-a lungul unui circuit *R-C* cu capacităţi transversale şi longitudinale în ipoteza că circuitul este neomogen, valoarea variind liniar cu distanţa.

Metoda de calcul determinată poate fi aplicată la lanţurile de izolatoare poluate, la divizoare de tensiune mixte etc.

C. FLUERAŞU

538.3

Formarea electromagnetică a unui conductor tubular

Se studiază formarea electromagnetică a unui conductor tubular pe baza unui model teoretic în care se iau în considerare efectul pelicular tranzitoriu, tensiunea electromotoare de mişcare şi proprietăţile plastice dinamice ale materialului.

Sistemul de ecuaţii obţinut este rezolvat cu ajutorul unui calculator analogic. Rezultatele sînt comparate cu cele obţinute pe o instalaţie experimentală de formare electromagnetică de 1280 J, realizată de autor.

A. TIMOTIN, A. NICOLAE

621.313

Asupra repartiţiei cîmpului magnetic axial la suprafaţa dinţilor de la extremitatea statorului

Se determină repartiţia inducţiei magnetice la suprafaţa frontală, fără ecran, a statorului unui turboalternator, utilizînd transformarea conformă. Se prezintă de asemenea o metodă pentru a corecta aproximaţia făcută, înlocuind cîmpul magnetic cu simetrie cilindrică printr-un cîmp plan paralel.

A. MORARU, C. V. BĂLĂ

621.314.2.013.5.001.57

Model electrocinetic pentru studiul cîmpului magnetic de dispersie din transformatoare cu cuva ecranată

Se examinează condiţiile în care se poate modela cîmpul electromagnetic cvasistaţionar în prezenţa mediilor conductoare prin cîmpuri electrocinetice, stabilind relaţiile de corespondenţă necesare.

Se prezintă modelul electrocinetic construit pe aceste principii pentru studiul cîmpului de dispersie şi al curenţilor de inducţie din transformatoarele cu cuvă ecranată, precum şi principalele studii efectuate cu acest model.

Se examinează pe scurt erorile metodei de modelare adoptate şi se trag concluzii.

MIHAIL VASILIU

538.551.3

Asupra răspunsului periodic permanent la semnale sinusoidale pe porţiuni

Se prezintă aspectele particulare ale determinării răspunsului de regim periodic permanent al sistemelor liniare cu parametrii invariabili în timp, caracterizate prin funcţii de transfer strict stabile la semnale de intrare periodice, descrise în cuprinsul unei perioade printr-un fragment de sinusoidă. Metoda utilizată, propusă în [1], este o metodă de calcul operaţional bazată pe funcţii de transfer.

Se tratează şi se prezintă în formă strînsă expresiile analitice ale răspunsului periodic permanent al sistemelor liniare cu parametrii concentraţi, de ordinul unu şi doi, la semnale sinusoidale pe porţiuni.

V. V. GHIA

536.46

Asupra determinării factorului total de emisie al flăcării după metoda Schmidt

Se stabileşte influenţa factorului total de emisie al peretelui incandescent al focarului asupra factorului de emisie al flăcării determinat după metoda Schmidt.

M. BERCOVICI, AL. SZMUK

621.301.25

Model matematic pentru stabilirea structurii şi a cheltuielilor unui program de perspectivă pentru energie nucleară

Se prezintă un model matematic pentru calculul structurii şi cheltuielilor unui sistem de centrale nucleare şi de industrii de combustibil nuclear în cadrul unui program de perspectivă.

Modelul permite, cu ajutorul unui ordonator, un calcul cu numeroase variante şi alegerea unei variante optime în baza unei funcţii de cheltuieli luate ca un criteriu.

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI:

Revista „Studii și cercetări de energetică și electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile: energetică generală, electroenergetică și electrotehnică, termoenergetică și termotehnică — sub formă de articole, comunicări sau note. Revista mai cuprinde și rubricile: discuții, recenzii, informații și altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări științifice și tehnice.

1. Structura lucrării.

a) Introducerea va situa lucrarea pe fondul cunoștințelor actuale, va desemna obiectivele și indica metodele utilizate;

b) Tratarea (despărțită pe subcapitole, numerotate după clasificarea zecimală) va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate și va discuta rezultate, erorile, posibilitățile și comoditatea aplicării;

c) Concluziile vor sintetiza rezultatele obținute, limita lor de valabilitate și aplicațiile posibile.

2. Forma lucrării.

a) Lucrările se predau în 3 exemplare dactilografiate la două rînduri (2 000 semne de pagină), inclusiv exemplarul original fără corecturi, intervenții.

b) Se vor anexa:

Bibliografia după standardele în vigoare; desenele pe calc și tuș, însoțite de cîte două copii și o listă a titlurilor figurilor; un rezumat de cinci, șase rînduri, rezumatele în limba română, și la alegere în una din limbile engleză, franceză, germană sau rusă.

d) Volumul lucrării să nu depășească circa 15 pagini.

Se primesc numai lucrări originale.

★

Manuscrisels trimit Comitetului de redacție: București, Șos. Vitan nr. 236, sectorul 2.

M. ELEFTERESCU

621.09

CONSIDERAȚII PRIVIND ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE PRIMARĂ

Se prezintă unele considerații privind stabilirea variantei de acoperire a necesarului de energie primară al țării; se subliniază necesitatea de a lua în considerare influența pe care luarea deciziilor în sectorul energetic o are asupra activității altor sectoare ale economiei naționale.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 501—514, 1970.

V. CARACUDOVICI, S. MANEA, G. PANAITESCU, G. TROIA, M. WEISS

620.9

CONTRIBUȚII LA ÎMBUNĂTĂȚIREA CALITĂȚII PROGNOZELOR CONSUMULUI DE ENERGIE DIN INDUSTRIE

Se analizează posibilitatea determinării cu metode globale a necesarului viitor de energie al unei ramuri industriale pentru produsele pentru care nu se cunoaște evoluția consumului specific sau producția în unități naturale și deci metoda analitică nu poate fi aplicată. Se dau relațiile matematice care se pot folosi în acest scop și se aplică pe un caz concret.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 515—524, 1970.

C. COROIU

662.611

CERCETĂRI TERMOGRAVIMETRICE PRIVIND ARDEREA STERILULUI DE MINĂ DE LA EXPLOATĂRILE CARBONIFERE DIN VALEA JIULUI

În lucrare se prezintă principalele caracteristici fizico-chimice și tehnice ale sterilului de mină de la exploatările carbonifere Lupeni și Anina, care recomandă aceste materiale (în prezent neutilizate) pentru folosirea în scopuri energetice și tehnologice.

În continuare se studiază atît teoretic, cît și experimental procesul de ardere a acestor materiale, utilizînd ca metodă de investigație metoda termogravimetrică (aplicată pentru prima oară în țara noastră în acest scop), care a permis determinarea principalilor parametri ai procesului de ardere și dinamica acestora în timpul arderii.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 525—539, 1970.

C. HAIDUC, V. VINIȚCHI

532.5.536.423.1

FLUXUL TERMIC CRITIC ÎN CONDIȚII DE REACTOR NUCLEAR FIERBĂTOR

Se dau rezultatele cercetărilor efectuate pentru determinarea fluxurilor termice critice q_{cr} și asupra transferului de căldură la fierberea apei pe elemente de combustibil nuclear cilindrice în condiții de circulație naturală. S-au cercetat influența unghiului de înclinație a elementului asupra transferului de căldură și fenomenul de histerezis la fierbere. Pentru determinarea fluxului critic s-a obținut o nouă ecuație criterială valabilă în domeniul de presiuni $1 \leqslant p < 225$ ata, care conține un criteriu $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$, introdus în această lucrare. Rezultatele obținute cu această ecuație și cu ecuații ale altor autori sînt comparate cu datele experimentale.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 541—553, 1970.

V. PIMSNER, ST. ȘTEFAN

621.515

INFLUENȚA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ASUPRA CARACTERISTICII UNIVERSALE A COMPRESORULUI CENTRIFUG

Din analiza metodelor de calcul a caracteristicii universale a compresorului centrifug rezultă posibilitatea exprimării analitice a influenței parametrilor funcționali la diverse regimuri de funcționare. Se constată însă că datele din literatură nu pot reda satisfăcător influența arhitecturii interioare a compresorului, exprimată prin coeficienți experimentali. Întrucît soluția constructivă este practic aceeași la o familie de compresoare, în lucrare se determină, pe baza datelor obținute experimental, expresia analitică a caracteristicii universale a unor compresoare centrifuge, larg utilizate în țară la supraalimentarea motoarelor diesel, constatîndu-se o bună precizie în exploatarea datelor pe compresoare de aceeași familie constructivă.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 555—565, 1970.

B. POPA

621.694

DISTRIBUȚIA PRESIUNII ÎN INJECTOARELE CU CAMERĂ DE TURBIONARE. INFLUENȚA RAPORTULUI $z.f_i/d_c^2$. ROLUL FRECĂRII

Cunoașterea cîmpului real de presiune stabilizat în injectoarele cu cameră de turbionare oferă posibilitatea determinării căderii de presiune prin orificiile tangențiale și poate servi la determinarea diametrului turbionului de aer în apropierea plăcii frontale a camerei. De asemenea această presiune statică modifică procesul de retur.

Dintre factorii care influențează distribuția presiunii, în lucrare se studiază influența raportului secțiunilor orificiilor tangențiale la pătratul diametrului camerei injectorului.

Totodată se pune în evidență rolul frecării, care modifică distribuția presiunii pe placa frontală a camerei.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 567—582, 1970.

C. A. VASILESCU, I. ȘTEFAN

621.43

ÎMBUNĂTĂȚIREA PERFORMANȚELOR MOTOARELOR DE AUTOVEHICUL FUNCȚIONÎND LA ALTITUDINI VARIABILE PRIN CORECTAREA AVANSULUI LA DECLANȘAREA SCÎNTEII ELECTRICE

În lucrare se arată că restabilirea duratei arderii la motoarele montate pe autovehicule care funcționează pe drumuri cu denivelări de altitudine se poate face, în parte, prin mărirea avansului la declanșarea scînteii electrice cu altitudinea. În același timp, dispozitivele automate uzuale tind să scadă valoarea avansului la declanșarea scînteii electrice, astfel că se impune un dispozitiv automat, brevetat de autori, care să preia funcția corectării avansului cu altitudinea.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 583—590, 1970.

I. R. CIRIC

517.9 : 621.31

EXPRESII GENERALE ALE POTENȚIALULUI VECTOR PENTRU CÎMPURILE MAGNETICE CVASISTAȚIONARE CU SIMETRIE AXIALĂ

În ecuația vectorială de tip Helmholtz satisfăcută de potențialul vector al cîmpului magnetic cvasistaționar cu simetrie axială din interiorul conductoarelor în regim permanent sinusoidal, variabilele se separă în aceleași condiții ca în ecuația scalară Helmholtz, prin urmare în următoarele sisteme de coordonate curbilinii ortogonale de rotație: cilindrice, sferice, ale sferoidului alungit, ale sferoidului turtit și parabolice. Ca și în cazul ecuației scalare Laplace, prin efectuarea unor transformări de funcțiune corespunzătoare, în ecuația vectorială de tip Laplace satisfăcută de potențialul vector din exteriorul conductoarelor variabilele se pot separa, în plus față de cazul ecuației de tip Helmholtz, atît în coordonate toroidale, cît și în coordonate bisferice.

În lucrare se obțin expresii generale ale potențialului vector atît pentru interiorul conductoarelor și pentru exteriorul lor, în principalele sisteme de coordonate curbilinii ortogonale de rotație.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 591—613, 1970.

C. DINCULESCU, D. CRISTESCU

621.3.015.3: 621.3.05

ASUPRA FORMEI SUPRATENSIUNILOR ATMOSFERICE PE LINIILE DE ÎNALTĂ TENSIUNE

Solicitarea aparatajului din instalaţiile de distribuţie la supratensiuni de origine atmosferică este în mod esenţial influenţată de fenomenele care au loc în lungul liniilor de înaltă şi de foarte înaltă tensiune racordate la barele colectoare.

Se determină variaţia tensiunii în vîrful stîlpului sau undeva în deschidere în funcţie de locul loviturii de trăsnet, de rezistenţa de pămîntare a suporţilor şi de panta undei de trăsnet. Analiza teoretică şi determinările experimentale efectuate ţin seama de influenţa inductivităţii stîlpilor, de poziţia deschiderii liniei în lungul traseului etc.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 615—632, 1970.

A. NICOLAIDE, E. DÎMBOIU

621.313.39.025.3

CALCULUL INDUCTANŢELOR ÎNFĂŞURĂRILOR DE CURENT ALTERNATIV PLANE

Maşinile electrice liniare de diferite tipuri: maşini asincrone, pompe electromagnetice plane etc., sînt prevăzute cu înfăşurări plane. Acestea derivă din înfăşurările cilindrice clasice, dar au particularităţi care le deosebesc de acelea în mod sensibil. Deosebirea constă, în esenţă, în aceea că inductanţele au în general valori diferite pe diferitele faze, datorită circuitului magnetic întrerupt. De aceea aceste înfăşurări introduc nesimetrii care pot fi importante. Prezintă interes în special înfăşurările trifazate. Această problemă, care nu a fost analizată în literatură, este examinată în lucrarea de faţă şi se trag concluzii referitoare la tipurile de înfăşurare cele mai convenabile din punctul de vedere ale comportării maşinii.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 633—654, 1970.

I. FETIŢĂ

621.316.35: 621.3.011.1

MODELAREA UNUI SISTEM DE BARE COLECTOARE ÎN VEDEREA DETERMINĂRII PARAMETRILOR LINEICI R^*, L^*, C^*

Se prezintă o reţea RC pe care se poate modela cîmpul magnetic şi cel electric al unui sistem de bare paralele şi masive parcurse de curenţi, în vederea determinării mărimilor parametrilor lineici R^*, L^*, C^* şi a forţelor electrodinamice. Sînt prezentate de asemenea unele rezultate experimentale.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 655—666, 1970.

M. POMÂRLEANU

621.316.11

DETERMINAREA REGIMURILOR STAŢIONARE ALE SISTEMELOR ELECTROENERGETICE PE O CALE ITERATIVĂ PUTERNIC CONVERGENTĂ

Lucrarea prezintă o metodă de calcul a regimurilor staţionare a sistemelor electroenergetice, care printr-o transformare prealabilă a matricei admitanţelor nodale asigură o convergenţă rapidă procesului iterativ. Această transformare prealabilă a matricei coeficienţilor este în acelaşi timp utilă şi pentru alte calcule cum ar fi calculul curenţilor de scurtcircuit sau calcule de stabilitate.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 667—[illegible]

EMIL MICU

621.323: 621.316.726

STABILITATEA MOTORULUI SINCRON LA VARIAȚIA FRECVENȚEI

În lucrare se calculează funcția de transfer a motorului sincron, luînd ca mărime de intrare variația frecvenței, iar ca mărime de ieșire variația unghiului de sarcină în ipoteza tensiunilor de alimentare simetrice și sinusoidale. Cu ajutorul funcției de transfer obținute se calculează caracteristicile de frecvență și se analizează stabilitatea motorului, aplicînd criteriul lui Nyquist. Se dă schema logică a programului de calcul al limitei stabilității pe calculatorul electronic și se determină influența parametrilor sistemului asupra stabilității mașinii în cazul variației frecvenței la ieșirea invertorului cu tiristoare.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 677—692, 1970.

V. M. POPOV

517.9: 621.316.7

CÎTEVA NOȚIUNI GENERALE DE STABILITATE DE INTERES SPECIAL ÎN TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

Se extinde noțiunea de hiperstabilitate, definind-o pentru sisteme generale despre care se presupune doar un minim de condiții restrictive. Se pune în evidență legătura strînsă dintre hiperstabilitate și stabilitatea în sensul „indice mărginit-ieșire mărginită", care este interpretată drept noțiunea centrală de stabilitate întrucît este prezentă (implicit) în orice studiu de stabilitate pentru sistemele automate.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 693—711, 1970.

S. GHEȚARU

517.9.621.316.7

STABILITATEA UNOR SISTEME DISCRETE CU NELINIARITĂȚI DE FORMĂ PARTICULARĂ

Se obțin criterii de stabilitate absolută mai largi pentru sistemele de reglare automată. Se utilizează în acest scop mijloacele teoriei hiperstabilității, extinse la blocurile anticipative (noncauzale). Rezultatele obținute sînt aplicabile unor sisteme a căror parte neliniară prezintă anumite particularități.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, r. 3, p. 713—735, 1970.

M. VARTOLOMEI

681.142: 62.011.56

ASUPRA DETERMINĂRII VITEZEI UNUI CALCULATOR PENTRU FUNCȚIONAREA ÎN TIMP REAL

În lucrare sînt expuse principalele aspecte privind dimensionarea echipamentelor de calcul în timp real din punctul de vedere al vitezei de lucru.

Pentru problemele enunțate se expun metode de rezolvare într-o prezentare unitară. Au fost elaborate extinderi pentru cazuri mai generale care pot interveni la sisteme cu structuri complexe de prelucrare a informației.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 737—747, 1970.

M. ELEFTERESCU

621.09

CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉTABLISSEMENT DU NÉCESSAIRE D'ÉNERGIE PRIMAIRE

On présente quelques considérations sur l'établissement de la variante qui assure la couverture du nécessaire d'énergie primaire du pays. On met en évidence la nécessité de prendre en considération l'interdépendance de la prise des décisions dans le secteur énergétique et l'activité des autres secteurs de l'économie nationale.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 501—514, 1970.

V. CARACUDOVICI, S. MANEA, G. PANAITESCU, G. TROIA, M. WEISS

620.9

CONTRIBUTION À L'AMÉLIORATION DE LA QUALITÉ DES PRÉVISIONS DE LA CONSOMMATION D'ÉNERGIE DANS L'INDUSTRIE

On analyse la possibilité de la détermination, à l'aide des méthodes globales, du prochain nécessaire d'énergie d'un secteur industriel, pour les produits dont on ne connaît pas l'évolution de la consommation spécifique ou de la production en unités naturelles, et où, donc, la méthode analytique ne saurait être appliquée.

On donne les relations mathématiques qui peuvent être utilisées à cet effet, et on les applique dans un cas concret.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 515—524, 1970.

C. COROIU

662.611

RECHERCHES THERMOGRAVIMÉTRIQUES CONCERNANT LA COMBUSTION DU STÉRILE DE MINE DE L'EXPLOITATION CARBONIFÈRE DE LA VALLÉE DE JIU

On présente les principales caractéristiques physiques, chimiques et techniques du stérile de mine de l'exploitation carbonifère de Lupeni et Anina. Ces caractéristiques indiquent la possibilité d'employer le stérile n'ayant pas d'autres utilisations à des fins énergétiques et technologiques.

On étudie le processus de combustion, du point de vue théorique et expérimental, en utilisant comme méthode d'investigation, la méthode thermogravimétrique (appliquée pour la première fois dans notre pays, dans ce but), qui a permis la détermination des principaux paramètres du processus de combustion, ainsi que leur dynamique pendant la combustion.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 525—539, 1970.

C. HAIDUC, V. VINIȚCHI

532.5.536.423.1

LE FLUX THERMIQUE CRITIQUE À L'ÉBULLITION DE L'EAU DANS DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES À CIRCULATION NATURELLE

On donne les résultats des recherches concernant la détermination du flux thermique critique q_{cr} ainsi aussi que le transfert de chaleur à l'eau bouillante sur des éléments de combustible nucléaire dans des conditions de circulation naturelle. On met en évidence l'influence de l'angle d'inclinaison de l'élément sur le transfert de chaleur et on analyse le phénomène de hystérésis constaté. Pour la détermination du flux thermique critique, on obtient une nouvelle équation critérielle, valable dans le domaine de pressions $1 \leqslant p < 225$ ata et qui contient un critérium $\left(\frac{\mu}{\mu''}\right)^{0,5}$, introduit dans cet ouvrage. Les résultats obtenus par cette équation, ainsi que les resultats obtenus par d'autres équations, sont comparés aux données expérimentales.

St. cerc. energ. electr., tom. 20 nr. 3, p. 541—553, 1970.

V. PIMSNER, ST. ȘTEFAN

621.515

EINFLUSS DER BETRIEBSPARAMETER AUF DIE UNIVERSAL-CHARAKTERISTIK DES ZENTRIFUGALKOMPRESSORS

Aus der Analyse der Berechnungsmethoden der Universalcharakteristiken des Zentrifugalkompressors ergibt sich die analytische Ausdrucksmöglichkeit der Betriebsparameter für verschiedene Betriebsregime. Es wird aber festgestellt, daß die Literaturdaten den Einfluß der Innenarchitektur des Kompressors in Versuchskoeffizienten ausgedrückt ungenügend berücksichtigen. Da die konstructive Lösung für eine Kompressorreihe praktisch dieselbe ist, wird auf Grund der Versuchsdaten der analytische universelle Ausdruck für Zentrifugalkompressoren bestimmt. Der Ausdruck wurde für die in Rumänien üblichen, zwecks Aufladung der Dieselmotoren gebauten Kompressoren bestimmt; wobei sich eine gute Übereinstimmung für die Kompressorreihe ergab.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 555—565, 1970.

B. POPA

621.694

DIE DRUCKVERTEILUNG IN DER WIRBELKAMMER VON DRALLZERSTÄUBERN. DER EINFLUSS DES VERHÄLTNISSES $z.f_i/d_e^2$. DIE ROLLE DER REIBUNG

Die genaue Kenntnis des reellen Druckfeldes aus der Wirbelkammer von Drallzerstäubern bietet die Möglichkeit der Bestimmung des durch die tangentialen Eintrittsöffnungen realisierten Druckgefälles und ermöglicht die Festsetzung des Luftkerndurchmessers in der Nähe der Rückwand. Dieser statische Druck beeinflußt auch den Rücklauf prozeß.

Unter den Faktoren die die Druckverteilung beeinflussen, wird in der Arbeit der Einfluß des Verhältnisses $z.f_i/d_e^2$ studiert. Es wird die Rolle der Reibung, die die Druckverteilung der Flüssigkeit in der Drallkammer verändern kann, hervorgehoben.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 567—582, 1970.

C. A. VASILESCU, I. ȘTEFAN

621.43

AMÉLIORATION DES PERFORMANCES DES MOTEURS D'AUTOMOBILE FONCTIONNANT À DES ALTITUDES VARIABLES, PAR LA CORRECTION DE L'AVANCE AU DÉCLENCHEMENT DE L'ÉTINCELLE ÉLECTRIQUE

On montre que le rétablissement partiel de la durée de la combustion dans le cylindre des moteurs qui équipent les automobiles utilisées sur des routes à grande différence d'altidude peut être réalisé, en partie, par l'augmentation avec l'altitude de l'avance au déclenchement de l'étincelle électrique.

En même temps, les dispositifs automatiques usuels tendent à diminuer la valeur de l'avance, de sorte que s'impose la présence d'un dispositif, breveté par les auteurs, qui assure la correction de l'avance en altitude.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 583—590, 1970.

I. R. CIRIC

517.9 : 621.31

GENERAL EXPRESSIONS OF THE VECTOR POTENTIAL FOR AXIALLY SYMETRIC QUASI-STATIONARY MAGNETIC FIELDS

In the Helmholtz vectorial equation verified by the vector potential of the quasi-stationary magnetic field with axial symmetry inside conductors, in sinusoidal continuous regime, the variables are separated in the same conditions as well as in the Helmholtz scalar equation, therefore in the following curvilinear orthogonal coordinate systems of rotation: cylindrical, spherical, prolate spheroidal, oblate spheroidal and parabolic. As in the case of Laplace scalar equation by performing some appropiate function transformations, as in the Laplace vectorial equation satisfied by the vector potential outside the conductors the variables can be also separated in this case for toroidal and bispherical coordinates.

The author obtains general expressions of the vector potential for inside and outside the conductors, in the main curvilinear orthogonal coordinate systems of rotation.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 591—613, 1970.

C. DINCULESCU, D. CRISTESCU

LA FORME DES SURTENSIONS ATMOSPHÉRIQUES SUR LES LIGNES DE HAUTE TENSION

La sollicitation de l'appareillage des installations de distribution aux surtensions atmosphériques est essentiellement influencée par les phénomènes qui ont lieu au long des lignes de haute et très haute tension.

On détermine la variation de la tension au sommet du support, ou quelque part entre deux supports, en fonction du lieu où tombe la foudre, de la résistance de l'enfoncement des supports, de la pente de l'onde de la foudre. L'analyse théorique et les déterminations expérimentales effectuées prennent en considération l'influence de l'inductivité du support, la position du lieu touché par la foudre au long du tracé, etc.

Les résultats obtenus peuvent être appliqués dans la protection des installations de distribution contre les surtensions, et pour une détermination plus adéquate des niveaux d'isolement pour les lignes de transport.

St. cerc. energ. electr., tom. 20. nr. 3, p. 615—632, 1970.

A. NICOLAIDE, E. DÎMBOIU

621.313.39.025.3

THE CALCULUS OF THE INDUCTANCES OF THE PLANE ALTERNATING CURRENT WINDINGS

The linear electrical machines of different types e.g. asynchronous machines, electromagnetic pumps, etc. are equipped with plane windings. These derive from the classic cylindric windings, but they have some particularities which differentiate them from the previous ones in a significant manner.

The difference consists essentially in the fact that the inductances have generally different values on the different phases because the magnetic circuit is interrupted. Therefore these windings introduce asymmetries wich may be important.

An special importance have the triphase windings. This problem which has not been yet analysed in the literature is examinated in the present paper, and conclusions relative to the most convenient winding types, from the point of view of the machine behaviour, are drawn, by using a method for the calculus of the self and mutual inductances, which is not known in the literature.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 633—654, 1970.

М. ПОМЫРЛЯНУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МОЩНО КОНВЕРГЕНТНЫМ ИТЕРАТИВНЫМ МЕТОДОМ

Дается метод вычисления стационарных режимов электроэнергетических систем, обеспечивающий мощную конвергенцию итеративного процесса, благодаря предварительному преобразованию матрицы адмитансов. Это предварительное преобразование матрицы коэффициентов используется и в других целях, как например, вычисление токов, короткого замыкания или вычисление устойчивости систем.

St. ccer. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 667—675, 1970.

I. FETIȚĂ

MODELLIERUNG EINES SAMMELSCHIENENSYSTEMS ZWECKS BESTIMMUNG DER LINEARPARAMETER R^* L^* C^*

Es wird ein *RC*-Netz vorgestellt, auf welches das magnetische sowie das elektrische Feld eines von Strömen durchflossenen Massiv-Parallelschienen-Systems zwecks Bestimmung der Linearparameter R^*, L^*, C^* und der elektrodynamischen Kräfte nachgebildet werden können. Ebenfalls werden einige Versuchergebnisse angegeben.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 655—666, 1970.

EM. MICU

STABILITY OF THE SYNCHRONOUS MOTOR AT FREQUENCY VARIATION

In the hypothesis of sinusoidal balanced applied voltage, the author calculated the transfer function of synchronous motor necessary for the stability analysis for variable frequency operation of synchronous machines. The theory of small displacements is used. The frequency variation is taken as input and the rotar angle variation as output. A study of the stability of the synchronous motor at frequency variation is performed by applying the Nyquist stability criterion. The paper also describes a digital computer programme which enables the computation of dynamic stability limits at frequency variation. The computation results illustrate the effect on machine stability of changes in different system parameters.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 677—692, 1970.

V. M. POPOV

621.5.15

SOME GENERAL STABILITY NOTIONS OF SPECIAL INTEREST CONCERNING THE CONTROL SYSTEMS THEORY

The hyperstability notion being defined for general systems which are supposed to have but a minimum of restrictive conditions is developed. The close connection between hyperstability and stability in the sense of ,,bounded index-bounded output'' which is interpreted as stability central notion for its being involved in any stability study for control systems is outlined.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 693—711, 1970.

S. GHEȚARU

517.9: 621.316.7

STABILITY CRITERION FOR PARTICULAR CLASSES OF NONLINEAR, DISCRETE SYSTEMS

The main purpose of this paper is to obtain broader criteria for absolute stability of control systems. The theory of hyperstable blocks extended to discrete noncausal blocks is used. The results are applicable to particular classes of nonlinear systems.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 713—735, 1970.

M. VARTOLOMEI

681.142: 62.011.56

SOME CONSIDERATIONS OF THE SPEED OF A REAL TIME COMPUTER

This paper presents the main aspects concerning the size of the digital computers in real time from the point of view of the working speed.

Some practical methods for solving the problems are presented.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 3, p. 737—747, 1970.

1970 NOV 12

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări**, 1968, 300 p., 22 lei.

M. BRAŞOVAN, E. SERACIN, **Metode noi de proiectare a acţionărilor electrice**, 1968, 238 p., 11 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, **Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă**, 1968, 312 p., 15 lei.

V. V. GHIA, **Recirculaţia gazelor la cuptoare**, 1968, 336 p., 29 lei.

P. DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 627 p., 44 lei.

GH. CARTIANU, **Modulaţia de frecvenţă**, 1966, 693 p., 44 lei.

V. M. POPOV, **Hiperstabilitatea sistemelor automate**, 1966, 304 p., 16 lei.

AL. NICA, **Sisteme de lubrifiaţie**, 1967, 262 p., 14,50 lei.

GH. VASILCA, OLGA BIŢĂ, **Procese de lubrifiaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice**, 1967, 416 p., 29 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, 1968, 362 p., 24 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 238 p., 16,50 lei.

D. F. LĂZĂROIU, **Maşini electrice cu inerţie redusă**, 1969, 472 p., 29 lei.

D. GRECOV, I. IORDACHE, N. ANTONESCU, **Arderea combustibililor gazoşi**, 1969, 268 p., 22 lei.

CONSTANTIN ŞORA, **Introducere în studiul generatorului Hall**, 1969, 310 p., 18,50 lei.

I. CARABOGDAN, N. PĂNOIU, **Bazele teoretice ale aprinderii şi arderii combustibilior solizi**, 1969, 288 p., 24 lei.

I. P. „Informaţia" c. 8517

43 821

Lei 40.—

F1736

REFERÁLVA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

4

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 757—978, Bucureşti, 1970

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil*;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. AVRAMESCU;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Dr. ing. V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. G. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
Prof. ȘT. GHEORGHIU;
Prof. C. APETREI;
Ing. CS. NAGY;
Dr. ing. V. PIMSNER;
Dr. ing. C. A. VASILESCU;
Dr. ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție.*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 160 de lei pe an.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la „Intreprinderea de comerț exterior — LIBRI", Căsuța poștală 134—135 (Calea Victoriei 126), București, România sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: BUCUREȘTI, Șos. Vitan nr. 236.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 20, Nr. 4 1970

SUMAR

Pag.

Economie energetică

ŞT. KOVACS, S. MANEA, Tendinţe în acoperirea necesarului de energie 759

Termoenergetică şi termotehnică

V. PIMSNER, C.A. VASILESCU, Anamorfozarea diagramelor termodinamice . . . 775
R. L. PAPWORTH, L. TEODORESCU, Stabilitatea curgerii printr-un pulverizator în timpul procesului de injecţie 785
ŞTEFAN STERIE, Distribuţia vitezelor în stratul-limită turbulent la bordul de fugă al reţelelor statorice cu palete răsucite 795
BAZIL POPA, Raportul de reglare a debitului la injectoarele cu cameră de turbionare. Dependenţa acestuia de parametrii geometrici ai camerei 801
C.A. VASILESCU, L. TEODORESCU, I. ŞTEFAN, V. HARBUR, ST. MANEA, I. MINEA, O. BERCEA, D. MIHAI, Corelaţie între produşii poluanţi în gazele de evacuare la un motor cu aprindere prin scînteie şi neuniformitatea proceselor din cilindri. 809

Electroenergetică şi electrotehnică

F. SPINEI, Pătrunderea cîmpului magnetic într-un semispaţiu feromagnetic conductor cu caracteristică liniarizată pe porţiuni 831
M. POMÂRLEANU, Metodă operativă pentru determinarea directă a componentelor periodice şi aperiodice a curenţilor de scurtcircuit 849
I.S. ANTONIU, GH. DUMITRESCU, V.S. TURCU, Metodă de determinare a variaţiei tensiunii de-a lungul unei linii electrice lungi deschisă la capăt şi îndeplinind condiţia Heaviside 867
CRISTOFOR VASILIU, Proprietăţile transformatorului diferenţial nesimetric în condiţii de lucru arbitrare 883

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 757—978, Bucureşti, 1970

Pag.

MIRCEA PETCU, Metode de identificare a proceselor în sisteme neliniare 897
ED. NICOLAU, Sinteza şirurilor radiante 919
M. MARINESCU, ST. DOBOŞ, Pila de combustie cu hidrazină 937

Din viaţa ştiinţifică

C.A. VASILESCU, Cu privire la cea de a doua conferinţă internaţională de motoare cu ardere internă (15—27 iunie 1970) 961

Recenzii 953

Material documentar 971

Index alfabetic 975

TENDINȚE ÎN ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE

DE

ST. KOVACS și S. MANEA

620.9

O dată cu creșterea rapidă a consumului de energie primară și electrică, se constată și o schimbare în structura purtătorilor de energie folosiți în scopul realizării acestui consum. Pe baza unui bogat material statistic, se trag concluzii asupra tendințelor în acoperirea cu diverși purtători a necesarului de energie.

Se analizează, pe baza datelor oferite de bilanțul energetic, structura procentuală și tendințele în acoperirea necesarului de energie din România.

1. INTRODUCERE

În toate țările, atît în cele multilateral dezvoltate și cu un nivel de trai al populației ridicat, cît și în cele în curs de dezvoltare, problema energiei este una dintre problemele principale ale economiei naționale. Aceasta deoarece dificultățile în alimentarea fiecărui consumator cu energie, în cantitatea și de calitatea corespunzătoare necesităților sale și la timpul cerut, pot antrena deficiențe importante în desfășurarea normală a activității și pot aduce daune mari economiei naționale.

Modernizarea proceselor de producție din toate domeniile de activitate prin mecanizare, electrificare și automatizare a avut ca urmare înlocuirea forței umane și animale cu energie produsă din diferite surse. Astfel, dacă în 1850 15% din bilanțul energetic mondial reprezenta forța musculară, acest procent a scăzut la 1% după un secol (1950) [1]. În societatea modernă, energia sub diferitele ei forme și purtători intervine în toate sectoarele și ramurile economiei naționale, la obținerea tuturor produselor, prestațiilor și activităților de care are nevoie societatea în cantități din ce în ce mai mari.

Intervenția energiei în diferitele sectoare ale economiei naționale se face, pe de o parte, direct prin utilizarea nemijlocită a energiei și, pe de altă parte, indirect prin consumarea produselor pentru producerea cărora în prealabil s-au folosit anumite cantități de energie. În acest fel, energia intervine, într-o măsură mai mare decît apare la prima vedere în toate domeniile de activitate.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 759—773, 1970

Această concluzie este confirmată de datele din tabela 1, unde se evidențiază ponderea procentuală a costului consumului direct de energie și a celui cumulat (direct și indirect) în valoarea unor produse caracteristice [2].

Tabela 1

Ponderea costului energiei în valoarea anumitor produse pentru țările Pieții comune (în %)

	Consum direct	Consum cumulat
Mine și industria siderurgică	20,8	24,3
Minereuri și metale neferoase	11,4	14,8
Materiale de construcții și sticlă	8,6	11,5
Industria chimică	7,8	10,7
Industria constr. de mașini și electrotehnică	1,5	8,2
Industria textilă, confecții și pielărie	2,8	5,9
Diverse industrii	2,2	4,6
Construcții	0,9	5,4
Transporturi	11,6	13,7
Agricultură	1,4	4,2

Toate acestea fac ca consumul de energie să crească continuu și nici chiar în țările dezvoltate să nu se întrevadă deocamdată o saturație, ci, dimpotrivă, în ultima perioadă se observă o tendință de creștere. Astfel, dacă într-o perioadă mai îndepărtată (începînd din 1860, de cînd dispunem de date statistice[1] [1], [3]), timpul de dublare a consumului mondial de energie, mărime care caracterizează sugestiv ritmul de creștere, a fost de 24 de ani, în ultima perioadă acest timp de dublare a scăzut la aproximativ 16 ani (prioada 1946—1962), respectiv la aproximativ 14 ani (perioada 1953—1967). Pentru S.U.A., timpul de dublare a consumului de energie a fost de 28 de ani începînd din 1850 [4] și de 18 ani în ultima perioadă [5].

În figura 1 se reprezintă pentru mai multe țări timpul de dublare a consumului de energie primară și de energie electrică calculat față de 1967 [5]—[7]. Se observă că, cu puține excepții, dublarea consumului de energie primară se realizează în mai puțin de 20 de ani, iar cel de energie electrică în mai puțin de 10 ani, deci consumul de energie electrică față de cel de energie primară crește cu ritmuri mult mai mari

Se mai observă o oarecare legătură liniară între numărul de ani de dublare a celor două mari categorii de consumuri, în sensul că țările care au număr mic de ani de dublare pentru consumul de energie primară acest număr este mic și pentru consumul de energie electrică, și aceste țări sînt țări în curs de dezvoltare, și, invers, țările deja dezvoltate se situează atît pentru consumul de energie primară, cît și pentru cel de energie electrică peste media mondială, ca ani de dublare, excepție făcînd pen-

[1] La consumul surselor comerciale de energie din [3] s-a adăugat consumul de lemne după [1], considerînd acest consum mai semnificativ, mai ales pentru trecut cînd lemnele au avut pondere importantă.

tru consumul de energie primară țările în ale căror resurse energetice preponderează energia hidraulică și care au un ritm de creștere mai ridicat decît media mondială.

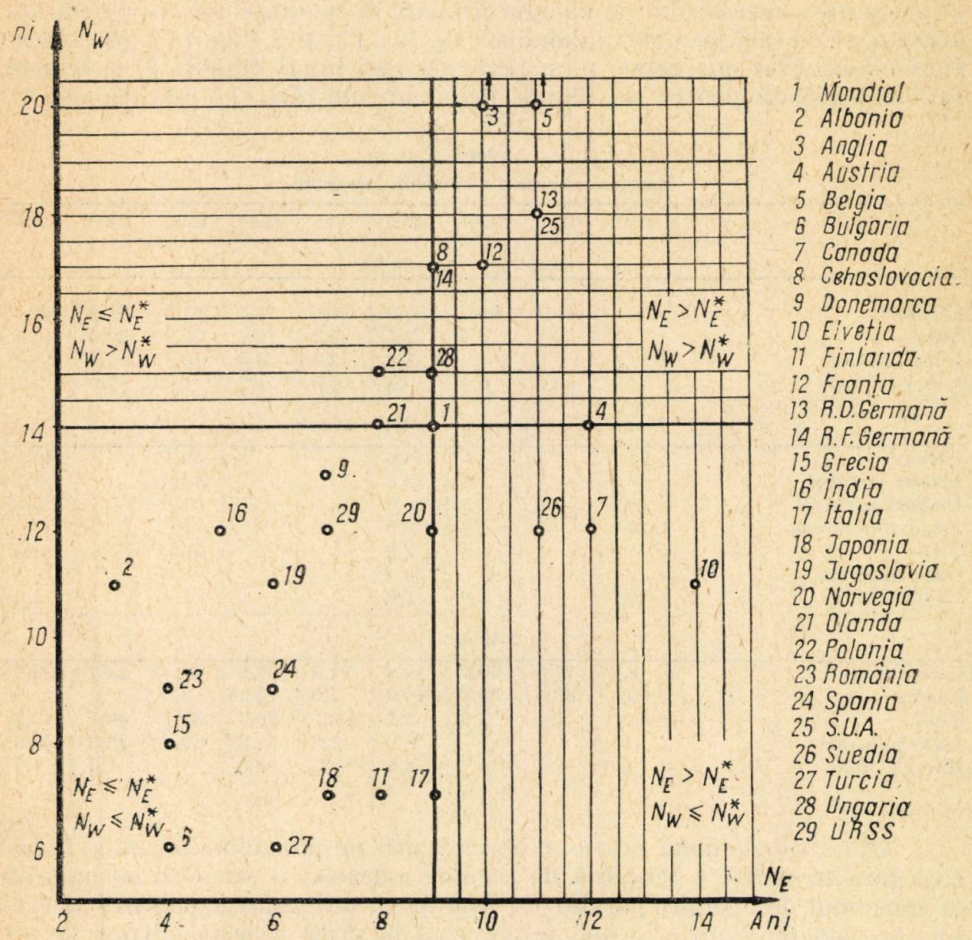


Fig. 1. — Compararea pentru o serie de țări a timpului de dublare a consumului de energie primară (N_W) și a celui de energie electrică (N_E) față de media mondială (N_W^*, N_E^*).

2. TENDINȚE ÎN ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE

Tendința de creștere continuă a consumului de energie atît pe plan mondial, cît și în fiecare țară, ca rezultat firesc al dezvoltării economice, este însoțită de schimbări esențiale în structura bilanțurilor energetice.

Principalii purtători de energie care au intervenit în decursul timpului la acoperirea necesarului de energie au fost : lemnele, cărbunii, țițeiul, gazele naturale și energia hidraulică. Importanța acestor purtători

de energie în cadrul economiei energetice s-a schimbat o dată cu dezvoltarea societății și cu descoperirea de noi purtători de energie.

Pentru a ilustra felul în care fiecare purtător de energie a intervenit la acoperirea necesarului de energie primară și tendințele ce se relevă din aceasta, se dă mai jos pentru mondial [1], [3], [7] și S.U.A. [4], [7] structura bilanțurilor energetice pe o perioadă mai lungă (tabela 2) și pentru ultima perioadă pentru un număr mai mare de țări [7], [8] (tabela 3).

Tabela 2

Structura procentuală a bilanțurilor energetice

	1850	1860	1880	1900	1920	1940	1950	1960	1967
Mondial, fără lemne									
Cărbuni		99,3	99,4	95,0	87,9	73,7	61,5	51,0	38,1
Țiței		0,1	0,2	3,5	9,3	19,6	26,9	32,5	40,6
Gaze naturale		—	—	1,2	2,2	5,5	10,0	14,5	19,1
Energie hidro		0,6	0,4	0,3	0,6	1,2	1,6	2,0	2,2
Mondial, cu lemne și alte resurse*									
Cărbune	25,3			48,6			52,1		40,1
Lemne și turbă	43,0			30,0			13,0		4,1
Deșeuri agricole	16,2			10,0			1,5		0,5
Forță musculară	15,0			8,0			1,0		—
Țiței	—			2,0			23,0		33,5
Gaze naturale	—			0,4			8,0		16,8
Energie hidro	0,5			1,0			1,4		5,0
S.U.A.									
Cărbune	9,2	16,3	40,7	70,9	74,8	50,6	41,0	24,7	22,5
Lemne	90,8	83,6	56,4	20,3	7,0	5,1	3,3	..	..
Țiței		0,1	2,9	3,7	11,2	29,7	32,1	40,7	40,4
Gaze naturale	—	—	—	2,6	3,8	11,3	19,2	33,3	35,6
Energie hidro	—	—	—	2,5	3,2	3,3	4,4	1,3	1,5

* 1965.

Din ultimele două tabele se observă atît pe plan mondial, cît și în fiecare țară în parte, o tendință de scădere continuă a ponderii cărbunelui în consumul de energie, paralel cu o creștere puternică a ponderii țițeiului. Această tendință este mai pronunțată la țările care nu dispun de resurse energetice interne suficiente și sînt nevoite ca o mare parte din necesitățile lor de energie să le acopere din import. În aceste condiții, țările își îndreaptă atenția către importul de țiței, datorită avantajelor pe care le prezintă acesta față de cărbune, avantaje referitoare la comoditate, curățenie, ușurință de manipulare, posibilități de reglare și mai ales preț scăzut și eficiență economică mai mare în utilizare. Astfel, dintre țările analizate, marea majoritate apelează la import de energie. La peste jumătate din aceste țări, producția proprie acoperă mai puțin de 50% din consumul de energie. Chiar în țările care dispun de rezerve de cărbuni de calitate, ca Franța, Anglia și Belgia, ponderea combustibilului lichid în bilanțul energetic crește. Aceasta a făcut ca extracția de țiței să crească foarte mult. Astfel, dacă producția mondială de cărbuni a crescut de două ori în perioada 1938—1966, cea de țiței, în aceeași perioadă, a crescut de șase ori.

Tabela 3

Structura procentuală a consumului surselor comerciale[1] de energie și raportul dintre producția și consumul de energie

	Combustibil solid			Combustibil lichid			Gaze naturale și import de gaze			Energie electrică hidro și import			Producție /consum 1966 %
	1929	1950	1966	1929	1950	1966	1929	1950	1966	1929	1950	1966	
1. Danemarca	90,4	72,4	23,8	9,6	27,2	75,8	—	—	—	—	0,4	0,4	3,0
2. Finlanda	81,6	61,7	18,3	12,8	23,1	72 8	—	—	—	5,6	15,2	8,9	8,9
3. Suedia	84,0	49,1	7,6	8,5	36,0	78,3	—	—	—	7,5	14,9	14,1	14,5
4. Elveția	78,5	47,5	8,0	8,7	29,9	74,4	—	—	—	12,8	22,6	17,6	20,9
5. Italia	84,9	53,7	11,6	7,7	27,4	70,5	0,1	3,5	11,6	7,3	15,4	6,3	21,1
6. Portugalia	86,0	55,7	24,2	13,2	41,9	62,3	—	—	—	0,8	2,4	13,5	22,5
7. Grecia	79,8	20,3	27,4	20,2	79,7	69,6	—	—	—	—	—	3,0	25,3
8. Japonia	86,9	84,0	34,8	9,2	5,4	58,4	0,1	0,2	1,4	3,8	10,4	5,4	33,9
9. Belgia	98,7	91,1	54,9	1,3	8,9	44,2	—	—	0,3	—	—	0,6	38,8
10. Olanda	92,4	80,1	27,3	7,6	19,6	62,7	—	0,3	10,1	—	—	—	39,9
11. Norvegia	67,2	31,3	6,6	8,3	31,3	51,1	—	—	—	24,5	37,4	40,3	43,2
12. Franța	95,6	79,6	42,1	3,5	17,1	48,1	—	0,7	5,0	0,9	2,6	4,8	46,6
13. Spania	91,1	82,2	44,5	6,5	13,8	46,6	—	—	—	2,4	4,0	9,8	50,3
14. Austria	93,9	83,4	37,1	3,7	9,2	42,2	—	1,5	12,7	2,4	5,9	8,0	55,6
15. Anglia	95,9	90,8	62,5	4,1	9,1	36,0	—	—	0,4	—	0,1	1,1	63,8
16. Ungaria	96,2	89,4	73,2	3,8	8,3	18,0	—	2,2	8,1	—	0,1	0,7	75,3
17. Jugoslavia	92,5	86,7	72,1	6,1	10,5	20,3	—	0,3	2,3	1,4	2,5	5,3	83,7
18. India	89,5	87,9	77,8	10,3	11,1	19,7	—	—	0,2	0,2	1,0	2,5	88,6
19. S.U.A.	67,9	41,3	23,7	22,2	34,9	39,9	9,3	22,7	35,1	0,6	1,1	1,3	91,4
20. Canada	77,5	54,6	14,5	14,9	31,5	47,5	2,7	4,4	27,8	4,9	9,5	10,2	91,6
21. Cehoslovacia	98,4	97,4	88,3	1,5	2,2	8,6	—	—	2,1	0,1	0,4	1,0	91,8
22. Polonia	96,0	97,8	91,3	2,1	1,6	6,1	1,9	0,5	2,4	—	0,1	0,2	115,3
23. România	35,0	21,0	22,0	39,1	43,5	23,0	25,7	35,1	54,9	0,2	0,4	0,1	116,9

[1] Cărbuni, țiței, gaze, energie electrică din hidro și import energie electrică. Țările sînt aranjate după ultima coloană.

Paralel cu creşterea ponderii ţiţeiului creşte şi ponderea gazelor naturale la acoperirea necesarului de energie. Această creştere este limitată însă la ţările care au rezerve de gaze naturale. Importul de gaze naturale este deocamdată redus, datorită greutăţilor care intervin la transportul acestui combustibil pe distanţe mari.

Contribuţia energiei hidraulice la acoperirea necesităţilor de energie primară este redusă la majoritatea ţărilor, utilizarea acesteia fiind legată de existenţa în ţara respectivă a unui potenţial hidroenergetic economic amenajabil. Se observă la ţările la care gradul de amenajare a potenţialului hidroenergetic este mare (de exemplu Elveţia 83%, Italia 73%, Japonia 55%, Finlanda 51% în 1966 [9]) o scădere a ponderii energiei hidraulice în bilanţ şi o creştere a acestei ponderi la ţările cu un grad de amenajare mai redus al potenţialului hidroenergetic (Norvegia 37%, Iugoslavia 32% [9]).

Energia electrică ocupă un loc special printre purtătorii de energie, importanţa ei crescînd o dată cu dezvoltarea progresului tehnic. Datorită avantajelor pe care le prezintă energia electrică în ceea ce priveşte în special utilizarea, tot mai multă energie primară se transformă în energie electrică. Astfel, dacă în 1900 circ 1,3% din producţia mondială de energie primară a fost transformată în energie electrică, acest procent a crescut la circa 9% în 1930 şi la aproximativ 22% în 1966.

În tabela 4 se dă pentru cîteva ţări energia primară consumată pentru producerea de energie electrică în centrale termoelectrice şi în centrale hidroelectrice, în procente faţă de consum total de energie [5], [6].

Tabela 4

Energia primară transformată în energie electrică %

Nr. crt.	Ţara	1938	1955	1967	Nr. crt.	Ţara	1938	1955	1967
1	Norvegia	37,7	50,5	62,2	10	S.U.A.	9,1	18,6	23,0
2	Austria	15,0	22,1	29,7	11	Olanda	13,1	20,7	22,2
3	Suedia	15,4	28,6	28,3	12	Italia	16,1	22,5	21,0
4	R.D.G.	..	24,9[1]	28,2	13	Franţa	..	17,2	20,9
5	Spania	..	20,0	27,5	14	România	..	16,6	19,9
6	Anglia	9,0	17,8	27,4	15	Cehoslovacia	..	14,8	19,3
7	Iugoslavia	..	14,7	26,4	16	Belgia	9,2	15,4	17,7
8	Ungaria	..	20,0	25,3	17	Polonia	..	15,2	17,7
9	R.F. a Germaniei	..	20,0[2]	24,2					

Observaţie. Ţările sînt aranjate în ordinea cifrelor din 1967. Coeficientul de transformare a energiei hidroelectrice în energie primară = 0,176 kg. c. c/kWh.
[1] 1956. [2] 1957.

Dacă se ţine seama de faptul că randamentul centralelor termoelectrice a crescut în această perioadă în unele ţări aproape la dublu (de exemplu consumul specific mediu de combustibil în perioada 1938—1967 a scăzut de la 5 486 kcal/kWh la 2 778 în Austria, de la 4 382 kcal/kWh la 2 592 în Belgia şi de la 4 062 kcal/kWh la 2 548 în Olanda [6]), deci pentru producerea aceleiaşi cantităţi de energie electrică s-a utilizat în ultimii ani mult mai puţin combustibil, cifrele din tabela 4 exprimă o creştere mai mare a gradului de transformare a energiei primare în energie electrică decît apare la prima vedere.

Structura consumului de combustibil pentru producerea energiei electrice s-a schimbat şi ea în direcţia creşterii ponderii hidrocarburilor,

Tabela 5

Structura procentuală a consumului de combustibil folosit pentru producerea energiei termoelectrice

Nr. crt.	Țara	Cărbuni Turbă Lemne			Combustibil lichid			Gaze naturale și industriale			Alți combustibili		
		1938	1955	1967	1938	1955	1967	1938	1955	1967	1938	1955	1967
1	Anglia [1]	92,9	99,2	83,9	0,2	0,8	16,1	—	—	—	0,6	0,1	—
2	Austria	91,6	56,3	40,0	8,4	16,9	31,0	—	26,3	26,6	—	0,5	2,4
3	Belgia	83,0	80,1	57,2	—	2,5	32,6	17,0	14,0	10,1	—	3,4	0,1
4	Cehoslovacia	..	93,9	95,0	..	0,2	2,7	..	5,9	2,0	..	—	0,3
5	Franța	..	75,0	68,5	..	8,4	19,7	..	16,4	11,1	..	0,2	0,7
6	Grecia	47,1	28,4	42,2	52,6	71,6	57,8	—	—	—	—	—	—
7	Italia	85,4	36,5	14,8	6,8	46,7	70,7	7,8	16,6	11,7	—	0,2	2,8
8	Jugoslavia	..	98,2	92,8	..	1,8	6,1	..	—	1,1	..	—	—
9	Olanda	96,0	94,1	54,0	0,1	4,5	35,8	2,9	1,0	10,1	1,0	0,4	0,1
10	Polonia	..	97,2	97,8	..	0,1	0,6	..	2,7	1,5	..	—	0,1
11	R.D.G. [2]	..	95,6	92,3	..	0,1	3,4	..	4,3	3,8	..	—	0,5
12	R. F. a Germaniei [2]	..	91,7	82,6	..	1,3	10,5	..	7,0	5,8	..	—	1,1
13	Pomânia [2]	..	28,5	24,4	..	36,3	2,8	..	33,7	71,9	..	1,5	0,9
14	Spania	..	100,0	53,7	..	—	44,2	..	—	1,7	..	—	0,4
15	S.U.A. [1]	78,9	67,8	62,7	6,7	9,2	9,8	14,4	23,0	27,4	—	—	—
16	Ungaria [3]	..	94,2	74,2	..	2,2	11,7	..	3,6	14,1	..	—	—
17	U.R.S.S. [1]	86,2	86,8	79,7 [4]	11,2	9,3	4,3 [4]	2,6	3,7	16,0 [4]	—	0,2	—
18	Turcia	..	88,8	61,3	..	6,3	33,8	..	2,6	4,9	..	2,1	—

1 Centrale publice.
2 1956.
3 1957.
4 1961.

paralel cu scăderea ponderii cărbunelui (tabela 5). Această schimbare este însă mai puțin pronunțată ca în cazul consumului total, cărbunii fiind încă utilizați pe scară largă pentru producerea energiei electrice.

Dacă se analizează evoluția cunoașterii rezervelor principalilor purtători de energie, se constată că această evoluție este în concordanță cu tendințele manifestate în structura consumului de energie în sensul că (așa cum se vede din tabela 6), rezervele de cărbuni au crescut puțin (cele sigure aproape de loc), în schimb cele de țiței și gaze naturale au crescut continuu.

Tabela 6

Situația rezervelor principalilor purtători de energie (mondiale)

Cărbuni [10] — [12]		Țiței (sigure) [12], [13]		Gaze naturale [11], [12]	
anul	milrd. t.	anul	mil. t	anul	10^{12} m^3
1926	7 398 (716)[1]	1930	3 500	1926	75 (15)[1]
1962	9 500 (800)	1940	5 000	1962	146 (30)
1968	9 260 (730)	1950	13 500		
		1955	25 000		
		1959	40 000		
		1968	55 000		

[1] Rezerve sigure din totalul de rezerve.

Există și alte estimări, dar, în general, toate prevăd creșteri pentru țiței și gaze naturale, ceea ce arată o preocupare intensă pentru descoperirea de noi rezerve care să permită creșterea extracției și să asigure un raport rațional între rezerve și producție. Astfel, dacă în 1930 rezervele de țiței erau de 18 ori mai mari decît extracția din anul respectiv, în 1950 erau de 20 de ori, în 1960 de 38 de ori și în 1968 de 32 de ori mai mari decît extracția.

Din cele expuse în acest capitol se desprind cîteva concluzii de tendințe în dezvoltarea energeticii și în acoperirea necesarului de energie cu diverși purtători, dintre care amintim;

— creșterea continuă a consumului de energie primară și electrică în concordanță cu dezvoltarea economică, consumul de energie electrică avînd un ritm de creștere mai ridicat decît cel al consumului de energie primară;

— creșterea ponderii combustibilului lichid și a gazelor naturale în bilanțul energetic național o dată cu scăderea ponderii cărbunelui și lemnelor;

— creșterea gradului de transformare a energiei primare în energie electrică;

— intensificarea acțiunii de descoperire de noi rezerve de țiței și gaze naturale pentru a face față consumului în continuă creștere;

— necesitatea intervenției energiei nucleare în acoperirea necesarului de energie datorită întrevederii că în perspectiva următorilor ani resursele de combustibili clasici, îndeosebi de țiței și de gaze, nu vor putea ține pas creșterii nevoilor.

Aceste concluzii care se desprind din analiza datelor din perioada trecută sînt indicații utile în acțiunea de prevedere a dezvoltării energeticii în general și a participării fiecărui purtător de energie la acoperirea necesarului global de energie.

4. TENDINȚE ÎN ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE ÎN ROMÂNIA

Creșterea în ritm susținut a consumului de energie primară și electrică, care sînt principalii indicatori ce caracterizează dezvoltarea energeticii, reprezintă o condiție esențială pentru promovarea tehnicii noi, pentru dezvoltarea unor ramuri mari consumatoare de energie, pentru modernizarea transporturilor, pentru intensificarea mecanizării muncilor agricole, pentru satisfacerea nevoilor sociale și culturale ale populației.

Pornind deci de la ideea că în construirea unei economii moderne și în dezvoltarea nestingherită a tuturor ramurilor economiei naționale o importanță deosebită are energetica, Partidul Comunist Român a înscris la loc de frunte în programul său general de construire a socialismului sarcina dezvoltării energeticii.

Realizarea acestei sarcini s-a concretizat în creșterea continuă a consumului de energie primară și electrică, așa cum se vede din figura 2, unde se dă pentru perioada 1950—1968 evoluția în funcție de timp a consumului intern[2] de energie primară și a consumului intern de energie electrică [7], [14], [15] în indici față de 1950, considerat 100.

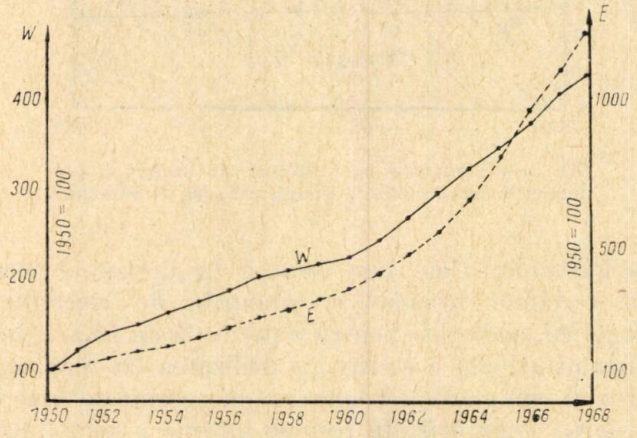


Fig. 2. — Evoluția în funcție de timp a consumului intern de energie primară (W) și a consumului intern de energie electrică (E) în România.

[2] Consum intern de energie = producție + import — export.

Ritmul ridicat cu care a crescut producţia şi consumul de energie a făcut posibil ca România să atingă nivelul mondial la consumul de energie primară pe locuitor în 1959 şi de energie electrică pe locuitor în 1966, aceşti indici fiind în 1950 de 1,5 ori şi, respectiv, de 3,1 ori mai mici decît media mondială.

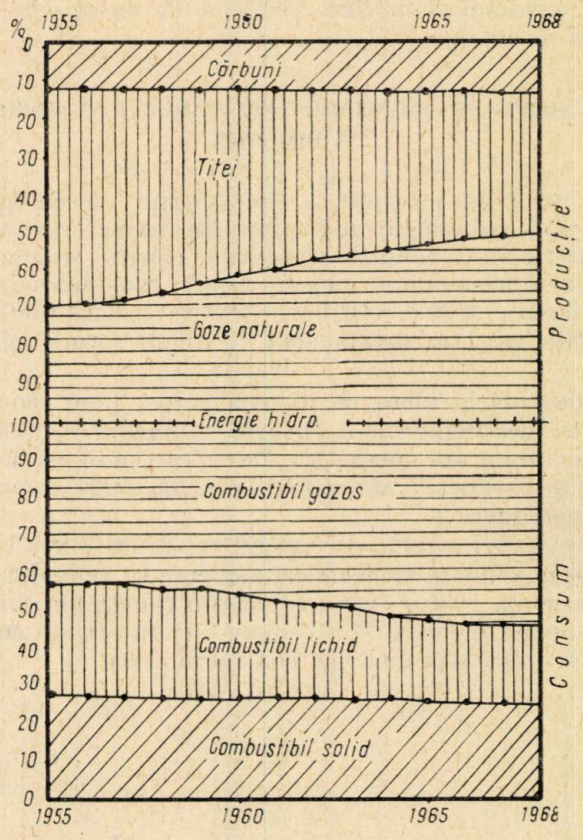


Fig. 3. — Structura pe purtători de energie a producţiei şi consumului de energie primară în România.

Politica Partidului Comunist Român în domeniul energeticii este exprimată în sarcinile înscrise în planurile de electrificare şi dezvoltare a energeticii, elaborate pentru o perioadă de 10 ani. În toate aceste planuri, sarcina principală o constituie utilizarea cît mai raţională şi valorificarea cît mai complexă a resurselor energetice de care dispune ţara noastră în vederea asigurării din resurse interne a necesităţilor crescînde de energie ale economiei naţionale.

Realizarea sarcinilor din planurile de dezvoltare a energeticii a determinat importante schimbări în structura producţiei şi consumului de energie primară (fig. 3) [7], [14]—[16].

Din analiza acestei figuri rezultă orientarea exploatării și utilizării resurselor energetice ale țării. Astfel, ținînd seama de faptul că rezervele cunoscute și de perspectivă sînt limitate și de necesitatea asigurării unui raport optim între rezerve și extracție, ponderea țițeiului în producția de energie primară a scăzut în ultimii ani, această scădere fiind compen-

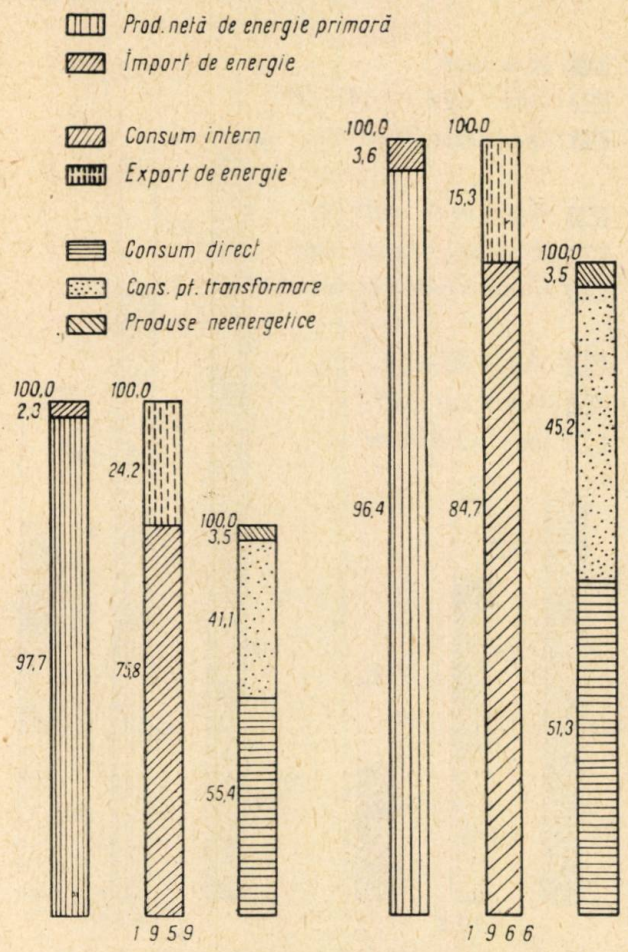


Fig. 4. — Disponibilul de energie și consumul intern de energie.

sată în parte de creșterea ponderii gazelor naturale. Se remarcă tendința de a nu diminua ponderea cărbunilor, ci, dimpotrivă, aceștia vor trebui să contribuie din ce în ce mai mult la acoperirea necesarului de energie, făcînd astfel posibil economisirea rezervelor de țiței și de gaze naturale, importante materii prime pentru industria petrochimică.

În ceea ce privește transformarea și utilizarea energiei la consumator, din prelucrarea unor date ale economiei energetice românești din 1959 și 1966 se desprind cîteva concluzii expuse în cele ce urmează.

În figura 4 se observă că în disponibilul de energie primară importul nu reprezintă o pondere prea mare atît în 1959, cît și în 1966. Se remarcă

totuşi o tendinţă de creştere a acestui capitol în acoperirea necesarului de energie al ţării. Exportul de enegie primară, care în 1959 reprezenta aproape un sfert din dinsponibilul de energie, a scăzut în 1966 la mai puţin de o şesime. Scăderea exportului a făcut posibilă creşterea ponderii consumului intern în total disponibil de energie. Defalcînd consumul intern de energie

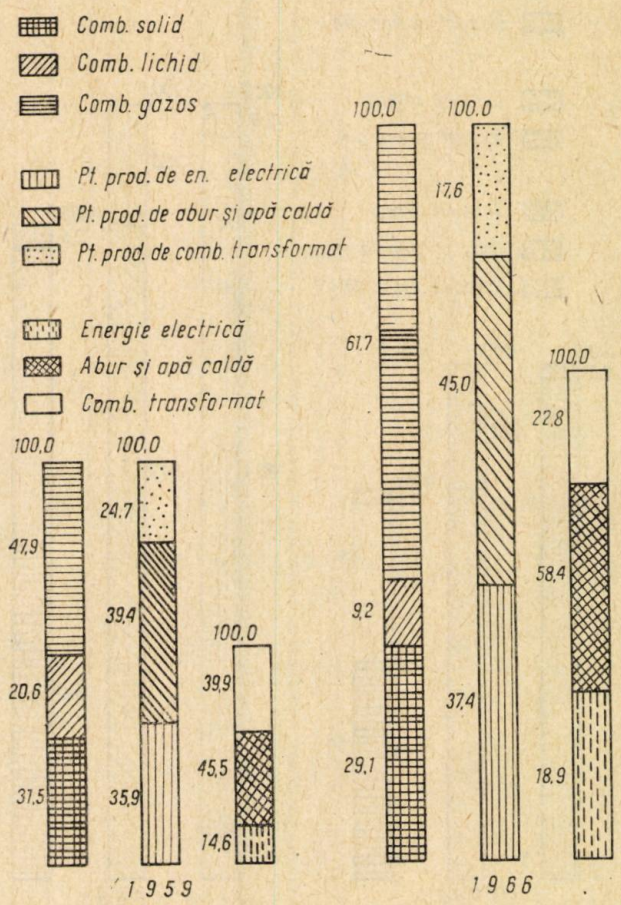


Fig. 5. — Consumul pentru transformare şi energie transformată.

în consum direct şi energie supusă transformării în scopul obţinerii altor forme de energie, rezultă că în perioada 1959—1966 ponderea energiei supuse transformării din total consum intern a crescut paralel cu scăderea ponderii consumului direct de energie.

În figura 5 se dă o privire de ansamblu asupra energiei supuse transformării şi a celei obţinute din transformare. Astfel, în structura purtătorilor de energie supuşi transformării se remarcă o schimbare în sensul creşterii ponderii combustibilului gazos paralel cu scăderea ponderii com-

bustibilului lichid, ponderea combustibilului solid menținîndu-se aproape constantă. În ceea ce privește scopul pentru care a fost utilizat combustibilul, se observă o scădere a cantității de energie utilizate pentru obținerea de combustibil transformat[3], în timp ce pentru producerea de energie electrică, abur și apă caldă s-a utilizat mai multă energie în 1966 față de 1959. Tendința de creștere a producției de energie electrică, a aburului și apei calde se observă și din analiza structurii energiei obținute în urma transformării. În amîndoi anii, aburul și apa caldă sînt principalii purtători de energie în cadrul energiei transformate. Din analiza figurii 5 mai rezultă un lucru foarte important pentru economia energetică românească, și anume îmbunătățirea randamentului de transformare a energiei de la circa 54% în 1959 la circa 66% în 1966, datorată în special scăderii consumului specific de energie primară în centralele termoelectrice, de termoficare și termice.

Structura pe purtători de energie, pe destinații și pe sectoare economice a energiei utilizabile, adică a energiei ajunse la consumator, este prezentată în figura 6, de unde se desprind cîteva concluzii :

— combustibilul gazos ocupă locul principal printre purtătorii de energie utilizabilă, însă ponderea lui scade în 1966 față de 1959. De asemenea scade și ponderea combustibilului lichid, în timp ce energia transformată (energie electrică, abur și apă caldă) crește. Combustibilul solid crește și el, dar foarte puțin ;

— energia utilizabilă se folosește (fig. 6*b*) în cea mai mare parte pentru producerea căldurii atît în 1959, cît și în 1966, cea pentru producerea energiei mecanice fiind a doua ca mărime. O creștere importantă a energiei utilizate ca materie primă și energie chimică se observă în 1966 față de 1959. Scăderea capitolului de pierderi la consumator (pierderi prin nefolosire, de manipulare, depozitare, de transport și distribuție) în 1966 față de 1959 se datorează în primul rînd faptului că în 1966 gazele de sondă și de furnal s-a utilizat în întregime, spre deosebire de 1959, cînd acești purtători de energie s-au utilizat numai parțial, pierderile prin această nefolosire reprezentînd aproximativ 84% din totalul pierderilor la consumator din acel an ;

— în cadrul energiei utilizabile, industria ocupă ponderea cea mai mare. Transporturile și gospodăria casnică sînt și ei importanți consumatori de energie (fig. 6*c*).

Tendințele desprinse din analiza datelor energeticii românești sînt, în general, aceleași ca pentru majoritatea țărilor ; există totuși unele deosebiri, rezultate din specificul structurii resurselor energetice și din politica unei folosiri cît mai raționale a lor.

---

[3] Prin combustibil transformat s-a înțeles combustibilul obținut în urma prelucrării (de exemplu brichete, lignit deshidratat, cocs etc.)

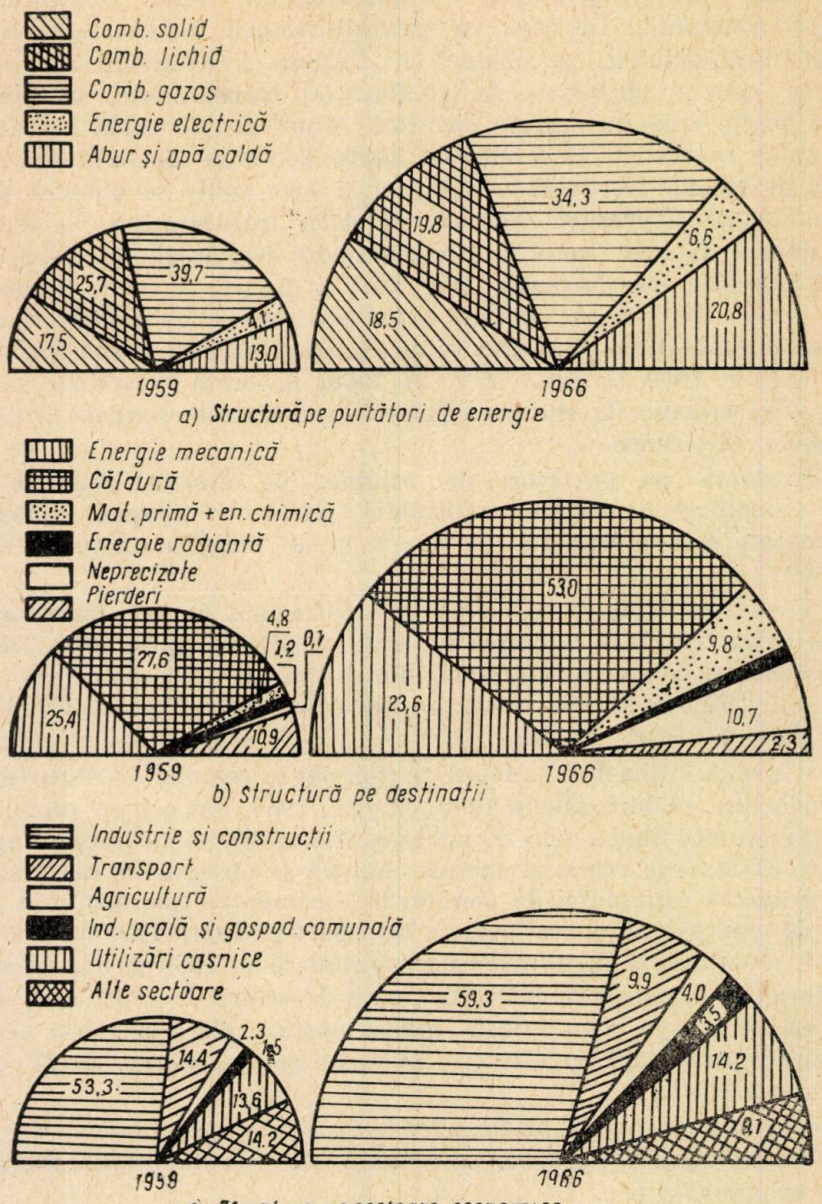


Fig. 6. — Energia utilizabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Probleme der Weltenergiebilanz in letzten Drittel des 20. Jahrhunderts*, Energieanwendung, **18**,8, 193 — 196) (1969).

2. K. Förster, *Allgemeine Energiewirtschaft*, Berlin, Dunker Humbolt-Verlag, 1965.

3. * * * *Mirovie potrebnosti v energi na 1975 i 2000 god*, rap. P /902 (OON), Conf. utiliz. energiei atomice în scopuri pașnice, Geneva, 1955.
4. Sam H. Schurr, Bruce, C. Netschert, *Energy in the American economy*, 1850—1975, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1960.
5. * * * *Statistical Yearbook* 1964 — 1968, New York, United Nations.
6. * * * *Annual Bulletin of Electric Energy Statistics for Europe 1956 — 1968*, New York, United Nations.
7. * * * *World Energy Supplies*, Statistical Papers, Series J., nr. 2 — 12, New York, United Nations.
8. * * * *Die Kohlenwirtschaft der Welt in Zahlen*, Essen, Verlag Glückauf, 1961.
9. W. Pietzsch, *Wasserkraftwerke. Ein Rückblik über die Berichte der Sektion C_2 der Weltkraftkonferenz* 1968, Elektrizitätswirtschaft **67**, *26*, 780 — 783 (1968).
10. S. Zagrodski, *Weltvorräte an kohlenstoffhaltigen Brennstoffen*, BWK, **13**, *12*, 529 — 531 (1961).
11. * * * *Die Energiereserven der Welt* 1962, ÖZE, **15**, *11*, 628 (1962).
12. L. Bauer, *Reserven an Energieträgern*, ÖZE, **21**, *11*, 835—836 (1968).
13. * * * *Wie lange reichen die heutigen Erdölreserven*, Archiv für Energiewirtschaft, **14**, *19*, 773 — 775 (1960).
14. * * * *Anuarul statistic al Republicii Socialiste România*, 1969, Direcția Centrală de Statistică.
15. * * * *Industria României. 1944 — 1964*, București, Edit. Academiei (cap. VII, „Baza energetică și electrificarea țării", p. 219 — 270), 1964.
16. I. D. Stăncescu, *Energie — und Heizkraftwirtschaft in Rumänien*, ÖZE, **22**, *3*, 96 — 98 (1969).

ANAMORFOZAREA DIAGRAMELOR TERMODINAMICE

DE

V. PIMSNER şi C. A. VASILESCU

536.71

Stabilirea relaţiilor care definesc variaţiile elementare ale energiei interne, ale entropiei etc., ca şi ale schimbului de căldură şi lucru mecanic, permite elaborarea metodei de calcul a relaţiilor de transformare dintr-un triedru de referinţă într-altul a mărimilor unui sistem termodinamic omogen de masă şi de natură chimică cunoscută. Relaţiile stabilite sînt exemplificate pentru triedrele frecvent utilizate.

Corelarea diagramei mecanice cu diagramele entropice pentru studiul interdependenţei dintre schimburile de energie şi variaţia parametrilor de stare într-o evoluţie termodinamică a unui sistem fizic arbitrar, dar definit, generează o problemă mai generală, impusă de utilizarea tot mai frecventă şi a altor tipuri de diagrame în afara celor uzuale, aceea a determinării relaţiilor care definesc schimbarea triedrelor de axe de referinţă în care este reprezentat sistemul termodinamic.

Obiectul lucrării este stabilirea relaţiilor de transformare dintr-un triedru de axe în altul al unui sistem termodinamic omogen, de masă dată şi de natură chimică cunoscută, care este perfect definit fizic de doi parametri de stare independenţi între ei, ceea ce permite stabilirea unei ecuaţii implicite între trei parametri de stare (spre exemplu presiune, temperatură şi volum), ecuaţie care constituie relaţia de definire a stării fizice a sistemului termodinamic, numită ecuaţie de stare.

Într-un spaţiu raportat la un sistem ortogonal de axe de referinţă (p, v, T), locul geometric al punctelor care reprezintă stările de echilibru ale sistemului omogen constituie o suprafaţă a cărei ecuaţie $F(p, v, T) = 0$, exprimată analitic, tabelar sau grafic, este ecuaţia de stare sus-amintită.

Modificarea stării sistemului este condiţionată de schimbul de substanţă sau de energie dintre sistem şi mediul ambiant, datorită apariţiei unei diferenţe de concentraţie, temperatură sau presiune între sistem şi mediul ambiant. Trecerea sistemului dintr-o stare iniţială de echilibru într-o altă stare de echilibru, numită finală, se numeşte transformarea stării

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 775–784, 1970

fizice sau transformare de stare, deci o transformare reprezintă succesiunea stărilor sistemului între două stări de echilibru succesive.

Dacă transformarea se efectuează astfel încît dezechilibrul dintre sistem şi mediu să fie infinit mic şi la limită nul, transformarea este reversibilă; în caz contrar, evoluţia se numeşte ireversibilă. Deci o transformare reversibilă se reprezintă, în sistemul de axe de referinţă ales, printr-o curbă care se suprapune complet peste suprafaţa de stare; în schimb, o transformare ireversibilă nu este integral cuprinsă în suprafaţa de stare, însă stările iniţială şi finală ale evoluţiei ireversibile aparţin suprafeţei de stare şi satisfac ecuaţia $F(p, v, T) = 0$.

O transformare elementară reprezintă o deplasare infinitezimală pe suprafaţa de stare, definită de variaţia vectorului de poziţie $\boldsymbol{r}$ a stării iniţiale, adică

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1 \mathrm{d}p + \boldsymbol{i}_2 \mathrm{d}v + \boldsymbol{i}_3 \mathrm{d}T, \tag{1}$$

în care $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}T$ sînt proiecţiile pe axele de referinţă ale vectorului $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, dependente între ele prin apartenenţa lui $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ la suprafaţa de stare. Deci suprafeţei de stare îi este ataşat un cîmp vectorial al transformărilor elementare. Acestui cîmp îi este propriu tensorul derivat al vectorului evoluţiei în raport cu vectorul de poziţie, ceea ce permite să se scrie

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T & \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v & \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Produsul scalar dintre tensorul Π al parametrilor de stare şi vectorul transformării reprezintă un vector ai cărui componenţi se exprimă în mod liniar şi omogen în funcţie de componentele lui Π, de aceea $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Pi \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ se numeşte funcţie liniară vectorială de vectorul $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Ţinînd seama de coeficienţii experimentali de dilataţie la presiune constantă

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

de compresibilitate la volum constant

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

şi de compresibilitate la temperatură constantă (inversul coeficientului de elasticitate)

$$\chi = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,$$

matricea Π poate fi scrisă şi sub forma

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T & \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v & \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\chi v} & \beta p \\ -\chi v & 0 & \alpha v \\ \frac{1}{\beta p} & \frac{1}{\alpha v} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dacă în timpul evoluţiei elementare există un flux de căldură provenit din schimbul de căldură cu exteriorul şi prin frecări, vectorul fluxului de căldură, ataşat transformării de stare, determină tensorul derivat al vectorului $\boldsymbol{q}$ în raport cu vectorul de poziţie $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T & \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_T & 0 & \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v & \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

definind matricea $\mathcal{Q}$ a coeficienţilor calorici. Cum $\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ rezultă sub formă sintetică

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \mathcal{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{4'}$$

Analog căldurilor specifice la volum, respectiv la presiune constantă, se defineşte căldura latentă de dilatare la temperatură constantă $l_t = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T$, respectiv la presiune constantă $l_p = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p$, ca şi căldura latentă de com-

presiune la temperatură constantă $h_T = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_T$, respectiv la volum constant $h_v = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v$ [1]. Cu aceste notații, relația (4') poate fi pusă sub forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 & l_T & c_v \\ h_T & 0 & c_p \\ h_v & l_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{5}$$

din care rezultă relațiile de legătură între parametrii de stare și coeficienții calorici ai transformării. Relația (5) permite determinarea expresiei variației elementare a entropiei :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{T}\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T & \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T & 0 & \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v & \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l_T}{T} & \frac{c_v}{T} \\ \frac{h_T}{T} & 0 & \frac{c_p}{T} \\ \frac{h_v}{T} & \frac{l_p}{T} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

sau, notînd $\mathbb{S}$ matricea rezultată, se poate scrie

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathbb{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{6'}$$

Din relația primului principiu al termodinamicii aplicată unui sistem înscris,

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}q - p\mathrm{d}v,$$

rezultă :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & l_T & c_v \\ h_T & 0 & c_p \\ h_v & l_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} - p\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} 0 & l_T - p & c_v \\ h_T & -p & c_p \\ h_v & l_p - p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}, \tag{7}$$

care poate fi pusă sub forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \mathcal{U}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & l_T - p & c_v \\ h_T + \chi pv & 0 & c_p - pv\alpha \\ h_v & l_p - p & 0 \end{pmatrix} d\boldsymbol{r} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T & \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T & 0 & \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v & \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{8}$$

În mod identic, din relația de definire a variației elementare de entalpie

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}q + v\mathrm{d}p$$

rezultă

$$\mathrm{d}\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} v & l_T & c_v \\ h_T + v & 0 & c_p \\ h_v + v & l_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r = \begin{pmatrix} 0 & l_T - \frac{1}{\chi} & c_v + pv\beta \\ h_T + v & 0 & c_p \\ h_v + v & l_p & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathcal{I}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{9}$$

Relațiile stabilite permit elaborarea metodei de trecere dintr-un triedru de referință într-altul, luîndu-se în considerare transformarea unei axe și a două axe de coordonate. De relevat că utilizarea entropiei, energiei interne etc. ca una dintre axele sistemului referențial presupune cunoașterea, în afara parametrilor fizici, a cel puțin unui coeficient caloric.

De aceea ansamblul stărilor unui fluid, reprezentate spre exemplu în spațiul (p, s, T), constituie o suprafață care satisface simultan ecuația de stare a sistemului și cele două principii ale termodinamicii, existînd astfel între parametri o dublă legătură.

Să considerăm vectorul elementar $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ definit în spațiul (p, v, T) de relația (6) și care urmează a fi definit în triedru (s, v, T) sau în triedrul (p, s, T). Întrucît relația tensorială (6) reprezintă trei relații distincte între ele, se poate scrie pentru triedrul (s, v, T)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{l_T}{T} & \frac{c_v}{T} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{h_T}{T} & 0 & \frac{c_p}{T} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_v}{T} & \frac{l_p}{T} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} \tag{10}$$

pentru triedrul (p, s, T) :

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_T}{T} & \frac{c_v}{T} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{h_T}{T} & 0 & \frac{c_p}{T} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{h_v}{T} & \frac{l_p}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{11}$$

iar pentru triedrul (p, v, s)

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{l_T}{T} & \frac{c_v}{T} \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{h_T}{T} & 0 & \frac{c_p}{T} \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{h_v}{T} & \frac{l_p}{T} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{12}$$

Se constată că valoarea determinanţilor fiecăruia dintre cele nouă matrice din relaţiile (10), (11) şi (12) este valoarea diagonalei principale, care pot fi aranjate astfel :

	1	2	3
I	0	$\frac{h_T}{T}$	$\frac{h_v}{T}$
II	$\frac{l_T}{T}$	0	$\frac{l_p}{T}$
III	$\frac{c_v}{T}$	$\frac{c_p}{T}$	0

încît cifrele romane indică relaţiile (10)—(12), iar cele arabe ordinea matricelor într-o relaţie. De remarcat că tabela obţinută rezultă din matricea entropiei dacă liniile se înlocuiesc cu coloanele.

Trecerea inversă din triedrele (s, v, T), (p, s, T) și (p, v, s) în triedrul (p, v, T) este precizată de matricea inversă. Spre exemplu, pentru matricea $I-2$ se determină matricea transpusă $A^{\sim}_{I-2}$, apoi matricea reciprocă A^{*}_{I-2}, din care rezultă matricea inversă A'_{I-2}, adică

$$A^{\sim}_{I-2} = \begin{pmatrix} \frac{h_T}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c_p}{T} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^{*}_{T-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c_p}{T} \\ 0 & \frac{h_T}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_T}{T} \end{pmatrix};$$

$$A'_{I-2} = \frac{A^{*}_{I-2}}{\det A_{I-2}} = \begin{pmatrix} \frac{T}{h_T} & 0 & \frac{c_p}{h_T} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = A'_{I-2} \begin{pmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}. \tag{13}$$

În mod identic pentru matricea $I-3$ se obține

$$A^{\sim}_{I-3} = \begin{pmatrix} \frac{h_v}{T} & 0 & 0 \\ \frac{l_p}{T} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{*}_{I-3} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_p}{T} & 0 \\ 0 & \frac{h_v}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_v}{T} \end{pmatrix};$$

$$A'_{I-3} = \begin{pmatrix} \frac{T}{h_v} & -\frac{l_p}{h_v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pe baza căreia se poate scrie

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = A'_{I-3}\begin{pmatrix}\mathrm{d}s\\ \mathrm{d}v\\ \mathrm{d}T\end{pmatrix}.$$

Trecerea din triedrul (p, s, T) în (p, v, T) se deduce utilizînd matricele II—1 și II—3, obținîndu-se

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{T}{l_T} & -\dfrac{c_v}{l_T}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{d}T\end{pmatrix};\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\dfrac{h_v}{l_p} & \dfrac{T}{l_p} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{d}T\end{pmatrix}, \tag{14}$$

iar din triedul (p, v, s) se trece în triedrul (p, v, T) prin relațiile

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{l_T}{c_v} & \dfrac{T}{c_v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}v\\ \mathrm{d}s\end{pmatrix};\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{h_T}{c_v} & 0 & \dfrac{T}{c_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}r\\ \mathrm{d}s\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Spre exemplu, relația (15) conduce la expresia

$$\mathrm{d}T = -\frac{l_T}{c_v}\,\mathrm{d}T + \frac{T}{c_v}\,\mathrm{d}s = -\frac{h_T}{c_p}\,\mathrm{d}p + \frac{T}{c_p}\,\mathrm{d}s,$$

care poate fi pusă sub forma cunoscută

$$\begin{aligned} T\,\mathrm{d}s &= c_v\,\mathrm{d}T + l_T\,\mathrm{d}v,\\ T\,\mathrm{d}s &= c_p\,\mathrm{d}T + h_T\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{15'}$$

Vectorul variației elementare a energiei interne $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ (sau al entalpiei $\mathrm{d}\boldsymbol{i}$) reprezintă un invariant în orice sistem de axe de referință, de aceea el poate fi transpus, cu relațiile obținute, dintr-un sistem într-altul. În sistemul de axe (p, v, T), vectorul $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ este precizat de relațiile (8). Pentru a fi transpus, spre exemplu, în sistemul de axe (p, s, T), este necesar să se înlocuiască vectorul $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ prin relațiile (14), adică

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{u} &= (h_T + \chi pv,\ 0,\ c_p - pv\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{T}{l_T} & -\dfrac{c_v}{l_T}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{d}T\end{pmatrix} =\\ &= (h_T + \chi pv,\ 0,\ c_p - pv\alpha)\begin{pmatrix}\mathrm{d}p\\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{d}T\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

ca și

$$\mathrm{d}u = (h_v,\ l_p - p,\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{h_v}{l_p}\dfrac{T}{l_p} & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \left(\frac{h_v}{l_p}p,\ T - \frac{T_p}{l_p},\ 0\right)\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}, \tag{16'}$$

iar

$$\mathrm{d}i = (h_T + v,\ 0,\ c_p)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{T}{l_T} - \dfrac{c_v}{l_T} & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = (h_T + v,\ 0,\ c_p)\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}, \tag{17}$$

adică

$$\mathrm{d}i = (h_T + v)\,\mathrm{d}p + c_p\,\mathrm{d}T$$

și

$$\mathrm{d}i = (h_v + v,\ l_p,\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{h_v}{l_p}\dfrac{T}{l_p} & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = (v,\ T,\ 0)\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}. \tag{17'}$$

Pe baza relației (17') se determină imediat trecerea din sistemul de axe $(p,\ s,\ T)$ în sistemul $(i,\ s,\ T)$ prin înlocuirea în matricea-unitate a primei linii prin matricea liniei din relația (17'), adică

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}i \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_T + v & 0 & c_p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Cum matricele, transformată și inversă, sînt

$$A^{\tau} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad A_I^* = \begin{pmatrix} 1 - T & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

se obține matricea inversă, care definește transformarea:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{v} - \dfrac{T}{v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}i \\ \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}T \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Relația (19) permite schimbarea simultană a două axe ale sistemului de coordonate. Spre exemplu, vectorul $d\boldsymbol{r}$ poate fi determinat în sistemul de axe (i, s, T), modificînd spațiul (p, v, T) în (p, s, T) și utilizînd relația (14), apoi axa o-p în o-i prin relația (19), astfel că

$$d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T}{l_T} & \frac{c_v}{l_T} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{T}{v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di \\ ds \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{T}{v} & 0 \\ 0 & \frac{T}{l_T} & -\frac{c_v}{l_T} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di \\ ds \\ dT \end{pmatrix}. \qquad (19')$$

În mod analog poate fi exprimat vectorul variației energiei interne, care poate fi utilizat pentru determinarea sistemului de axe de referință în care energia internă să fie o axă de coordonate. Relațiile stabilite definesc anamorfozarea unui spațiu termodinamic într-altul, implicit relațiile de legătură dintre parametrii de bază ai sistemului termodinamic și ai transformărilor energetice.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Kling, *Thermodynamique générale et applications*, Paris, Ed. techniques, 1967.
2. M. R. El. Saden, Int. J. Mech. Sciences, **8**, 13 – 24 (1966).
3. M. Giot, Al. Puron, Revue E.P.E., **III**, *2*, 4 – 35 (1967).
4. Y. Rocard, *Thermodynamique*, Paris, Masson et Cie, 1967.

STABILITATEA CURGERII PRINTR-UN PULVERIZATOR ÎN TIMPUL PROCESULUI DE INJECȚIE[1]

DE

R. L. PAPWORTH și L. TEODORESCU

621.436

În baza analizei stabilității funcționale a curgerii printr-un pulverizator cu știft și a proceselor fizice, se formulează modelul matematic și, respectiv, se definesc domeniile de funcționare stabilă în timpul unei singure injecții.
Utilizînd modelarea pe calculatoare numerice sau hibride, se analizează variația domeniilor de funcționare stabile la pulverizator în funcție de regimul de sarcină și de parametrii geometrici semnificativi ai secțiunii de curgere, rezultatele analizei fiind prezentate în reprezentări tridimensionale.

1. INTRODUCERE

Proiectarea echipamentului de injecție al motoarelor cu ardere internă este adesea o problemă de compromis în soluționarea cîtorva cerințe contradictorii, ca putere, economicitate, zgomot, fum și comportare la pornire. Problemele puterii efective, economicității și zgomotului sînt strîns legate de evoluția presiunii în cilindru și deci de cedarea de căldură sau de condițiile de ardere. De aceea o problemă importantă este să se determine ce caracteristici de injector vor impune cerințele de cedare a căldurii pentru performanțe dorite.

Considerînd că întregul proces de injecție are un caracter specific tranzitoriu și că acesta este de natură ciclică, analiza caracteristicilor sistemului poate fi dezvoltată ca un studiu al răspunsului tranzitoriu pentru un sistem dinamic.

În această lucrare se prezintă formularea matematică ce reprezintă procesele reale care au loc la un pulverizator de injector. Utilizînd modelul formulat, influența fiecărui parametru proiectat poate fi studiată și prevăzută, deci influența sa asupra caracteristicilor injectorului. Deoarece regimul tranzitoriu predomină caracteristicile sistemului, analiza stabili-

[1] Lucrare prezentată la a doua Conferință internațională de motoare cu ardere internă, București, iunie 1970.

tăţii acestuia este de un interes teoretic şi practic considerabil. Intenţia de bază a acestui studiu este de a clarifica stabilitatea curgerii printr-un pulverizator în timpul unei perioade de injecţie.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Debitul instantaneu de lichid care trece printr-un pulverizator este determinat de valoarea diferenţei de presiune din duză şi secţiunea minimă efectivă de curgere. Datorită inerţiei elementelor în mişcare ale injectorului, compresibilităţii fluidului de lucru tensiunii arcului şi curgerii lichidului, sistemul se comportă ca un ansamblu dinamic, modificînd legea de injecţie reală în comparaţie cu cea impusă de pompa de injecţie.

Ansamblul acului şi resortului injectorului este un sistem elastic a cărui mişcare este determinată de variaţia presiunii de injecţie (p), de geometria pulverizatorului (F_z), de pretensionarea iniţială a resortului (P) şi de constanta acestuia (K), de amortizarea acului $\left(C\frac{dy}{dt}\right)$ în corpul injectorului şi de frecarea (R) care apare între ac şi corpul injectorului. Descrierea acestei mişcări poate fi exprimată de ecuaţia

$$m_a \frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{dy}{dt} + Ky - F_z p_a \pm R = 0, \tag{1}$$

unde y corespunde ridicării acului. Presupunem o situaţie iniţială de regim staţionar cu o valoare cunoscută a presiunii (p_0), cu o valoare corespondentă a deplasării acului (y_0) şi o viteză de curgere din conductă (W_0). O mică variaţie a presiunii în conducta de combustibil de la p_0 la $(p_0 + p_1)$, unde p_1 reprezintă unda perturbatoare, va produce o schimbare în ridicarea acului de la valoarea y_0 la $(y_0 + y_1)$ şi, evident, o schimbare a vitezei de curgere prin conductă de la W_0 la $(W_0 + W_1)$. Cînd unda perturbatoare încetează, presupunînd o mişcare stabilă, condiţia de răspuns a sistemului este dată de

$$m_a \ddot{y}_1 + C\dot{y}_1 + Ky_1 - F_z p_1 = 0. \tag{2}$$

Utilizînd ecuaţia continuităţii la curgerea curentului prin duză, relaţia corespunzătoare este

$$F_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_d - p_z} = WF_e - \frac{V_d}{E}\frac{dp}{dt} - F_z\frac{dy}{dt}, \tag{3}$$

unde F reprezintă secţiunea efectivă de curgere a combustibilului la pulverizator, V volumul camerei pulverizatorului, F_e secţiunea efectivă de trecere a conductei şi F_z secţiunea activă a acului. Valorile lui F depind de geometria acului pulverizatorului şi sînt de asemenea legate de valorile cursei acului în timpul procesului de injecţie a combustibilului. Forma generală a acului injectorului este prezentată în figura 1.

Cînd acul începe să se ridice, secțiunea minimă de curgere se realizează între conul de așezare al duzei și muchia conului acului, fiind notată cu A_1 în figura 2. Cînd acul continuă să se ridice, secțiunea minimă

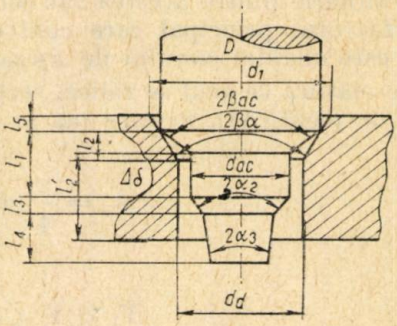


Fig. 1. — Schema generală a unui pulverizator.

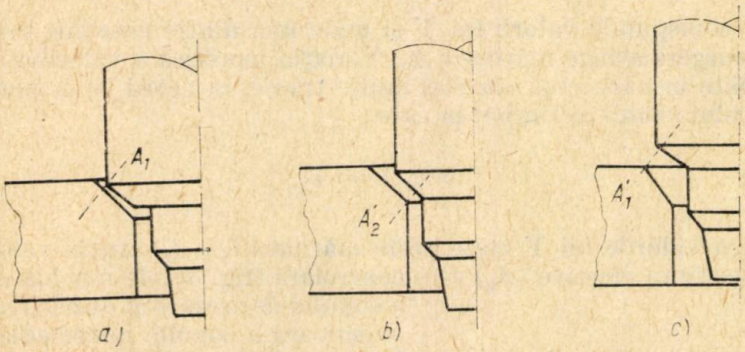


Fig. 2. — Situarea secțiunilor minime de curgere în cazul curselor mici de ridicare a acului injectorului.

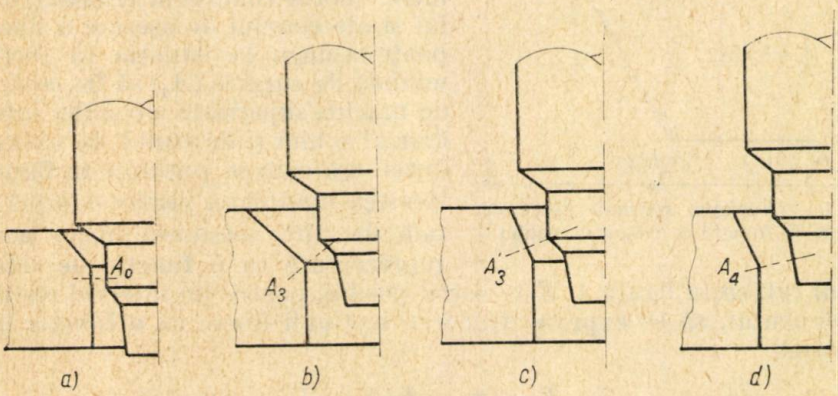


Fig. 3. — Situarea secțiunilor minime de curgere pentru ridicări mari ale acului.

de curgere se va schimba în diferite poziții înainte de a fi limitată de jocul ($\Delta\delta$) dintre zona cilindrică a acului și diametrul orificiului duzei, așa cum se arată în figura 3. Secțiunile minime controlate de știftul acului pulverizatorului sînt prezentate schematic în figurile 2, 3 și 4.

Este teoretic posibil ca, înainte de a fi controlată de jocul ($\Delta\delta$), valoarea minimă a secțiunii la pulverizatorul injectorului să treacă prin toate situațiile prezentate mai sus. În mod obișnuit însă, apare numai o singură situație dintre acestea sau cel mult două. În toate aceste situații, totuși, factorul principal care controlează valorile secțiunii minime de curgere este unghiul conului de așezare.

Pe măsură ce acul se ridică, secțiunea minimă de curgere este condiționată de jocul ($\Delta\delta$), în care caz se poate scrie

$$A_0 = \frac{\pi}{4}(d_d^2 - d_{ac}^2) \tag{4}$$

dacă

$$Y_1 < Y < (l_1 - l_2), \tag{5}$$

unde Y_1 corespunde valorii lui Y și unde una dintre ecuațiile secțiunii libere de curgere atinge mărimea A_0. Variația teoretică a valorilor secțiunii libere poate urmări unul sau mai multe trasee, în acord cu geometria reală a știftului acului în timpul în care

$$0 < Y < Y_1.$$

Dacă valorile lui Y cresc peste mărimea $l_1 - l_2$, atunci valoarea minimă a secțiunii efective (A_2) este controlată (fig. 3*b*) de muchia inferioară a conului de așezare al duzei și *ac* muchia superioară a conului intermediar al acului, de unghi α_2 (fig. 1).

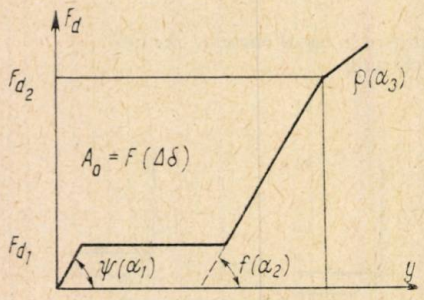


Fig. 4. — Variația secțiunii libere de curgere în funcție de ridicarea acului.

Dacă există o foarte mare diferență între valorile conului intermediar al acului și ale conului de așezare a duzei, se poate ajunge la situația ca secțiunea minimă de curgere (A_4) să fie controlată de muchia superioară a conului intermediar al acului și de conul de așezare al duzei, așa cum se prezintă în figura 3*c*. Acestea fiind date, pentru o formă generală de știft, secțiunea liberă poate fi reprezentată ca o funcție de ridicarea acului (y), ca în figura 4. Este astfel posibil, pentru un interval restrîns al cursei acului, să se exprime valoarea secțiunii libere ca o funcție liniară de forma

$$F_d = a_0 + b(Y - Y_e), \tag{6}$$

în care a_0, b și Y_e pot fi obținuți dintr-o diagramă prezentată ca în figura 4. Aceeași variație a presiunii de la p_0 la $(p_0 + p_1)$ care produce ridicarea acului (2) poate de asemenea să genereze o perturbare a curgerii fluidului prin duză.

În acord cu ecuația (3), dacă se adaugă condiția că la încetarea perturbării curgerea să revină la regimul inițial [1], ecuația următoare poate fi dezvoltată

$$\frac{bW_0F_e}{F_d(y_0)}Y_1+\left(\frac{W_0F_e}{2\Delta p_0}+\frac{F_e}{\rho c}\right)p_1+\frac{Vd}{E}\dot{p}_1+F_e\dot{Y}_1=0. \tag{7}$$

Ecuațiile (2) și (7) împreună permit analiza stabilității curgerii la injector.

Prin eliminarea valorilor presiunii între aceste două ecuații, condiția generală de stabilitate la pulverizator este determinată de expresia

$$\frac{m_dV_d\dddot{y}_1}{E}+\left\{\frac{V_d}{E}C+m_d\left(\frac{W_0F_e}{2\Delta p_0}+\frac{F_e}{\rho c}\right)\right\}\ddot{y}_1+$$

$$+\left\{\frac{V_d}{E}K+F_z^2+C\left(\frac{W_0F_e}{2\Delta p_0}+\frac{F_e}{\rho c}\right)\right\}\dot{y}_1+\left\{K\left(\frac{W_0F_e}{2\Delta p_0}+\frac{F_e}{\rho c}\right)+\frac{bW_0F_zF_e}{F_d(y_0)}\right\}y_1=0. \tag{8}$$

Aplicînd criteriile de stabilitate Routh. Hurwitz ecuației (8), se obține domeniul de stabilitate prin condiția

$$z=m_dCA_{(y_0)}^2+\left(\frac{V_d}{E}C^2+m_dF_z^2\right)A_{(y_0)}+\left(\frac{V_d}{E}K+F_z^2\right)\delta\frac{V_d}{E}-$$

$$-\frac{b\sqrt{2KF_z(y_0+y_2)}}{E\sqrt{\rho}}m_dV_d\geqslant 0, \tag{9}$$

în care

$$A_{(y_0)}=\frac{F_d\sqrt{F_z}}{\sqrt{2\rho K(y_0+y_2)}}+\frac{F_e}{\sqrt{\rho E}}\text{ și }y_2=\frac{K_1}{K}.$$

Este foarte important să se accentueze faptul (că ecuația (9)) forma variației secțiunii libere de curgere (F_d) joacă un rol foarte important în stabilitatea curgerii la injector. Influența secțiunii libere la pulverizator este evidențiată de valoarea coeficientului b în ecuația (6). Apare evident din (8) că, în timpul unui ciclu de injecție, stabilitatea curgerii se schimbă în funcție de geometria acului.

O altă observație foarte importantă rezultă din faptul că, pe măsură ce sarcina motorului se schimbă, fiecare dintre parametrii geometrici ai secțiunii joacă un rol diferit privind stabilitatea curgerii prin pulverizator.

3. REZULTATE

În studiul acestei probleme au fost utilizate facilitățile Centrului de calcul al Universității tehnice din Michigan, rezultatele cercetărilor teoretice fiind prezentate în diagrame tridimensionale. Cercetarea stabili-

tăţii curgerii la injector a fost făcută cu un calculator digital, iar comportarea generală a procesului a fost cercetată utilizînd un model analogic în cadrul Laboratorului de modelări (Simulation laboratory) al aceleiaşi universităţi.

În figura 5 sînt prezentate variaţiile criteriului de stabilitate (z) în cazul unei curse de deplasare a acului de formă sinusoidală în funcţie de

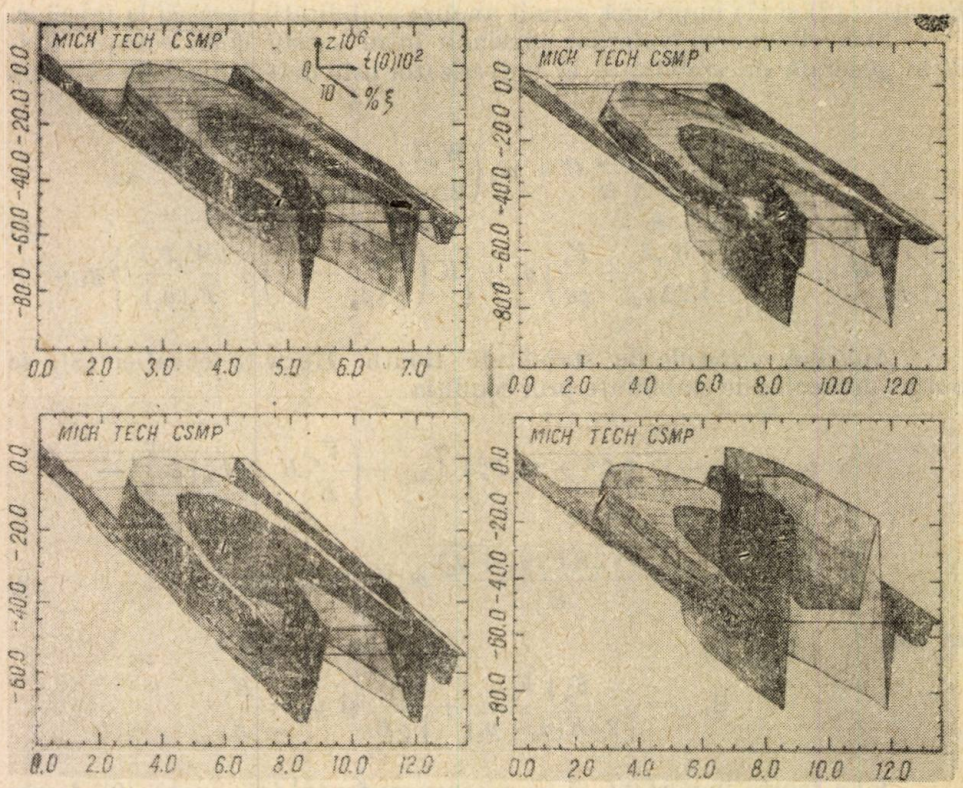


Fig. 5. — a) Domeniile de variaţie ale criteriului de stabilitate (z) în funcţie de timp (t) pentru diferite sarcini (ξ). b) Modificarea domeniilor o dată cu modificarea funcţiei $\psi(\alpha_1)$. c) Modificarea domeniilor o dată cu modificarea unghiului de racordare $f(\alpha_2)$. d) Modificarea domeniilor o dată cu schimbarea unghiului conului final.

timp (t) cînd sarcina (ξ) variază de la zero la 100% (plină sarcină a motorului).

Este evident că pentru o sarcină constantă (ξ = const) valorile criteriului de stabilitate (z) se modifică de mai multe ori în timpul unei injecţii (t) datorită diferitelor domenii de stabilitate (fig. 5*a*).

Cînd funcţia $\psi(\alpha_1)$ se schimbă (fig. 4), rezultă numai o mică alterare a valorii criteriului de stabilitate (fig. 5*b*), în special la începutul şi la sfîrşitul injecţiei. Deşi aceasta pare a fi nesemnificativă, trebuie să se noteze totuşi că începutul injecţiei controlează arderea combustibilului şi că dimensiunile picăturilor la sfîrşitul injecţiei determină arderea combustibi-

lului din ultima parte a procesului. De aceea unghiul conului de așezare a acului influențează randamentul ciclului.

Variația funcției $f(\alpha_2)$ (fig. 4) influențează în special valorile negative ale criteriului de stabilitate, care apar în special la mijlocul intervalului pentru sarcinile mijlocii. Schimbările funcției $\varphi(\alpha_3)$ (fig. 4) oferă cea mai mare influență asupra stabilității curgerii prin pulverizator (fig. 5*c*). Este posibil să se obțină toate regimurile de stabilitate, în special pentru sarcinile mari, controlînd valoarea conului final $\varphi(\alpha_3)$ al acului.

Notînd faptul că conul final al acului controlează atît forma jetului, cît și dimensiunile picăturilor, rezultă că acesta este unul dintre cei mai importanți parametri ai formei știftului acului. Importanța acestui unghi de con variază în funcție de sarcină. Figura 6 prezintă același grup de valori z, t și ξ pentru diferite sarcini $\xi = 10\%$ (a), $\xi = 30\%$ (*b*), $\xi = 90\%$ (c) cînd unghiul conului se schimbă continuu.

În afară de observațiile anterioare, în figura 6 apare evident faptul că funcția $\psi(\alpha_1)$ exercită o influență precumpănitoare la sarcini reduse. Ea controlează tot intervalul de curgere pentru sarcini mici, însă influența ei este redusă pe măsură ce sarcina crește.

Influența funcției $f(\alpha_2)$ (fig. 7) este nesemnificativă pentru sarcini mici ($\xi = 10\%$), însă devine cel mai important element pentru sarcini medii ($\xi = 45\%$); influența ei se reduce la sarcinile maxime ($\xi = 90\%$). Trebuie să se menționeze că, pentru toate formele de

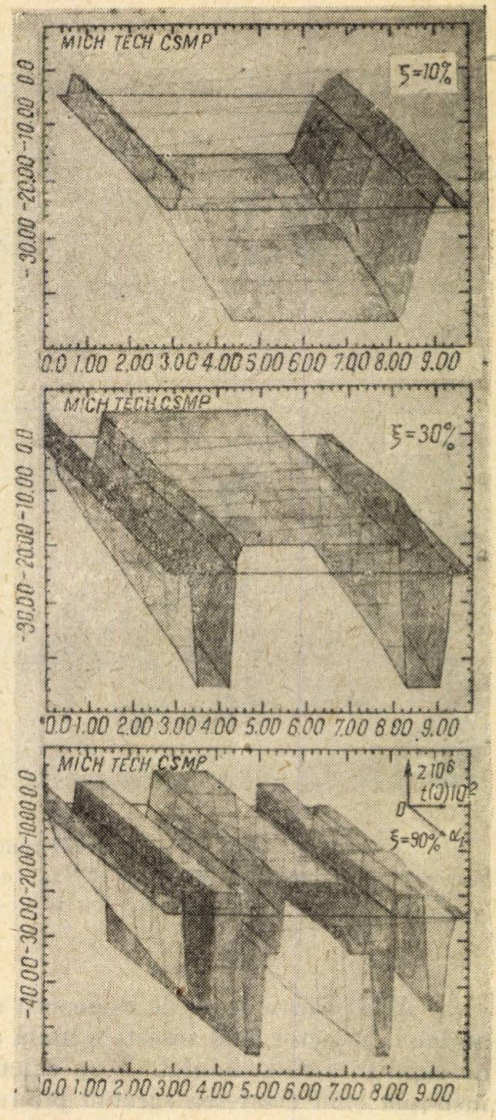


Fig. 6. — Domeniile de variație ale criteriului de stabilitate (z) în funcție de timp (t) și de creșterea continuă a valorii funcției $\psi(\alpha_1)$: *a* — sarcină $\xi = 100\%$; b — Sarcină $\xi = 30\%$; c — sarcină $\xi = 90\%$.

ac, valoarea funcției $f(\alpha_2)$ afectează domeniile instabile de curgere În același mod se poate observa și rolul funcției $\varphi(\alpha_3)$ (fig. 8) exercitat asupra stabilității curgerii. Este foarte clar faptul că acest parametru este important pentru sarcinile mari. El controlează trecerea de la regimuri instabile la cele stabile.

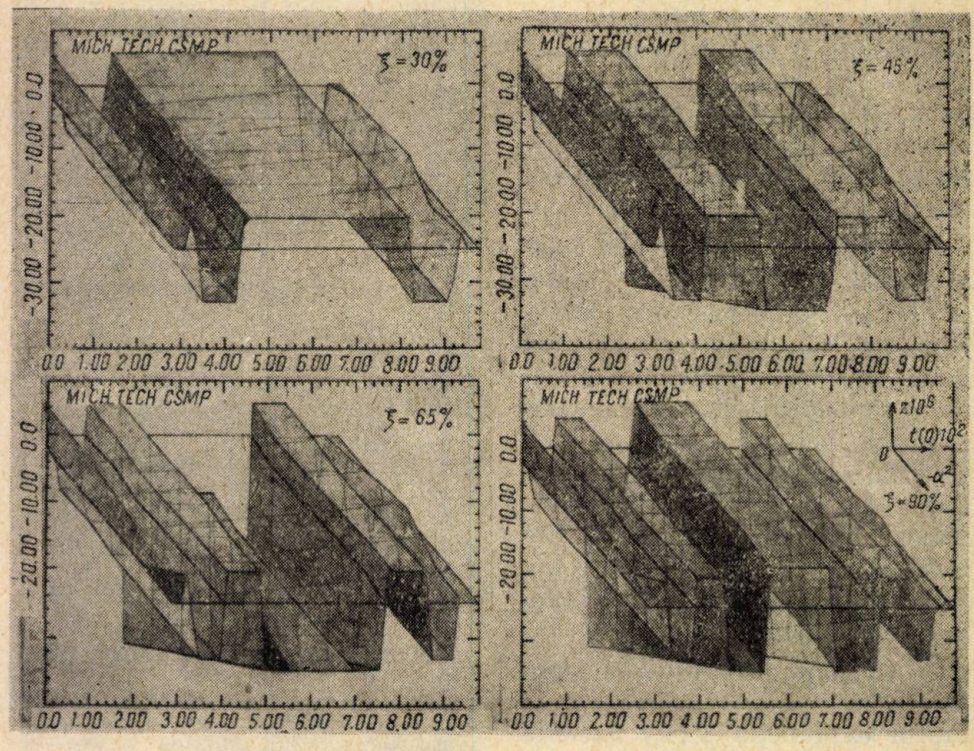


Fig. 7. — Domeniile de variație ale criteriului de stabilitate (z) în funcție de timp (t) și de creșterea continuă a valorii funcției $f(\alpha_2)$: a — sarcină $\xi = 30\%$; b — sarcină $\xi = 45\%$; c — sarcină $\xi = 65\%$; d — sarcină $\xi = 90\%$.

Acest cadru oferă de asemenea o explicație asupra fenomenelor care au loc la injector cînd sosește o undă de presiune de la pompă. Ansamblul de condiții a fost simulat pe un calculator analogic pentru a arăta ce se întîmplă cînd creșterea sarcinii produce o undă de presiune de formă sinusoidală (fig. 9).

Apare evident faptul că, în timpul unei injecții la diferite sarcini, forma generală a cursei acului se schimbă, trecînd din domeniile stabile pentru sarcini reduse prin domenii instabile pentru sarcini medii în domenii mai puțin instabile pentru sarcini foarte mari.

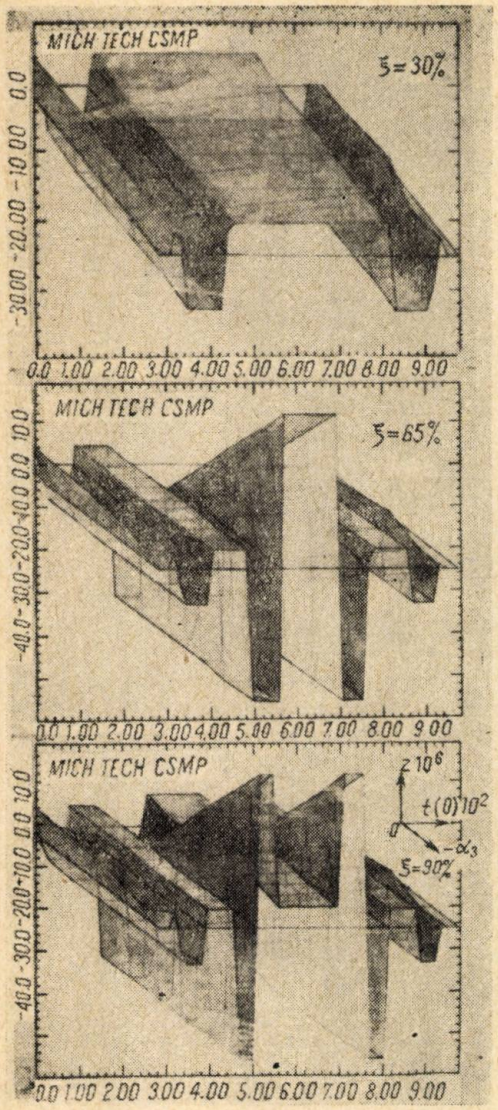
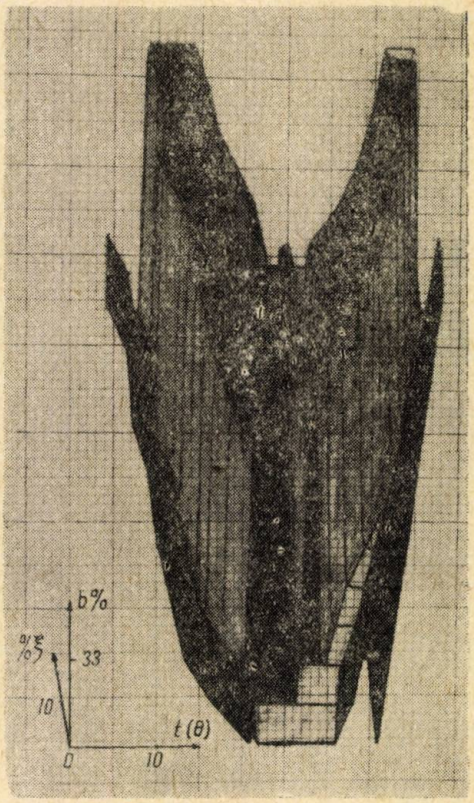


Fig. 8. — Domeniile de variație ale criteriului de stabilitate (z) în funcție de timp (t) și de creșterea continuă a valorii funcției φ (α^3): a — sarcină $\xi = 30\%$; b — sarcină $\xi = 65\%$; c — sarcină $\xi = 90\%$.

Fig. 9. — Variația teoretică a coeficientului b (relația (6)) în funcție de timp (t) și de sarcină (ξ) în cazul injecției reale (modelare pe calculator hibrid).



Rezultatele acestei lucrări pun la dispoziție un nou punct de vedere în înțelegerea și controlul proceselor de injecție a combustibilului în motoare.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Teodorescu, *Influența geometriei secțiunii de curgere la acul pulverizatorului asupra stabilității proceselor de lucru la injector*, St. cerc. energ. electr., **18**, 2 (1968).
2. Wilfried Höfken, *Der Einfluss der baulichen Auslegung von Einspritz ventilen auf das Schnarrverhalten des Ventilnadel*, MTZ, **24**, 1 (1963).
3. A. Pischinger, *Gemishbildung und Verbrennung in Diesel motor*, Viena, Springer-Verlag, 1967.

DISTRIBUȚIA VITEZELOR ÎN STRATUL-LIMITĂ TURBULENT LA BORDUL DE FUGĂ AL REȚELELOR STATORICE CU PALETE RĂSUCITE

DE

STERIE ȘTEFAN

621.438

Lucrarea prezintă date cu privire la valoarea exponentului distribuției vitezei n în stratul-limită în cazul rețetelor de palete cu rapoarte $d/l < 10$.

Stratul-limită, observat întîia oară de Hele-Shaw și descris dimensional și structural de Jucovski, permite abordarea studiului curgerii unui fluid viscos în jurul unui obstacol, considerînd o curgere potențială de bază suprapusă cu o curgere cu frecare în zona stratului-limită.

În direcția de curgere a fluidului de-a lungul obstacolului, grosimea stratului-limită are o variație crescătoare. În amontele obstacolului, de obicei curgerea este laminară, după care urmează o zonă de tranzit în care curgerea este atît laminară în vecinătatea obstacolului, cît și turbulentă. După zona de tranzit se obține un strat turbulent stabil.

Mișcarea turbulentă, caracterizată de pulsații ale vitezei, presiunii și temperaturii, de traiectorii dezordonate ale particulelor, schimb intensiv de masă și de căldură, conduce la mari dificultăți în rezolvarea sistemului de ecuații care caracterizează mișcarea fluidului în stratul-limită.

Pentru rezolvarea aproximativă se consideră fluidul mediu continuu, iar valorile instantanee ale presiunii și temperaturii fluidului verifică sistemul de ecuații Navier-Stokes.

Ecuațiile stratului-limită turbulent în mișcarea plană și staționară pentru fluid compresibil au forma

$$\frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v})}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \varepsilon)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 795–799, 1970

$$\overline{\rho u}\frac{\partial(\overline{c_p T})}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial(\overline{c_p T})}{\partial y}=\overline{u}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+\lambda_\varepsilon)\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right]+(\mu+\varepsilon)\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2, \tag{4}$$

$$\overline{p}=\overline{\rho}R\overline{T}, \tag{5}$$

unde coeficienții de viscozitate turbulentă ε și conductibilitate turbulentă λ_ε sînt exprimați prin

$$-\overline{(\rho v)'u'}=\varepsilon\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \tag{6}$$

$$-\overline{c_p(\rho v)'T'}=\lambda_\varepsilon\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}. \tag{7}$$

Din sistem rezultă că în cazul mișcării turbulente tensiunea de frecare se prezintă ca suma dintre tensiunea corespunzătoare viscozității moleculare $\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)$ și a viscozității turbulente $\left(\varepsilon\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)$, iar parametrii — presiune, densitate etc. — în toate ecuațiile se consideră ca mărimi medii și se notează cu bară.

Pentru λ_ε, ε se adoptă expresii obținute din teoriile semiempirice ale turbulenței [1]. Relațiile dintre mărimile caracteristice turbulente și viteza medie se determină din teoria schimbului de impuls (Prandtl), din teoria schimbului de turbioane (Taylor) sau din teoria similitudinii pulsațiilor (Kárman).

Rezolvarea numerică a problemei necesită cunoașterea distribuției vitezei în strat , dată în forma [1]—[4]

$$u=U_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^n.$$

Obținerea caracteristicilor aerodinamice ale rețelelor de palete este de asemenea condiționată de cunoașterea distribuției vitezei în stratul-limită.

Pentru rezolvarea analitică a problemei privind determinarea caracteristicilor rețelelor statorice cu palete răsucite au fost experimentate trei tipuri de rețele cu palete, profilate după legile $rc_{1u}=\text{const}$, $\alpha_1=\text{const}$, $\rho c_z=\text{const}$. în scopul obținerii exponentului n din expresia distribuției vitezei în strat.

Caracteristicile rețelelor experimentale sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Secțiune în paletă	Notații experiențe	t mm	d/l	α_y° (unghi de așezare în rețea)		
				$rc_{1u}=\text{const}$	$\alpha_1=\text{const}$	$\rho c_z=\text{const}$
Bază	□	44,0		46°20′	45°58′	46°20′
1	Δ	49,5		46°25′	45°20′	46°30′
2	×	55,0	5	48°35′	45°00′	47°00′
3	○	60,5		50°30′	46°00′	45°50′
Periferie	●	66,0		52°50′	44°55′	46°05′

Cum parametrii din aval de rețea se pot calcula cu datele din secțiunea bordului de fugă al rețelei [3], s-a determinat variația vitezei în secțiunile de ieșire a rețelelor pentru două condiții de experimentare C E 1 și C E 2, conform tabelei 2.

Tabela 2

Parametrii în amonte de rețea		P_t [mm H_2O]/P_s [mmH_2]		
		$r\ c_1 = \text{const}$	$\alpha_1 = \text{const}$	$\rho c_z = \text{const}$
INTRADOS	CE1	325/45	337/33	334/131
	CE2	662/92	643/54	673/273
EXTRADOS	CE1	330/31	337/90	331/40
	CE2	662/60	640/58	672/90

În scopul măsurării parametrilor în aval de rețea s-a montat o sondă tip pieptene pe un suport cu patru grade de libertate, care permite măsurarea presiunii în cinci secțiuni în lungul paletei ($l = 80$ mm) și la orice distanță în lungul pasului t. Secțiunea de bază și periferie în care s-au făcut măsurările au fost la 10 mm de capete.

Prelucrarea datelor scot în evidență o apropiere de datele literaturii de specialitate numai în parte. De altfel domeniul rețelelor cu raport $d/l < 10$ pune probleme speciale, iar datele obținute pentru rapoarte $d/l > 10$ nu pot fi extrapolate fără cercetări prealabile.

Dacă pe intradosul paletei distribuția vitezei în strat păstrează pentru $\alpha_1 = \text{const}$ și $rc_1 = \text{const}$ o alură acceptată unanim [1]—[4], pe extradosul paletei valoarea exponentului n din distribuția vitezei este de 1/4 pentru $\alpha_1 = \text{const}$ și $\rho c = \text{const}$, crescînd pînă la 2/3 în cazul rețelei cu palete profilate după legea $rc_1 = \text{const}$.

Datele prezentate permit stabilirea mai corectă a pierderilor de energie prin rețele cu palete răsucite și cu rapoarte $d/l < 10$.

BIBLIOGRAFIE

1. Х. А. Рахматулин и др., *Газовая динамика*, Москва, Изд-во физ.—мат. лит., 1965.
2. Н. М. Марков, *Теория и расчет лопаточного аппарата осевых турбомашин*, Москва-Ленинград, Техиздат, 1966.
3. Г. Ю. Степанов, *Гидродинамика решёток турбомашин*, Москва, Изд-во физ. — —мат. лит., 1962.
4. М. Е. Дейч, *Техническая газодинамика*, Москва-Ленинград, Техиздат, 1961.
5. V. Pimsner, St., Ștefan, *Studiu experimental al rețelelor de palete*, Memoriu intern, Institutul de energetică, 1969.

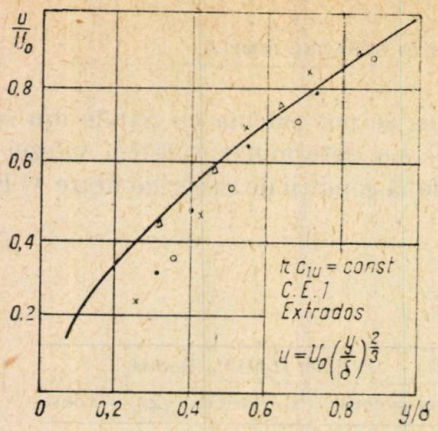


Fig. 1. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea rc_{1u} = const (CE1).

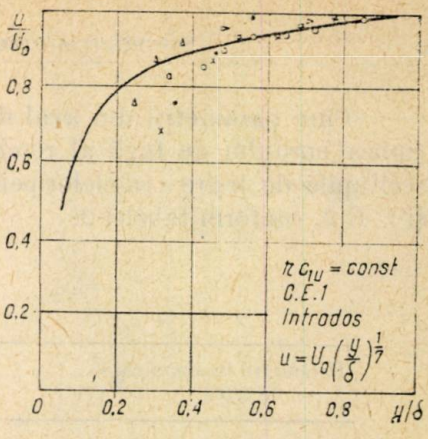


Fig. 2. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea rc_{1u} = const (CE1).

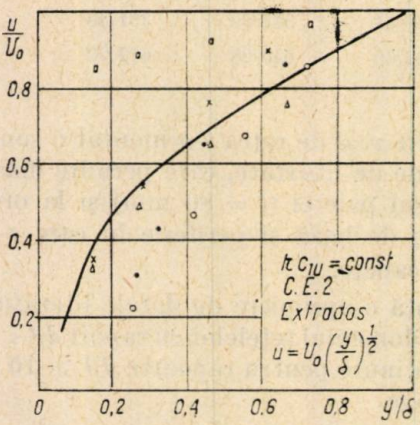


Fig. 3. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea rc_{1u} = const (CE_2).

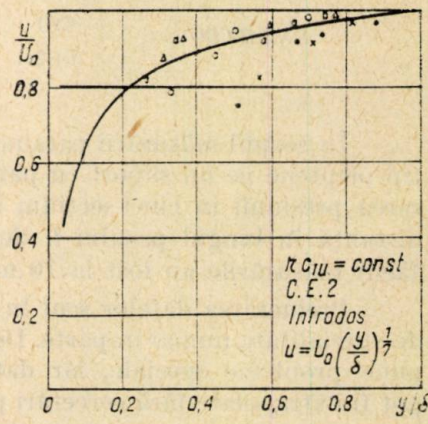


Fig. 4. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea rc_{1u} = const (CE_2).

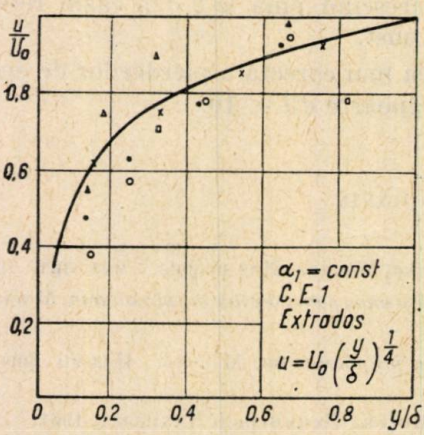


Fig. 5. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea α_1 = const (CE1).

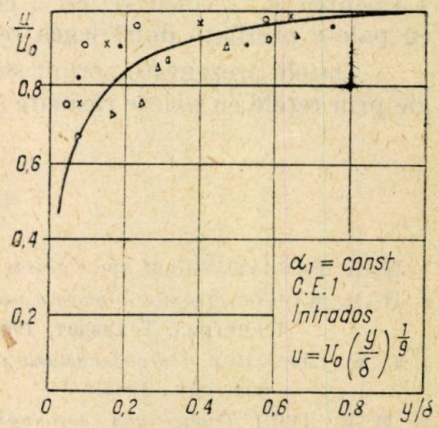


Fig. 6. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea α_1 = const (CE1).

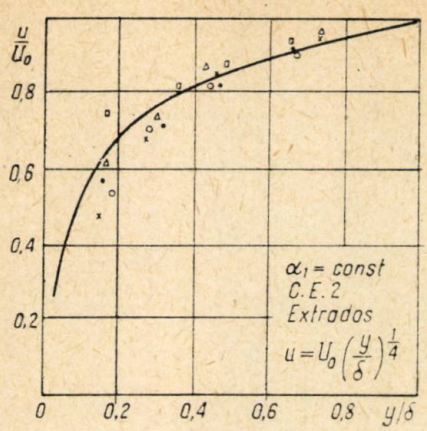


Fig. 7. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea $\alpha_1 = \text{const}$ (CE2).

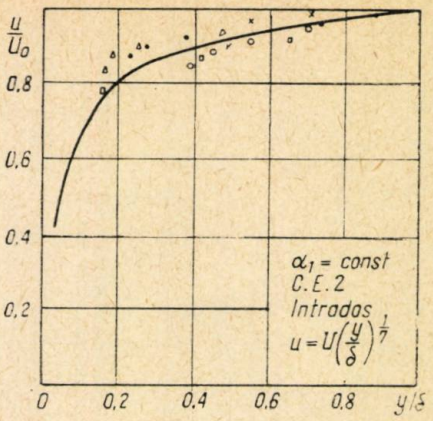


Fig. 8. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea $\alpha_1 = \text{const}$ (CE2).

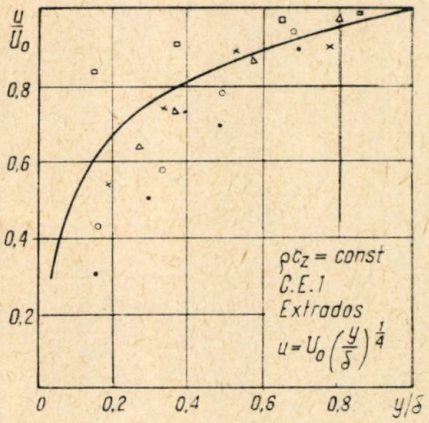


Fig. 9. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea $\rho c_z = \text{const}$ (CE1)

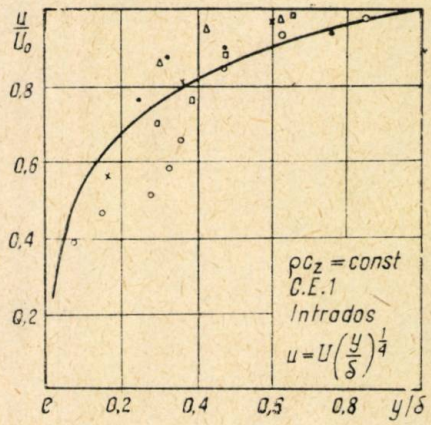


Fig. 10. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea $\rho c_z = \text{const}$ (CE1).

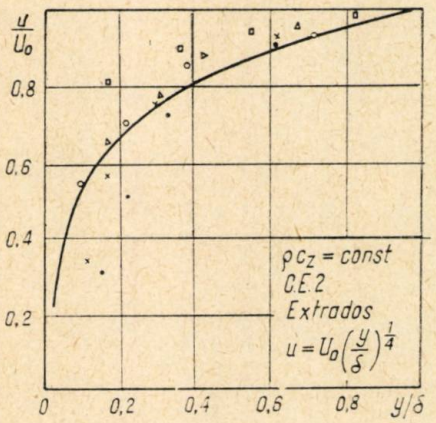


Fig. 11. — Variația grosimii stratului-limită pe extradosul paletei profilate după legea $\rho c_z = \text{const}$ (CE2).

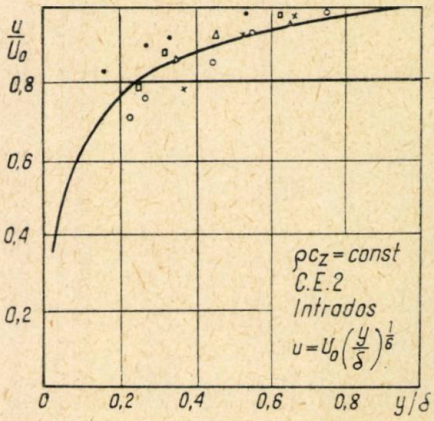
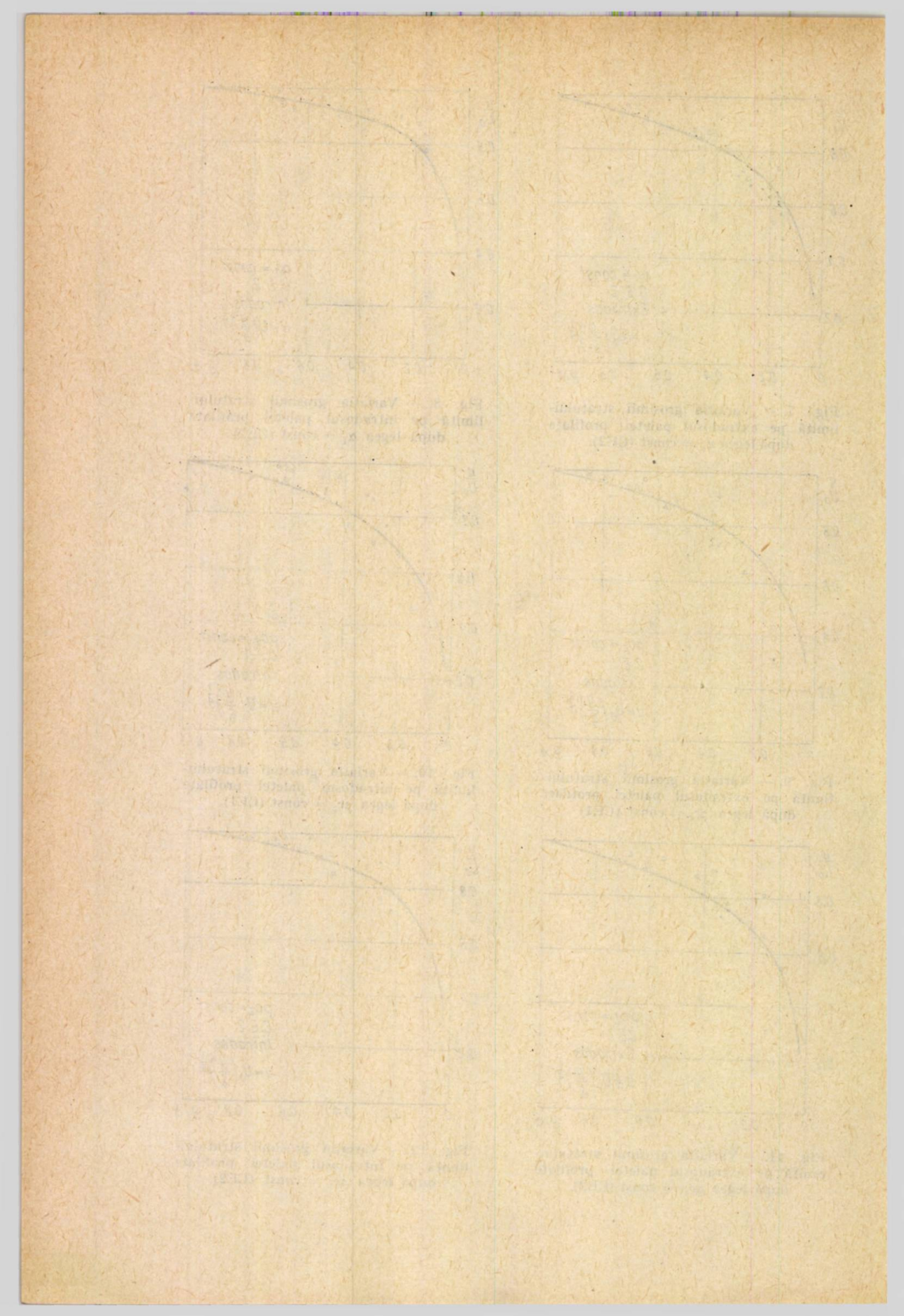


Fig. 12. — Variația grosimii stratului-limită pe intradosul paletei profilate după legea $\rho c_z = \text{const}$ (CE2).



RAPORTUL DE REGLARE A DEBITULUI LA INJECTOARELE CU CAMERA DE TURBIONARE. DEPENDENȚA ACESTUIA DE PARAMETRII GEOMETRICI AI CAMEREI

DE

BAZIL POPA

621.694

Procesul de curgere este influențat de orificiile de ieșire d_e și de diametrul orificiului de retur d_r.

Raportul de reglare se modifică o dată cu variația cîtului secțiunilor de curgere a fluidului.

Lucrarea a stabilit factorii de influență asupra raportului de reglare m, valoarea optimă a raportului S_e/S_r și valoarea raportului $m_{max\ max}$.

Cercetările au arătat că injectoarele închise corespund unor valori mai mari ale raportului de reglare, în schimb hidrodinamica mișcării turbionare este mai puțin favorabilă.

Lucrarea recomandă pentru proiectare realizarea de injectoare avînd valoarea simplexului $d_e/d_c = 0{,}3 \ldots 0{,}4$, adică injectoare de categoria celor aproape închise, realizîndu-se astfel valori sporite pentru m_{max} fără a prejudicia condițiile mișcării turbionare.

1. INTRODUCERE

Printre dezavantajele injectoarelor cu cameră de turbionare fără retur (fig. 1) se menționează limitarea îngustă a domeniului de reglare. Remedierea acestui neajuns se poate realiza folosind procedeul recirculării unei fracțiuni din debitul total (fig. 2) printr-o conductă de retur.

Reglarea debitului se asigură prin ventilul V_R dispus pe conductă (fig. 3).

Analiza procesului de retur se efectuează determinînd raportul de reglare a debitului recirculat $m = \frac{D_r}{D}$.

Presiunea maximă stabilită în conducta de întoarcere $p_{r,max}$, în cazul cînd ventilul de reglare de pe conductă este închis, are valoarea zero atunci

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 801—808, 1970

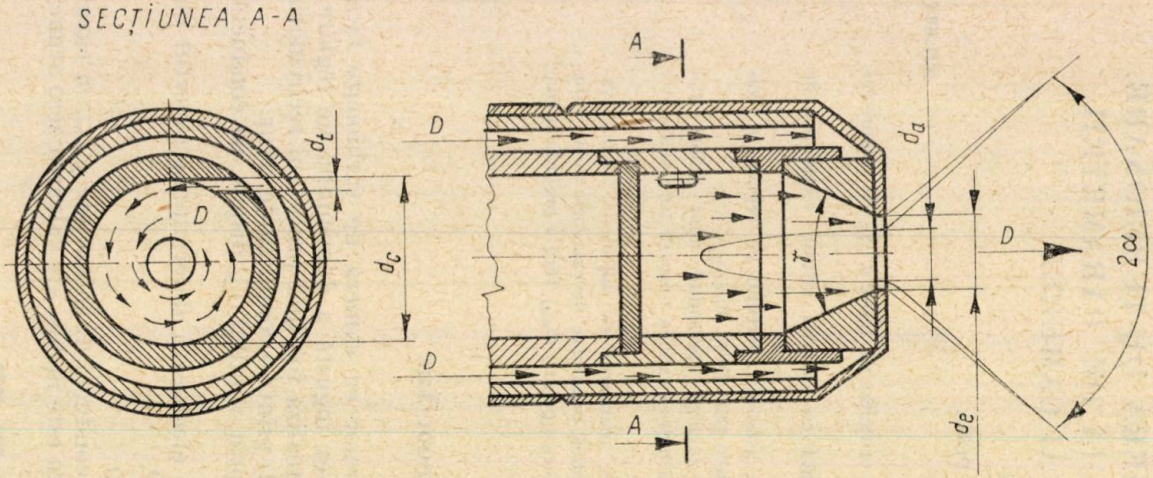


Fig. 1. — Schița injectorului cu cameră de turbionare.

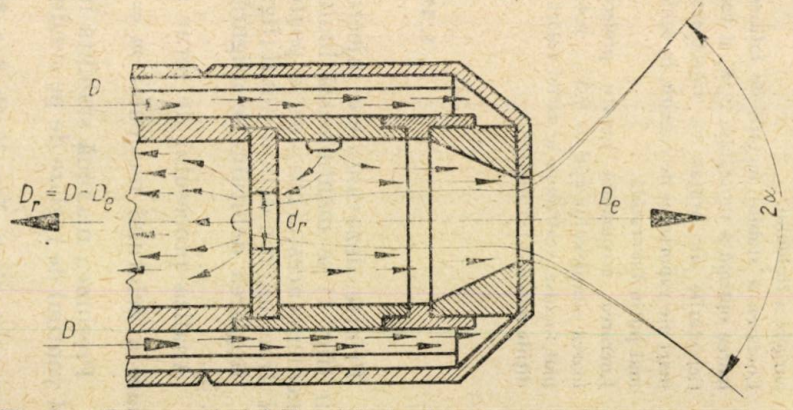


Fig. 2. — Schema principială a injectorului cu cameră de turbionare și orificiu de intoarcere.

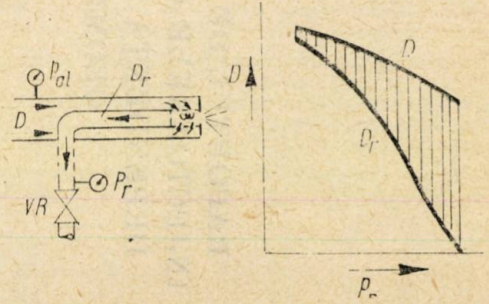


Fig. 3. — Injector cu cameră de turbionare cu reglarea debitului prin întoarcere.

cînd diametrul orificiului de întoarcere d_r este mai mic sau egal cu cel al turbionului de aer d_a.

O dată cu creşterea diametrului d_r creşte şi valoarea presiunii $P_{r\,max}$, iar prin manevrarea ventilului V_R debitul recirculat D_r şi debitul efectiv D_e se pot varia în diferite limite. Pentru o deschidere totală a ventilului, prin conducta de întoarcere curge debitul maxim $D_{r\,max}$, presiunea din conducta de întoarcere fiind minimă [3].

Experienţele numeroase care s-au efectuat cu un număr diferit de camere de turbionare şi în diferite combinaţii au necesitat pentru o mai uşoară urmărire şi sistematizare a lor adoptarea unui sistem propriu de notaţie convenţional, privind dimensiunile geometrice ale camerei experimentale.

Ele au fost aranjate în următorul grupaj utilizat:

$$\left|\begin{array}{c|c} d_e & d_t \\ \hline d_c & d_r \end{array}\right| .$$

2. CERCETĂRI EXPERIMENTALE

Limitele raportului m depind de dimensiunile geometrice ale camerei şi de raportul secţiunilor de ieşire S_e şi de recirculare S_r, raport care trebuie să se înscrie într-un diapazon cît mai larg.

Pentru un diametru de ieşire d_e const, o dată cu creşterea diametrului de întoarcere d_r creşte presiunea maximă de recirculare, deci şi debitul D_r, ceea ce face ca raportul de reglare $m_{max} = D_{r\,max}/D$ să crească.

Evidenţierea alurei curbei de dependenţă $m_{max} = f\left(\frac{d_e}{d_r}\right)^2$ s-a făcut prin experimentări care arată existenţa unei valori maximum maximorum a raportului de reglare m_{max}, căreia îi corespunde o valoare optimă pentru raportul secţiunilor de ieşire ale fludiului S_e/S_r.

Curbele experimentale din figurile 4—6 au aceeaşi alură generală, prezentînd următoarele aspecte:

Pentru diametre mici faţă de diametrul camerei ($d_e = 3$ mm), valoarea optimă a raportului secţiunilor S_e/S_r cunoaşte o zonă mai îngustă pentru care m_{max} cunoaşte valoarea cea mai mare. O dată cu creşterea diametrului d_e, intervalul valorilor optime ale raportului S_e/S_r creşte, în schimb raportul de reglare m_{max} cunoaşte valori mai mici.

Cu cît diametrul d_e este mai mic raportat la acelaşi diametru al camerei de turbionare, adică cu cît injectorul este mai închis, cu atît raportul de reglare m_{max} are valori mai mari. În consecinţă, sub aspectul reglării sînt mai avantajoase injectoarele închise faţă de cele deschise.

La diametre diferite de ieşire (d_e), la aceeaşi presiune de alimentare ($p_{a1} = 15$ bar) şi la diferite diametre tangenţiale d_t, rezultă că influenţa valorilor diametrelor tangenţiale este mai puţin pregnantă în comparaţie cu diametrul de ieşire d_e, aşa cum se poate vedea din compararea fami-

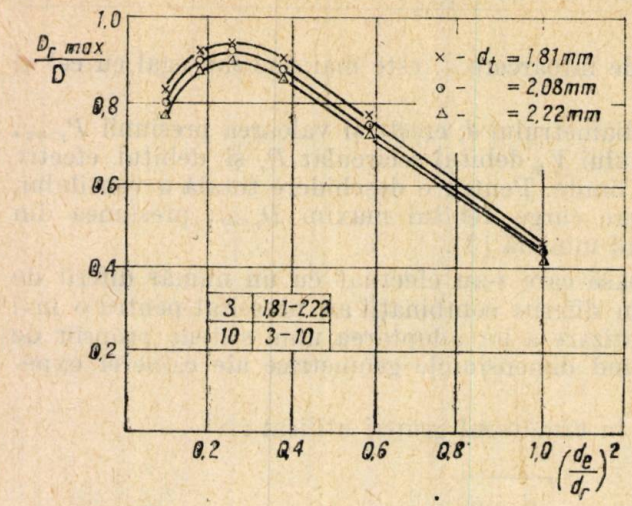


Fig. 4. — Dependența $\frac{D_{r max}}{D} = f\left(\frac{S_e}{S_r}\right)$ pentru $d_e = 3$ mm.

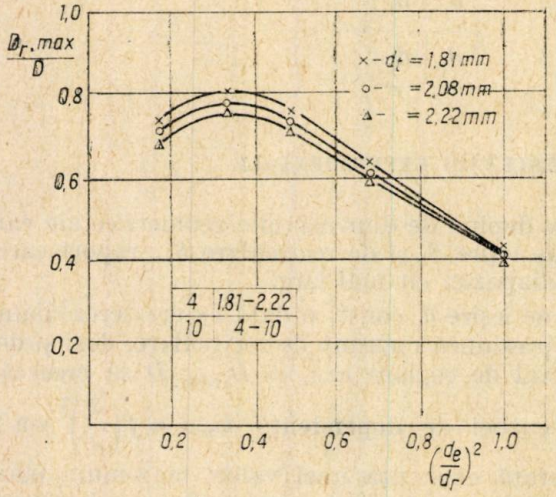


Fig. 5. — Dependența $\frac{D_{r max}}{D} = \left(f\frac{S_e}{S_r}\right)$ pentru $d_e = 4$ mm.

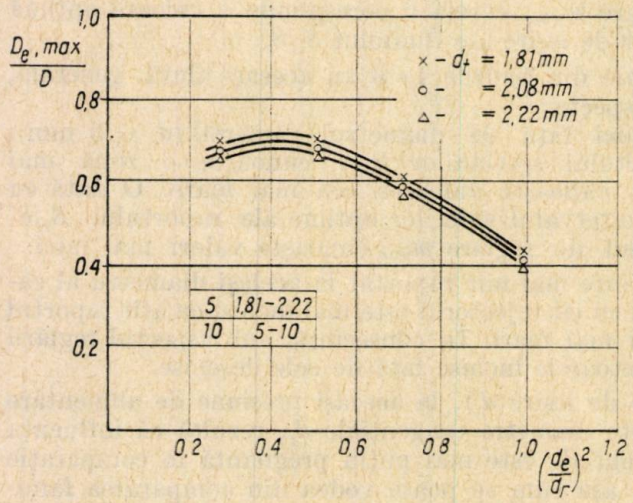


Fig. 6. — Dependența $\frac{D_{r max}}{D} = \left(f\frac{S_e}{S_r}\right)$ pentru $d_e = 5$ mm.

liilor de curbe din figurile 4—6. Influența diametrului tangențial asupra valorilor lui m_{max} este mică (2—3%), de aceea aceasta se poate neglija, fiind în limita erorilor de măsurare. După atingerea valorii maxime, raportul $D_{r\,max}/D$ cunoaște o ușoară descreștere pentru valori minime ale raportului S_e/S_r.

Deoarece o dată cu mărirea orificiului de recirculare se modifică și condițiile de curgere din injector, presiunea maximă de retur $p_{r\,max}$ este cu mult mai mică decît cea medie p_{med} stabilizată pe capacul camerei fără orificiu de recirculare [3]; acest fapt provoacă descreșterea raportului de reglare m_{max}, ducînd și la o înrăutățire a calității pulverizării pentru valori mai mici ale raportului S_e/S_r față de valoarea optimă.

Pentru a cunoaște influența și a celorlalți factori geometrici asupra raportului de reglare și anume a lungimii camerei de turbionare l_c, aceasta a cunoscut următoarele valori experimentale : $l_c = 10$, 12, 14, 16 și 18 mm. Din figura 7 rezultă că pentru același injector lungimea camerei nu influențează raportul de reglare m.

În ceea ce privește mărirea lungimii camerei de turbionare, în general trebuie arătat că aceasta duce la forțe de frecare mai mari. O dată cu mărirea frecării însă, debitul total descrește. Pe de altă parte, mărirea forțelor de frecare micșorează viteza tangențială a fluidului din cameră, deci și energia de rotație. Aceasta are drept consecință o micșorare a miezului de aer, secțiunea efectivă S_{ef} crește, caracteristica turbionului de aer b scade, ducînd la o creștere a debitului. Din aceste două efecte contrare, preponderent este cel de-al doilea efect, în final obținîndu-se o creștere a debitului injectorului, fapt observat în experiențele efectuate. Diametre diferite ale camerei de turbionare $d_c = 10$, 15 și 20 mm dau aceeași alură a valorilor raportului m (fig. 8).

Din diagramele figurilor 4—6, care au aceeași formă generală, rezultă o curbă medie (neglijînd influența diametrului tangențial, lungimea camerei de turbionare și diametrul ei) la diferite diametre de ieșire și întoarcere, curbă care evidențiază o valoare optimă a raportului secțiunilor S_e/S_r cuprinsă între 0,3 și 0,4, valoare pentru care raportul maxim de reglare este în medie de 0,7—0,9 (fig. 9). Pentru valoarea sa maximă (0,9), debitul de ieșire D_e față de cel total se găsește în raportul 1 : 10. Pentru a nu micșora prea mult raportul m, respectînd și condiția $d_e/d_c > 0{,}25$ [2], rezultă necesitatea construirii de injectoare pentru care simplexul d_e/d_c să varieze între 0,3 și 0,4.

Valoarea raportului de reglare n_{min}, adică a debitului minim ieșit prin duză raportat la debitul total, se poate deduce din curba medie (fig. 9), știind că

$$n_{min} = \frac{D_{e\,min}}{D} = 1 - m_{max} = 1 - \frac{D_{r\,max}}{D}.$$

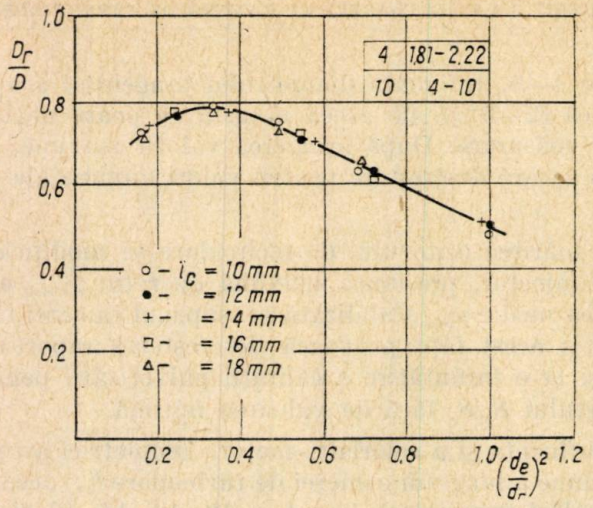


Fig. 7. — Influența diametrului camerei de turbionare asupra dependenței $m = f(S_e/S_r)$.

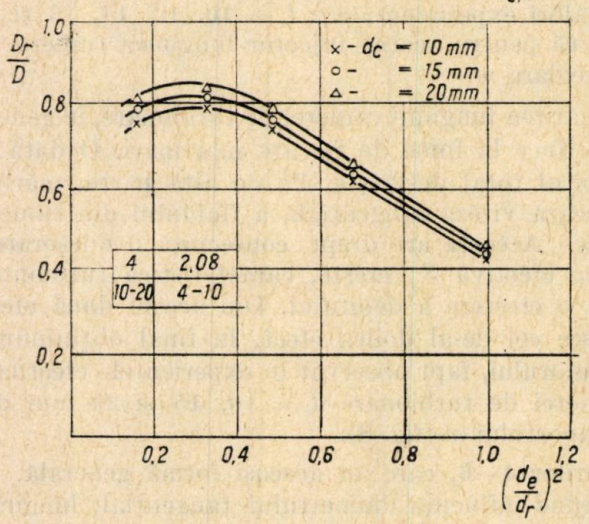


Fig. 8. — Influența diametrului camerei de turbionare asupra dependenței $m = f(S_e/S_r)$.

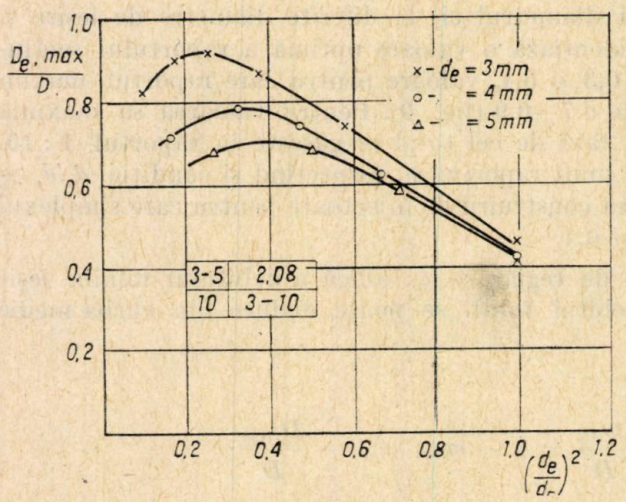


Fig. 9. — Curba medie pentru determinarea raportului maxim de reglare $m_{max} = f(S_e/S_r)$.

În ceea ce privește influența presiunii de alimentare, figura 10 exprimă dependența $m_{max} = f(S_e/S_r)$ pentru injectorul $d_t = 2{,}08$ la diferite presiuni de alimentare, din care rezultă că aceasta nu influențează practic raportul de reglare.

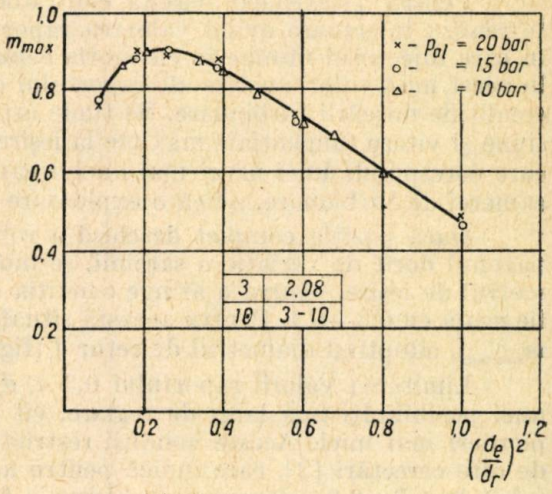


Fig. 10. — Dependența $m_{max} = f(S_e/S_r)$ pentru diferite presiuni de alimentare.

3. CONCLUZII

O influență deosebită asupra procesului de curgere îl au orificiile de evacuare ale fluidului, și anume diametrul de ieșire d_e pentru injectorul fără întoarcere, iar pentru injectorul cu întoarcere atît diametrul de ieșire d_e, cît și diametrul orificiului d_r, adică raportul secțiunilor de ieșire și de întoarcere S_e/S_r.

Modificarea raportului secțiunilor de curgere a fluidului S_e/S_r schimbă valoarea presiunii de recirculare și o dată cu aceasta raportul de reglare. Lucrarea a determinat pe cale experimentală valoarea optimă a raportului secțiunilor de evacuare S_e/S_r și raportul de reglare $m_{max.\ max}$ corespunzător.

Grupa experiențelor efectuate pentru a stabili factorii de influență asupra raportului de reglare m evidențiază aceeași alură a curbelor m_{max} funcție de raportul dintre secțiunea de ieșire și cea de recirculare (S_e/S_r) pentru diferite dimensiuni geometrice ale camerei, arătînd totodată o neînsemnată influență a diametrului tangențial, a presiunii de alimentare, a lungimii camerei de turbionare și chiar a diametrului ei. Cercetările întreprinse au evidențiat pentru diferite diametre de ieșire un domeniu optim de reglare $S_e/S_r = 0{,}3 \ldots 0{,}4$, căruia îi corespunde o valoare maximă determinată a raportului de reglare cuprinsă între 0,7 și 0,9, funcție de diametrul de ieșire pentru un fluid dat (cercetările au fost efectuate cu motorină).

Stabilirea acestor valori și a factorilor care influențează procesul de retur este o măsură a modului cum injectorul răspunde condițiilor de sarcini variabile. Cu cît injectorul este mai „închis", adică raportul $d_e/d_e = c$ este mai mare, deci un diametru d_e mai mic la același diametru

d_c al camerei), cu atît raportul de reglare m_{max} cunoaşte valori mai mari. În schimb, hidrodinamica mişcării turbionare a acestor injectoare este influenţată de valoarea simplexului $d_e/d_c = 1/c$, simplex indicat a avea valori peste 0,25 [2].

Pentru a satisface această contradicţie se propune la proiectare a se realiza injectoare avînd valoarea raportului $d_e/d_c = 0{,}3 \ldots 0{,}4$, cazuri în care injectorul rămîne în categoria celor apropiat închise. Se realizează în acest mod valori sporite ale raportului de reglare m_{max} fără a prejudicia condiţiile mişcării turbionare. Se tinde astfel spre pierderi minime de presiune şi viteze tangenţiale maxime la ieşirea din duza injectorului, situaţie care corespunde unei uzuri mai mici a canalelor tangenţiale şi a pereţilor camerei de turbionare, adică o exploatare de mai lungă durată.

Dacă poziţia complet deschisă a robinetului de retur nu oferă diapazonul dorit de variaţie a sarcinii, se modifică injectorul, micşorînd diametrul de ieşire, pentru a atinge condiţia ca valoarea simplexului d_e/d_c să fie egală cu 0,3—0,4. Pentru această situaţie, m_{max} poate creşte la valoarea $m_{max\,max}$, adoptînd diametrul de retur d_r (fig. 9) pentru raportul optim S_e/S_r.

Limitarea valorii raportului $0{,}3 < d_e/d_c < 0{,}4$ acoperă atît condiţia unei posibilităţi mai largi de reglare, cît şi a unei curgeri turbionare cu pierderi mai mici. Aceste condiţii restrictive diferă de cele recomandate de alte cercetări [2], care indică pentru acest simplex valori şi mai mari (pînă la 0,8—0,9), deoarece problema a fost tratată numai sub aspectul realizării unei curgeri cu minime pierderi şi pentru injectoare fără întoarcere.

BIBLIOGRAFIE

1. I. G. Bowen, *The spill pressure-jet atomizer*, în Journal of the Institute of Fuel, **XXXV**, *262*, 484—495 (1962).
2. V. A. Pavlov, Ia. P. Starojuk, *Rasceot i konstruirovanie mehaniceskih forsunok*, în Energomaşinostroenie, **12**, *3*, 8 — 11 (1966).
3. B. Popa, *Contribuţii la studiul cîmpului presiunilor în camera turbionară a injectoarelor mecanice*, Litografia Institutului politehnic Timişoara, 1969.

CORELAȚIE ÎNTRE PRODUȘII POLUANȚI ÎN GAZELE DE EVACUARE LA UN MOTOR CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE ȘI NEUNIFORMITATEA PROCESELOR DIN CILINDRI[1]

DE

C. A. VASILESCU, L. TEODORESCU, I. ȘTEFAN, V. HARBUR, ST. MANEA, I. MINEA, O. BERCEA și D. MIHAI

621.434

În lucrare se prezintă o analiză teoretică pe bază de calcule a influenței unor factori funcționali și constructivi asupra proceselor din motoarele cu aprindere prin scînteie și se corelează aceste date cu măsurătorile efectuate în laborator asupra nivelului produșilor poluanți în gazele de evacuare.

Se urmărește să se scoată în evidență ponderea cu care acești factori intervin în condiționarea neuniformității funcționale a cilindrilor motorului și, respectiv, asupra produșilor de emisie ai acestora.

1. INTRODUCERE

Realizarea unui motor cu aprindere prin scînteie la nivelul cerut de tehnica actuală solicită tot mai imperios, în afara condițiilor de economicitate și de fiabilitate, reducerea diferitelor categorii de noxe din gazele de evacuare. Studiile ample efectuate în această direcție în diferite laboratoare au putut defini natura factorilor nocivi și condițiile în care ei apar. Rezultă, cel puțin teoretic, că se poate stăpîni, prin intermediul parametrilor funcționali și eventual constructivi, nivelul cantității de produși poluanți în gazele de evacuare. Dar corelația este complexă și ea se modifică la schimbarea condițiilor de lucru. Or, ceea ce caracterizează funcționarea motorului cu aprindere prin scînteie montat pe autovehicule este variația parametrilor săi atît de la regim la regim, cît și de la cilindru la cilindru, aceasta din urmă conducînd la o neuniformitate a proceselor între cilindrii aceluiași motor. În același timp, corelația dintre parametrii funcționali

[1] Lucrare prezentată la a doua Conferință internațională de motoare cu ardere internă, București, iunie 1970

sau constructivi şi economicitatea motorului se modifică de multe ori după o altă dependenţă decît cea care precizează un anumit nivel al emisiei de noxe.

În ideea de a stabili unele concluzii legate de posibilitatea îmbunătăţirii motoarelor cu aprindere prin scînteie fabricate în ţara noastră, a apărut necesitatea efectuării unei cercetări care să permită o examinare multilaterală a influenţei acestor factori.

În lucrare se reamintesc unii dintre factorii care conduc la neuniformităţi ale proceselor din cilindri, se examinează pe bază de calcule influenţa unor factori funcţionali şi constructivi asupra proceselor din motoarele cu aprindere prin scînteie şi se corelează aceste date cu măsurători efectuate în laborator.

2. NEUNIFORMITĂŢI ÎNTRE CONDIŢIILE DE LUCRU ALE DIFERIŢILOR CILINDRI DE LA ACELAŞI MOTOR

Este cunoscut faptul că la motoarele cu aprindere prin scînteie poate varia de la cilindru la cilindru raportul volumetric de comprimare, avansul la declanşarea scînteii electrice şi dozajul.

Variaţia raportului volumetric de comprimare între diferiţii cilindri afectează mărimile de stare ale fluidului de lucru la sfîrşitul cursei de compresiune; acestea sînt modificate nu numai de raportul geometric dintre volumul cilindrului şi al camerei de comprimare, ci şi de starea mecanică a etanşărilor volumului cilindrului. Măsurători efectuate în trecut pe motoare cu aprindere prin scînteie arată abateri de pînă la 8% pentru raportul volumetric de comprimare a diferiţilor cilindri ai aceluiaşi motor. Aceste abateri semnalate sînt valori extreme; în general, la motoarele îngrijit fabricate, abaterile în ceea ce priveşte valoarea raportului volumetric de comprimare nu sînt prea importante; fiind vorba de un raport geometric, el este independent de condiţiile de funcţionare ale motorului. În schimb, micşorarea presiunii de la sfîrşitul comprimării, în special datorită înrăutăţirii condiţiilor de etanşare de la nivelul segmenţilor, poate avea în timpul exploatării motorului valori mult mai însemnate; este de remarcat că această scădere de presiune depinde şi de regimul de funcţionare al motorului.

Abaterea avansului la declanşarea scînteii electrice la dispozitivele automate comandate mecanic (folosite în marea lor majoritate astăzi) se înscrie într-o plajă de 4-6° RAC pentru distribuitoarele noi, valoare care atinge însă 10°RAC pentru mecanismele distribuitoarelor uzate [1]. Această valoare nu se modifică cu sarcina.

Dozajul amestecului proaspăt între diferiţii cilindrii variază mult atît de la un cilindru la altul cît şi în diverse regimuri de funcţionare la acelaşi cilindru. La acest lucru contribuie modul de realizare al carburaţiei, transferul de căldură către fluidul proaspăt, regimul de unde de presiune în canalizaţia de aspiraţie, precum şi forma constructivă a acesteia [2], [3]. Regimul de funcţionare al motorului modifică substanţial condiţiile de dozaj respective.

În afara acestor elemente, de la un ciclu de funcţionare la altul, datorită tocmai variaţiei dozajului, a avansului la declanşarea scînteii

electrice și a energiei de aprindere a scînteii electrice, apar variații ale lucrului mecanic produs pe ciclu, materializate prin modificarea formei diagramei indicate și cunoscute sub numele de dispersie ciclică.

Pentru a studia modul în care aceste elemente influențează comportarea motorului din punctul de vedere al produșilor poluanți și al parametrilor săi energetici, s-a efectuat o analiză pe bază de calcul a proceselor din motoarele cu aprindere prin scînteie.

3. ANALIZA, PE BAZĂ DE CALCULE TERMODINAMICE, A PROCESELOR DIN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

Pornindu-se de la date din literatură privitoare la valoarea căldurilor specifice ale gazelor și a constantelor de echilibru chimic la diferite temperaturi [4], [5], s-a procedat la examinarea prin calcul a influenței unor parametri asupra mărimilor de stare ale fluidului de lucru, randamentului termic și compoziției gazelor de ardere. Ciclul studiat este ciclul termodinamic de referință, iar ipotezele de calcul au ținut seama de comportarea reală a fluidului de lucru și de disocierea chimică în fază omogenă, luîndu-se în considerare cele șase ecuații de echilibru între produșii de ardere ai unei hidrocarburi. Factorii analizați prin calcul sînt : influența raportului de comprimare a avansului la declanșarea scînteii electrice, a dozajului, a presiunii de admisie atît în domeniul presiunilor scăzute, cît și în domeniul presiunilor ridicate, precum și a temperaturii la aspirație.

Problema determinării compoziției reale a produșilor poluanți în gazele de ardere pe bază de calcule prezintă o serie de dificultăți, deoarece :

— echilibrele chimice „îngheață" pe parcursul destinderii și nu exprimă situația temperaturii gazelor evacuate ;

— unii produși din gazele de evacuare se datoresc anumitor condiții locale din camera de ardere ;

— unii componenți din gazele de ardere se datoresc condițiillor de ardere locală incompletă.

Ultimele două cauze nu pot fi luate în considerare în calcule fără a face un număr mare de ipoteze, unele hazardate. În ceea ce privește problema înghețării echilibrelor chimice, s-a admis să se facă calculul pentru temperatura atinsă la sfîrșitul arderii în ciclul teoretic ; în același timp s-a verificat comparativ alura de variație a presiunii și a temperaturii gazelor de ardere în punctul de sfîrșit al arderii teoretice (f) și în punctul de sfîrșit al destinderii (e). În măsura în care acești parametri determinanți pentru valoarea echilibrelor chimice au prezentat același mod de variație, aprecierile s-au făcut după compoziția gazelor de ardere stabilite în punctul de sfîrșit al arderii f. În măsura în care s-au semnalat variații diferite, s-a analizat compoziția gazelor de ardere și în punctul de sfîrșit al destinderii e, punîndu-se în discuție rezultatele astfel obținute. Se consideră că, procedîndu-se în acest mod, pe de o parte s-a putut arăta mai pregnant influența fiecărui factor și, pe de altă parte, s-a asigurat obținerea și prin calcul a influenței corecte a parametrilor analizați asupra compoziției gazelor de ardere.

Din cele zece substanţe care rezultă în fazele de ardere în momentul stabilirii echilibrului chimic (CO_2, H_2O, O_2, N_2, CO, H_2 OH, NO, O şi H), s-au reprezentat în diagrame numai bioxidul de carbon CO_2, monoxidul

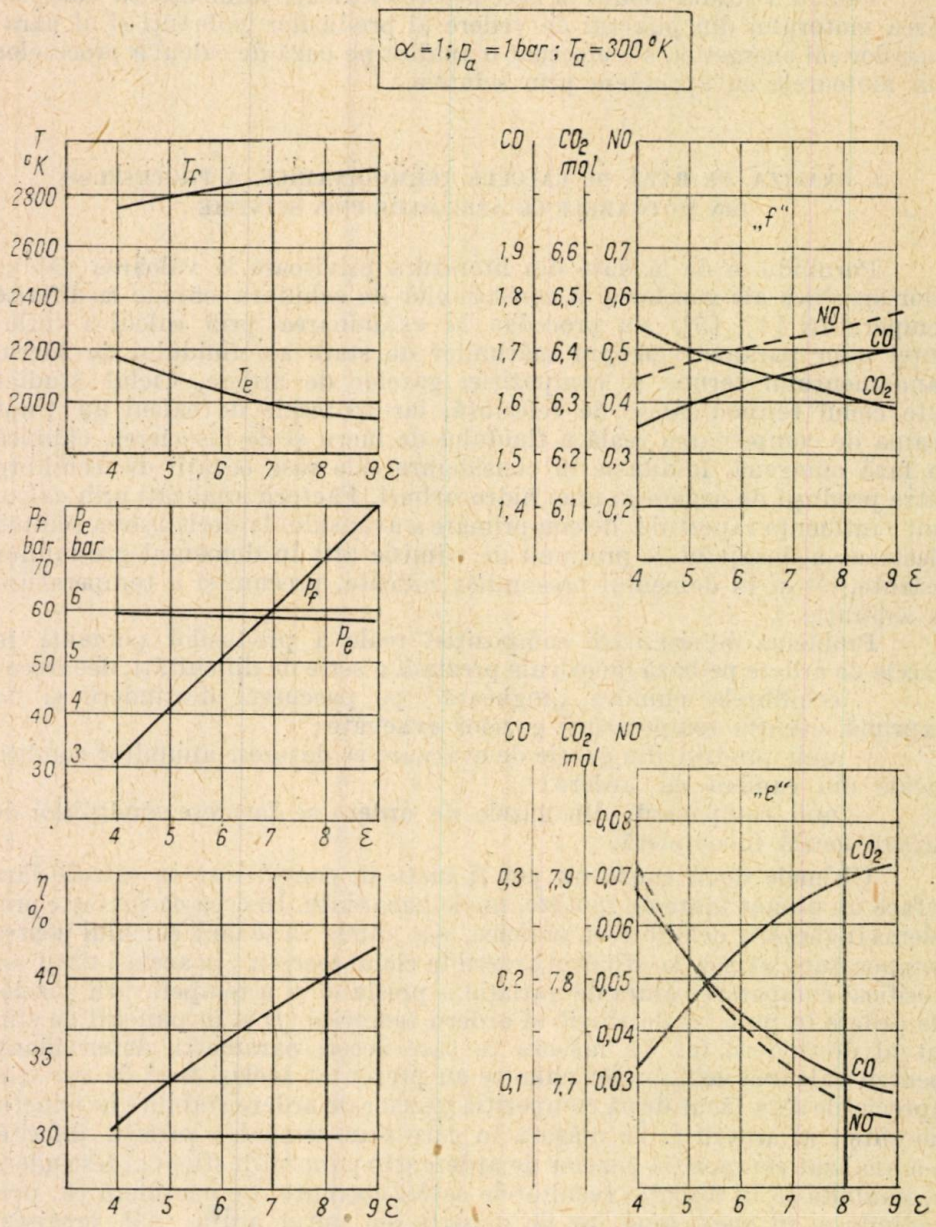


Fig. 1. — Influenţa raportului volumetric de compresiune ε asupra temperaturilor de sfîrşit de ardere (T_f) şi de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) şi de evacuare (p_e), randamentului teoretic al ciclului (η) şi componentelor NO, CO şi CO_2 din gazele de ardere (*f*) şi de evacuare (*e*).

de carbon CO și monoxidul de azot NO; metoda de calcul folosită nu a permis determinarea hidrocarburilor nearse din gazele de evacuare.

Influența raportului volumetric de comprimare ε este reprezentată în figura 1. Calculele arată variația diferită a mărimilor de stare la sfîrșitul arderii f și la sfîrșitul destinderii e. Ca urmare se prezintă valorile mărimilor componente din gazele de evacuare pentru ambele situații. Mărirea temperaturii și mărirea presiunii de sfîrșit de ardere se compensează într-o oarecare măsură, astfel că disocierea bioxidului de carbon — echilibru influențat de temperatură și de presiune — crește într-o mai mică măsură; disocierea monoxidului de azot — echilibru independent de presiune și de numărul de molecule — din alte substanțe aflate în prezență crește mai mult cu raportul volumetric de comprimare, deoarece este influențat direct de creșterea temperaturii. Astfel, la creșterea raportului de comprimare de două ori de la 4 la 8, cantitatea de monoxid de azot aflat în gazele de ardere se mărește cu peste 25%. În schimb, creșterea raportului volumetric de comprimare conduce la o scădere a temperaturii la sfîrșitul destinderii, presiunea gazelor rămînînd practic constantă, ceea ce determină scăderea factorilor poluanți pentru condițiile de echilibru din această situație pe măsură ce raportul volumetric de comprimare crește. Nivelul echilibrului chimic realizat în realitate pentru componenții din gazele evacuate urmează a se afla între aceste două valori, probabil mai aproape de zona temperaturilor ridicate.

Examinarea datelor din figura 1 arată că mărirea raportului volumetric de comprimare este favorabilă din punctul de vedere al randamentului și al temperaturii gazelor de evacuare, însă conduce la creșterea presiunii maxime, a temperaturii flăcării și a produșilor poluanți din gazele de evacuare.

Pentru a se aprecia influența avansului la declanșarea scînteii electrice s-au făcut diferite ipoteze asupra duratei procesului de ardere, ținînd seama că un avans mic conduce la o durată mai mare a procesului de ardere. Astfel, în figurile 2 și 3 se indică rezultatele obținute prin considerarea împărțirii procentuale a cantității de căldură între un proces de ardere la volum constant X_v, de ardere la presiune constantă X_p și de ardere la temperatură constantă X_T. Și în acest caz variația mărimilor de stare în cele două puncte caracteristice alese este diferită, remarcîndu-se la arderi cu o întindere redusă în ciclu temperaturi ridicate la sfîrșitul arderii și mai scoborîte la sfîrșitul destinderii; în cazul proceselor cu o ardere prelungită în decursul unui ciclu, sfîrșitul arderii este caracterizat de o temperatură relativ mai coborîtă, în timp ce sfîrșitul destinderii de o temperatură relativ ridicată. Datele calculate arată că, pe măsură ce vîrful de presiune maximă se deplasează spre volumele mari (cantitatea de căldură dezvoltată la volum constant X_v scade de la 100 la 70%), restul de căldură dezvoltîndu-se la presiune constantă (fig. 2 și 3), temperatura și presiunea corespunzătoare sfîrșitului arderii scad, randamentul termic are o ușoară tendință de scădere, iar produșii de disociere-monoxidul de carbon și monoxidul de azot — se micșorează.

Prelungirea arderii sub forma unei evoluții izotermice pe care se arde din ce în ce mai mult combustibil ($X_v = 60\%$, $X_T = 10{,}20$ și 30%) conduce la scăderea presiunii și a temperaturii de la sfîrșitul arderii, la

o micşorare a randamentului termic şi la o uşoară diminuare a cantităţilor de monoxid de carbon şi de monoxid de azot din gazele de ardere. Ar rezulta din aceste date că mărirea avansului la declanşarea scînteii

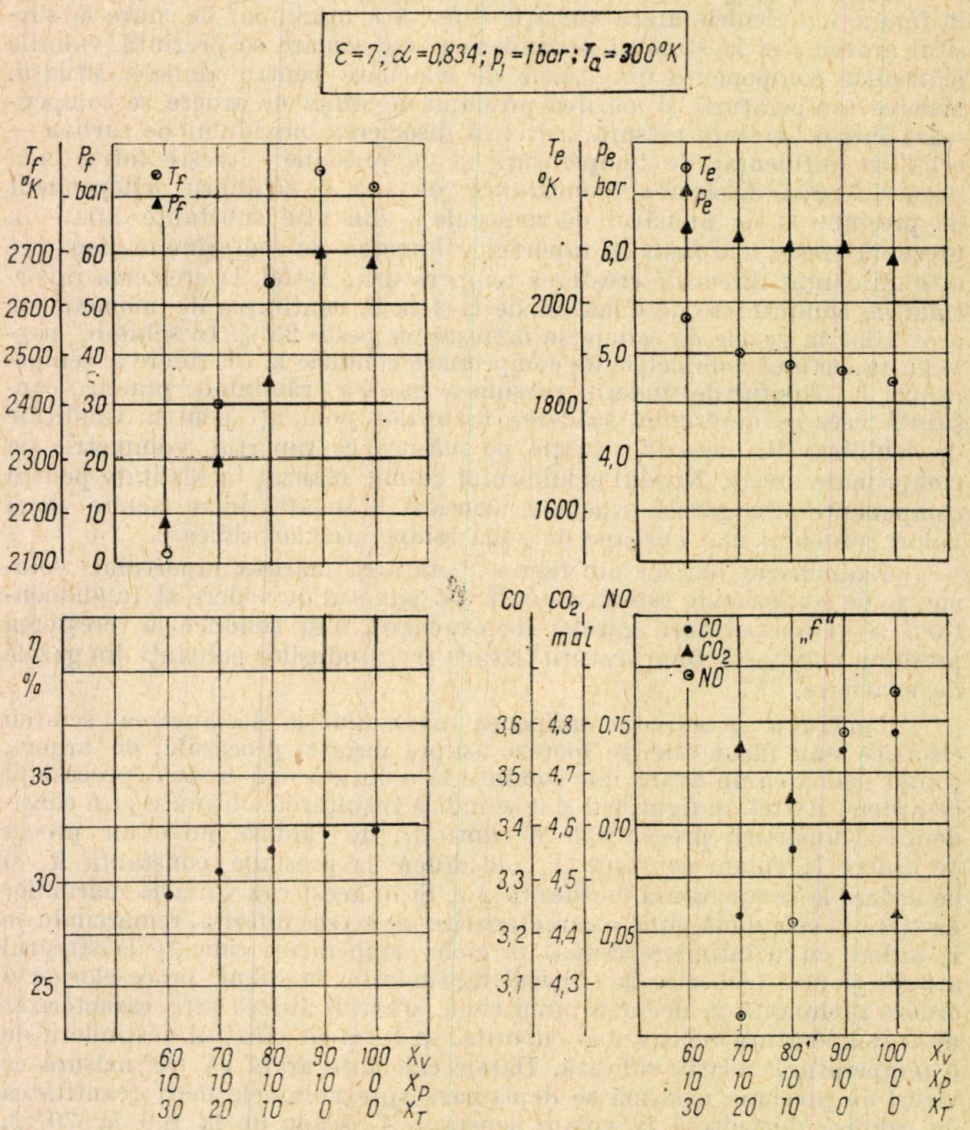


Fig. 2. — Influenţa împărţirii procentuale diferite a cantităţii de căldură între un proces de ardere la volum constant (X_v), de ardere la presiune constantă (X_p) şi de ardere la temperatura constantă (X_T) asupra temperaturilor de sfîrşit de ardere (T_f) şi de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) şi de evacuare (p_e), randamentul teoretic al ciclului (η) şi componentelor NO, CO şi CO_2 din gazele de ardere (f).

electrice poate duce la o uşoară mărire a cantităţii de monoxid de carbon şi la o mărire mai apreciabilă a cantităţii de monoxid de azot, desigur aceasta fără a se lua în considerare efectul eventual care ar putea

rezulta din contactul dintre flacăra cu durată prelungită și pereții reci ai cilindrului.

Influența coeficientului excesului de aer α prin care s-a exprimat

$$\varepsilon = 7;\ \alpha = 0{,}834;\ p_1 = 1\ bar;\ T_a = 300\ ^oK$$

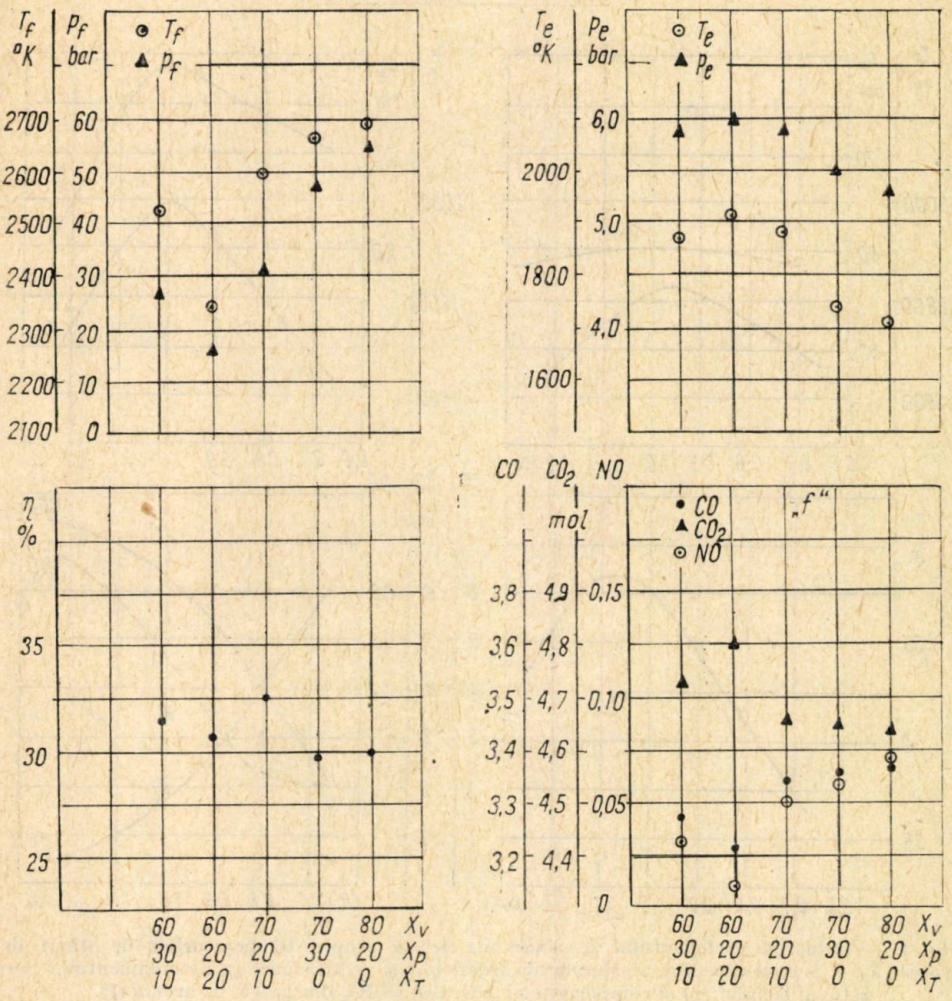


Fig. 3. — Influența împărțirii procentuale diferite a cantității de căldură între un proces de ardere la volum constant (X_v), de ardere la presiune constantă (X_p) și de ardere la temperatura constantă (X_T) asupra temperaturilor de sfîrșit de ardere (T_f) și de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) și de evacuare (p_e), randamentul teoretic al ciclului (η) și componentelor NO, CO și CO_2 din gazele de ardere (f).

dozajul (fig. 4) se manifestă prin realizarea unei valori maxime a temperaturii și a presiunii sfîrșitului de ardere pentru zona rapoartelor stoechiometrice aer-combustibil și prin variația de aceeași natură a mări-

milor de stare la sfîrşitul destinderii; deşi disocierea este maximă în punctul de temperatură maximă, lipsa de aer din domeniul valorilor subunitare ale coeficientului excesului de aer face să se producă o cantitate mare de monoxid de carbon; în schimb, în acest domeniu, temperatura fiind

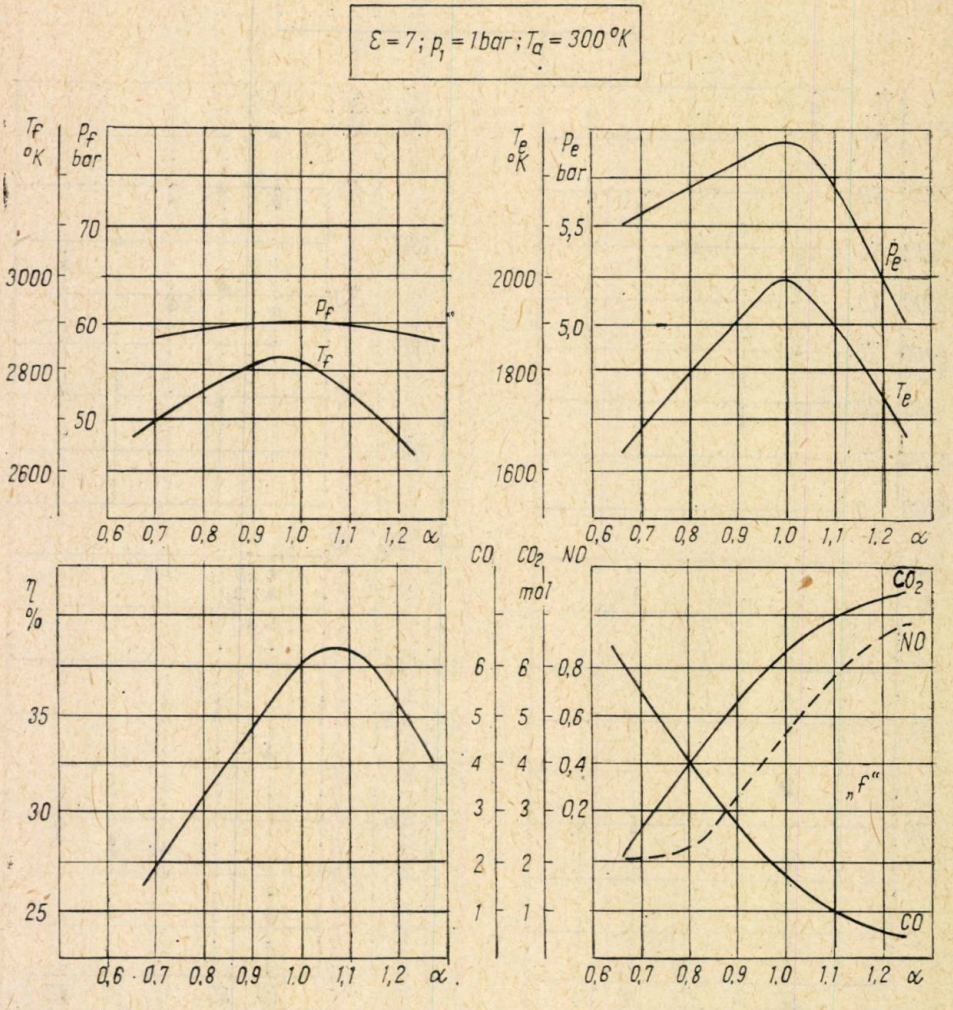


Fig. 4. — Influenţa coeficientului de exces de aer α asupra temperaturilor de sfîrşit de ardere (T_f) şi de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) şi de evacuare (p_e), randamentului teoretic al ciclului (η) şi componentelor NO, CO, şi CO_2 din gazele de ardere (f).

scăzută, cantitatea de monoxid de azot se micşorează la aceasta contribuind şi dozajul bogat; randamentul termic scade mult pe măsură ce dozajul se îmbogăţeşte. Aceste concluzii pot fi afectate într-o oarecare măsură de modificarea duratei procesului de ardere.

Influenţa sarcinii se apreciază prin varierea presiunii de admisiune în motor p_1. Considerîndu-se că la sarcini parţiale se poate funcţiona în

regim economic, calculele s-au efectuat pentru coeficientul excesului de aer $\alpha = 1$ (fig. 5). În condițiile în care durata arderii nu este afectată, reducerea presiunii de admisie are drept efect o mărire a cantității de mo-

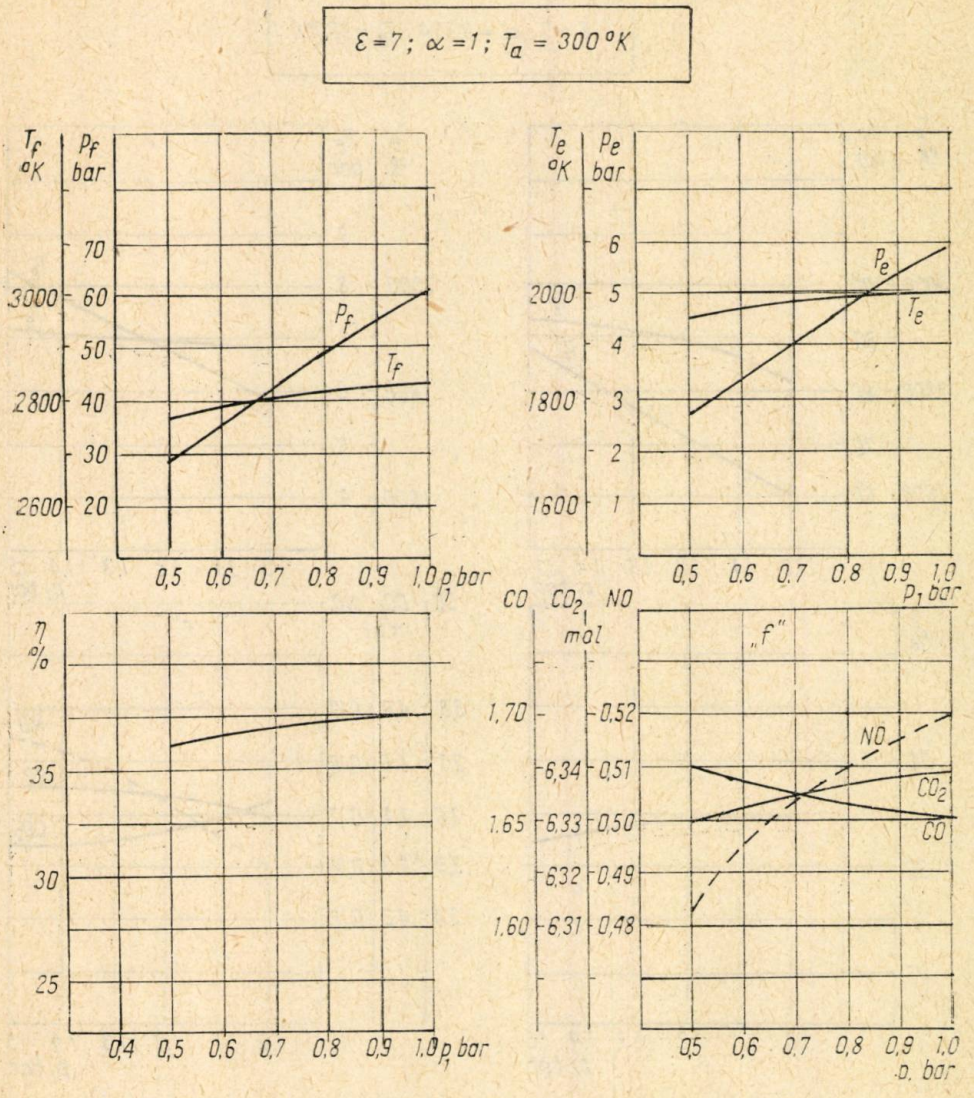


Fig. 5. — Influența presiunii de admisie p_1 pentru valoarea coeficientului excesului de aer $\alpha = 1$ asupra temperaturilor de sfîrșit de ardere (T_f) și de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) și de evacuare (p_e), randamentului teoretic al ciclului (η) și componentele NO, CO și CO_2 din gazele de ardere (f).

noxid de carbon și, în schimb, o micșorare a cantității de monoxid de azot, datorită modului în care variază temperatura și presiunea la sfîrșitul procesului de ardere. Se observă că mărirea lucrului mecanic de

pompaj afectează valoarea randamentului termic. S-a examinat şi influenţa supraalimentării, variindu-se la valori supraunitare presiunea exterioară p_1. Mărirea temperaturii şi a presiunii în condiţiile de la sfîrşitul proce-

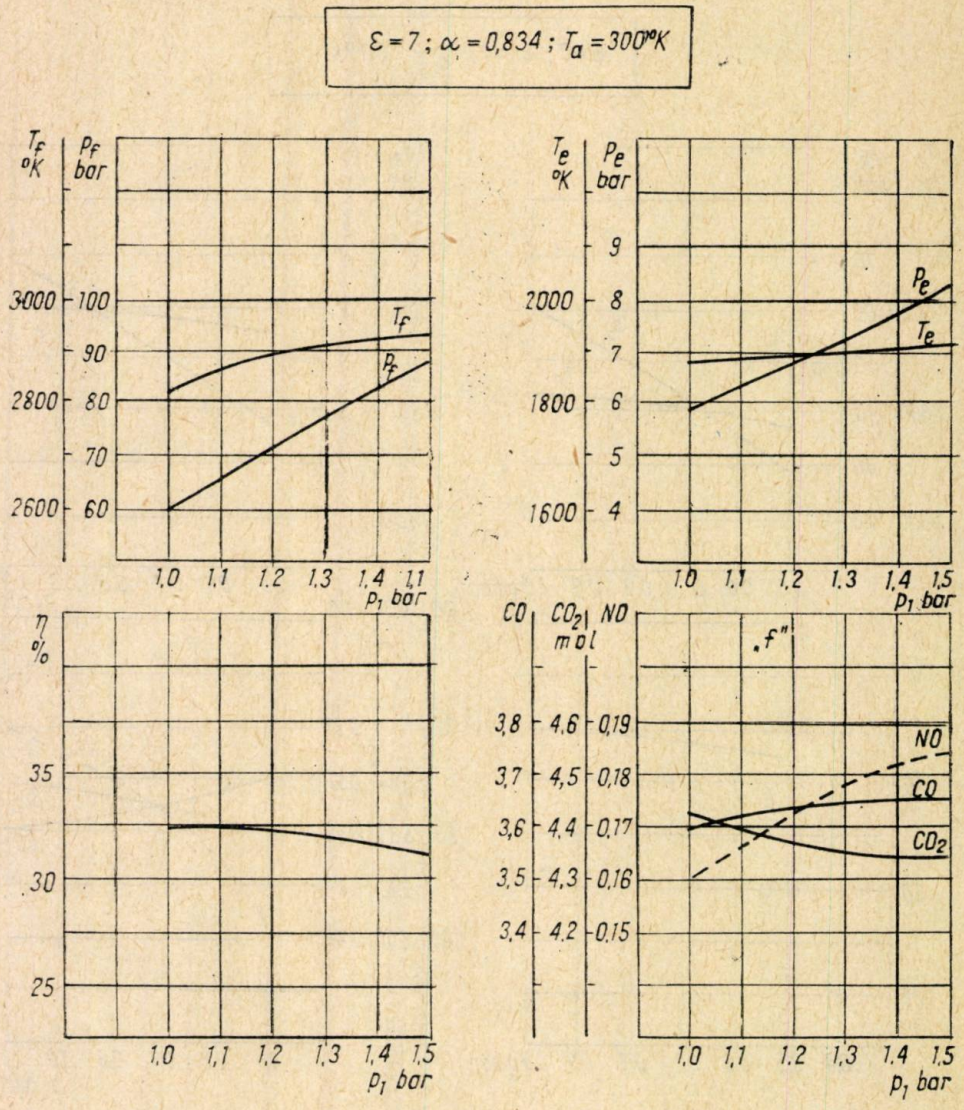


Fig. 6. — Influenţa presiunii de admisie p_1 pentru $\alpha = 0{,}834$ asupra temperaturilor de sfîrşit de ardere (T_f) şi de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) şi de evacuare (p_e) randamentului teoretic al ciclului (η) şi componentelor NO, CO şi CO_2 din gazele de ardere (f).

sului de ardere are drept efect o uşoară creştere a cantităţii de monoxid de carbon, în schimb o mărire mai accentuată a cantităţii de monoxid de azot; se observă o uşoară micşorare a randamentului termodinamic al ciclului o dată cu mărirea gradului de supraalimentare (fig. 6).

Temperatura de admisie influențează și ea factorii poluanți. Mărirea temperaturii de admisie T_1 (fig. 7) are drept efect reducerea presiunii de sfîrșit de ardere și mărirea temperaturii în acest punct, factori care conduc la creșterea cantității de monoxid de carbon din gazele de ardere și

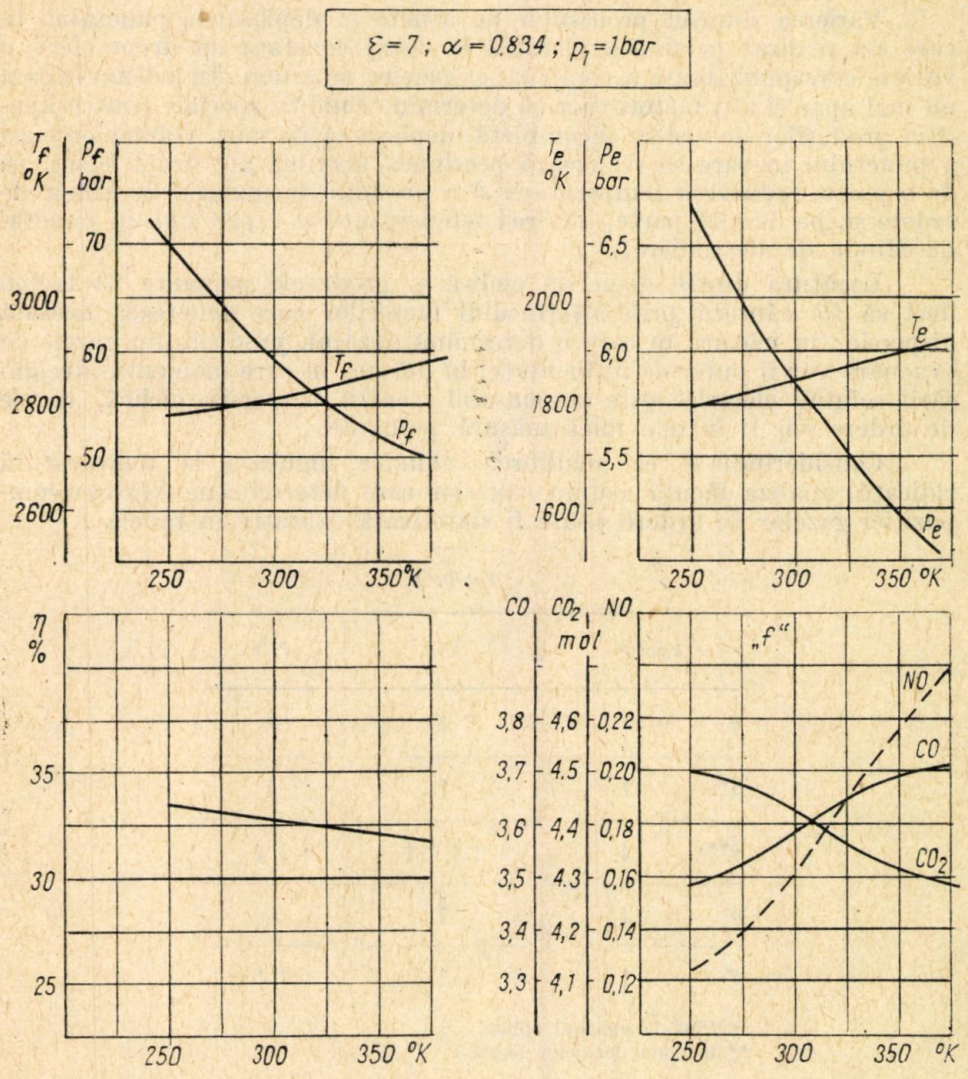


Fig. 7. — Influența temperaturilor de început de compresiune (T_1) asupra temperaturilor de sfîrșit de ardere (T_f) și de evacuare (T_e), presiunilor de ardere (p_f) și de evacuare (p_e), randamentului teoretic al ciclului (η) și componentelor NO, CO și CO_2 din gazele de ardere (f).

a cantității de monoxid de azot. Dacă se coroborează aceste rezultate cu cele anterior discutate, rezultă că supraalimentarea motoarelor cu aprindere prin scînteie conduce la o mărire a cantității factorilor poluanți prin combinarea efectului produs de variația presiunii și a temperaturii

de aspiraţie, aceasta lăsînd la o parte necesitatea de a funcţiona, pentru prevenirea detonaţiei, la dozaje bogate.

O imagine privitoare la efectul dispersiei ciclice asupra compoziţiei gazelor de evacuare poate rezulta din reexaminarea rezultatelor consemnate în figurile 2, 3 şi 4.

Varierea duratei procesului de ardere şi deplasarea punctului în care s-a realizat presiunea maximă la dozaj constant au drept efect o variere corespunzătoare a compoziţiei gazelor de ardere. În măsura în care nu mai apar şi alţi factori care să determine condiţii speciale pentru apariţia produşilor de ardere incompletă, deplasarea în zona volumelor mari a punctului în care se realizează presiunea maximă are drept efect, pe de o parte, reducerea temperaturii şi a presiunii în punctul de sfîrşit de ardere şi, pe de altă parte, mărirea temperaturii şi a presiunii în punctul de sfîrşit de destindere.

Legătura dintre dispersia ciclică şi produsele poluante va trebui deci să fie căutată prin intermediul factorilor care generează această dispersie; în măsura în care o determină dozajul, produşii din gazele de evacuare vor fi puternic influenţaţi; în măsura în care momentul declanşării scînteii electrice este responsabil pentru dispersia ciclică, gazele de ardere vor fi în mai mică măsură poluante.

Considerîndu-se că echilibrele chimice îngheaţă la temperatură ridicată, analiza făcută asupra cauzelor care determină modificarea compoziţiei gazelor de ardere poate fi sintetizată calitativ în tabela 1.

Tabela 1

Factor		CO	NO
ε	↑	↑	↑
β*)	↑	↑	↑
α**)	↓	↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓
p	↓	↑	↓
T	↑	↑	↑ ↑

* Pînă la avansul optim.
** în zona dozajelor bogate.

Examinarea acestei tabele scoate în relief faptul că influenţa principală asupra compuşilor poluanţi din gazele de ardere o are dozajul amestecului proaspăt care pătrunde în cilindru. Se observă de asemenea că monoxidul de azot poate varia diferit de monoxidul de carbon. În vederea obţinerii unor concluzii exhaustive, va trebui să se examineze suplimentar influenţa raportului volumetric de comprimare şi a avansului la declanşarea scînteii electrice, deoarece o dată cu deplasarea pistonului în cursa

de destindere sensul de acționare al variației acestor parametri asupra compoziției gazelor de ardere se modifică; această observație permite să se tragă concluzia că influența acestor parametrii este mai puțin importantă.

Există posibilitatea ca între doi cilindri să difere unul sau mai mulți factori analizați. Astfel, dacă se va modifica numai unul dintre factorii analizați, modul de variație a compoziției gazelor de ardere poate fi apreciat conform tabelei 1.

Dacă variază doi factori se obțin rezultatele consemnate în tabela 2.

Tabela 2

Grupă	Factori	CO		NO	
a	ε ↑	↑	↑ ↑	↑	↑ ↑
	β ↑	↑		↑	
b	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↓
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
c	ε ↑	↑	↑ ↑	↑	~ ct
	p ↓	↑		↓	
d	ε ↑	↑	↑ ↑	↑	↑ ↑ ↑
	T ↑	↑		↑ ↑	
e	β ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↓
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
f	β ↑	↑	↑ ↑	↑	~ ct
	p ↓	↑		↓	
g	β ↑	↑	↑ ↑	↑	↑ ↑ ↑
	T ↑	↑		↑ ↑	
h	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓	↓ ↓ ↓
	p ↓	↑		↓	
i	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓	~ ct
	T ↑	↑		↑ ↑	
j	*p* ↓	↑	↑ ↑	↓	↑
	T ↑	↑		↑ ↑	

Tabela 3

Grupa	Factori	CO		NO	
a	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	~ct
	β ↑	↑		↑	
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
b	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑	↑	↑
	β ↑	↑		↑	
	p ↓	↑		↓	
c	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑
	β ↑	↑		↑	
	T ↑	↑		↑ ↑	
d	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↓ ↓
	α ↓	↑		↓ ↓	
	p ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓	
e	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↑
	α ↓	↑		↓ ↓	
	T ↑	↑ ↑ ↑ ↑		↑ ↑	
f	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑	↑	↑ ↑
	p ↓	↑		↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
g	β ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↓ ↓
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
	p ↓	↑		↓	
h	β ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↑
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
i	β ↑	↑	↑ ↑ ↑	↓	↑ ↑
	p ↓	↑		↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
j	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓	↓
	p ↓	↑		↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	

Dacă variază trei dintre factorii analizaţi, se obţin rezultatele calitative consemnate în tabela 3.

Dacă variază patru dintre factorii analizaţi, se obţin rezultatele calitative consemnate în tabela 4.

În fine, în cazul varierii simultane a tuturor factorilor se observă că monoxidul de carbon creşte mult, iar monoxidul de azot în mai mică măsură.

Tabela 4

Grupa	Factori	CO		NO	
a	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↓
	β ↑	↑		↑	
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
	p ↓	↑		↓	
b	ε ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	↑ ↑
	β ↑	↑		↑	
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
c	β ↑	↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑	~ct
	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑		↓ ↓	
	p ↓	↑		↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
d	α ↓	↑ ↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓	~ct
	p ↓	↑		↓	
	T ↑	↑		↑ ↑	
	ε ↑	↑		↑	
e	p ↓	↑	↑ ↑ ↑ ↑	↓	↑ ↑ ↑
	T ↑	↑		↑ ↑	
	ε ↑	↑		↑	
	β ↑	↑		↑	

4. CERCETĂRI EXPERIMENTALE

Cercetările experimentale întreprinse au avut două obiective : să permită o precizare a concluziilor teoretice prin verificarea lor cu date obţinute pe motor, contribuind astfel la stabilirea ponderei cu care acţionează fiecare din factorii analizaţi, şi să determine rolul jucat de neuniformitatea proceselor din cilindru la un motor policilindric asupra compoziţiei gazelor de ardere, indicînd căi de ameliorare.

Experimentările s-au executat pe un motor monocilindric şi pe un motor policilindric din aceeaşi familie, cu diametrul cilindrului D =

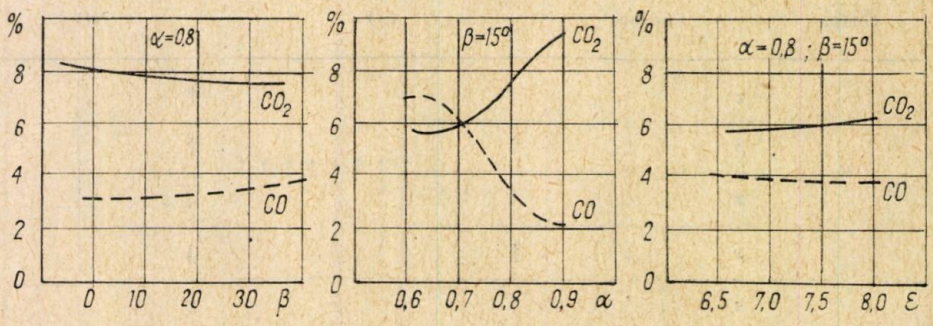


Fig. 8. — Variaţia componentelor CO şi CO_2 din gazele de evacuare la motorul monocilindric SR—211—M la cuplu maxim (n = 2 400 rot/min) o dată cu modificarea unghiului de avans la aprindere (β), coeficientului de exces de aer (α) şi raportului volumetric de compresiune (ε).

=98 mm. Analizele de gaze de ardere s-au efectuat pe cale cromatografică ; acest lucru a permis să se pună în evidenţă şi prezenţa hidrocarburilor nearse. Nu s-a măsurat cantitatea de azot.

În figura 8 se prezintă date măsurate la turaţia de cuplu maxim (n = 2 400 rot/min) pe motorul monocilindric. Se constată că mărirea raportului volumetric de comprimare duce la o variaţie mică a cantităţii de monoxid de carbon din gazele de ardere. Mărirea avansului la declanşarea scînteii electrice influenţează şi el puţin monoxidul de carbon, mărirea avansului la valori prea mari contribuind la o uşoară creştere a cantităţii de monoxid de carbon. Se constată influenţa marcată a dozajului asupra cantităţii de monoxid de carbon din gazele de ardere.

În figura 9 se prezintă determinări efectuate pe motorul monocilindric în ceea ce priveşte concentraţia etanului (C_2H_6) şi a propanului (C_3H_8) în părţi pe milion (p.p.m.) în funcţie de avansul la declanşarea scînteii electrice β şi a coeficientului excesului de aer α. Se constată că propanul este influenţat în mai redusă măsură de către variaţia acestor factori, în timp ce etanul scade dacă avansul la declanşarea scînteii electrice şi coeficientul excesului de aer cresc, factori care îmbunătăţesc procesul de ardere.

Cercetări recente [6] indică arderea incompletă pe pereţii cilindrului drept cauză a existenţei hidrocarburilor nearse în gazele de evacuare de la motorul cu aprindere prin scînteie.

Pentru a analiza ceea ce se întîmplă la nivelul fiecărui cilindru, se reaminteşte că abaterea raportului de comprimare este maximum de

10%, ceea ce, conform datelor calculate (fig. 1), poate duce la o variație a cantității de monoxid de carbon de 1%; avansul la declanșarea scînteii electrice poate varia cu 10%, ceea ce, conform datelor calculate (fig. 2 și 3), poate duce la o variație a cantității de monoxid de carbon de circa 1%; variația presiunii de admisie, presupusă a fi de ordinul a 10%, con-

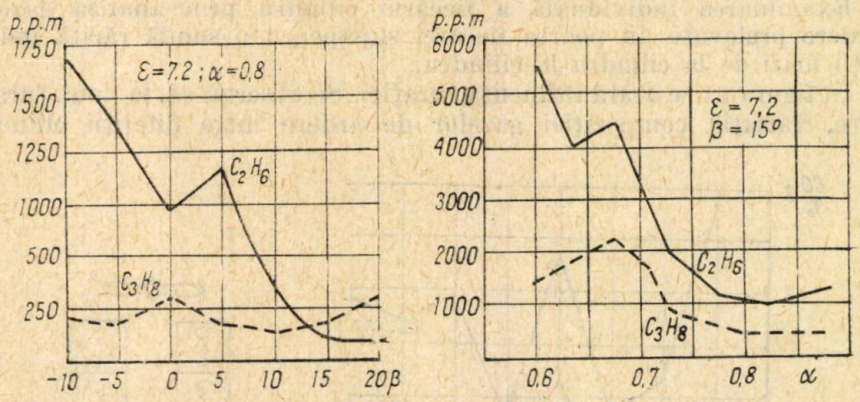


Fig. 9. — Variația conținutului de etan (C_2H_6) și de propan (C_3H_8) în părți pe milion (p.p.m.) din gazele de evacuare la motorul monocilindric o dată cu modificarea unghiului de avans la aprindere (β) și a coeficientului de exces de aer (α).

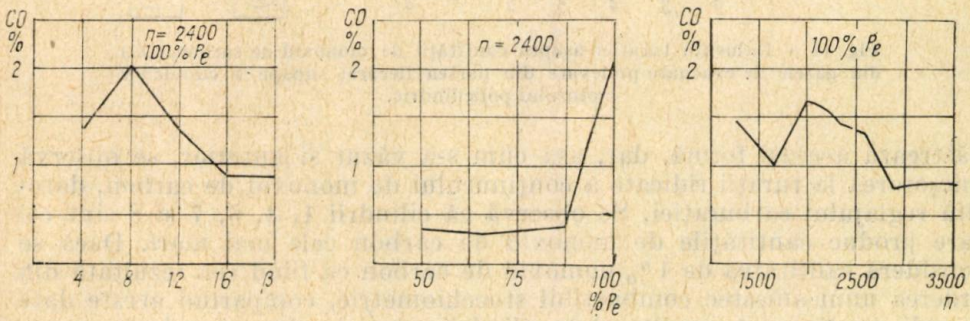


Fig. 10. — Variația concentrației de monoxid de carbon (CO) din gazele de evacuare prelevate din conducta de evacuare a motorului policilindric în funcție de unghiul de avans la aprindere (β), sarcina motorului (P_e) și de turația motorului (n).

duce la o modificare a cantității de monoxid de carbon neglijabilă (fig. 5). O variație a dozajului cu 10% în domeniul dozajelor bogate duce la o variere a cantității de monoxid de carbon mult mai importantă de 30—50%. Rezultă deci că factorul esențial al producerii de monoxid de carbon este variația dozajului în domeniul dozajelor bogate.

Cercetarea variației cantității de monoxid de carbon măsurat în conducta de evacuare a motorului policilindric (fig. 10) arată valori reduse ale acestuia în cazul funcționării la sarcini parțiale, cu o creștere accentuată către sarcina maximă datorită intrării în funcțiune a economizorului. Avansul la declanșarea scînteii electrice duce la variația compoziției gazelor de evacuare; este de bănuit că, la valori mici ale avansului la

declanşarea scînteii electrice, arderea nu se mai desfăşoară corespunzător. Turaţia apare a avea influenţă asupra compoziţiei gazelor de ardere; mărirea compoziţiei gazelor de ardere în monoxid de carbon în zona turaţiei de cuplu maxim indică un anumit reglaj bogat al carburaţiei pentru această zonă de turaţie.

Examinarea individuală a fiecărui cilindru prin analiza gazelor de ardere prelevate în poarta fiecărei supape cu o sondă răcită indică variaţii mari de la cilindru la cilindru.

În figura 11 se arată influenţa turaţiei. Se observă că, la două turaţii diferite, variaţia compoziţiei gazelor de ardere între diferiţii cilindrii

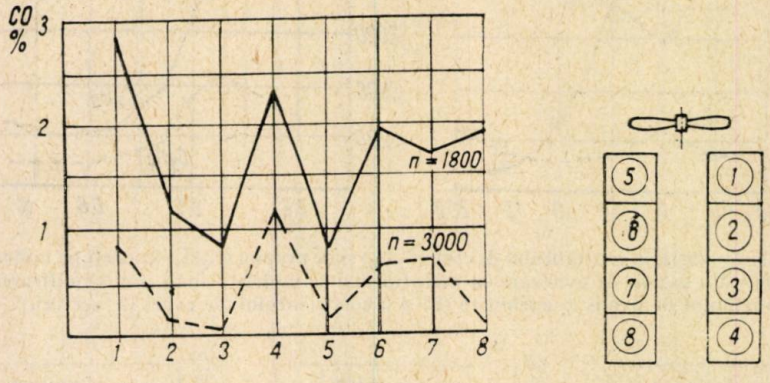


Fig. 11 — Influenţa turaţiei asupra cantităţii de monoxid de carbon (CO) din gazele de evacuare prelevate din partea fiecărei supape a cilindrilor motorului policilindric.

păstrează aceeaşi formă, dar, aşa cum s-a văzut şi anterior, se observă micşorarea la turaţii ridicate a conţinutului de monoxid de carbon, datorită reglajului carburaţiei. Se observă că cilindrii 1, 4, 6, 7 şi 8 sînt cei care produc cantităţile de monoxid de carbon cele mai mari. Dacă se consideră cantitatea de 1% monoxid de carbon ca fiind cea rezultată din arderea unui amestec combustibil stoechiometric, comparînd aceste date cu cele din figura 4, rezultă că în cilindrii cei mai poluanţi arderea se realizează în domeniul bogat, la valorile coeficientului excesului de aer de $\alpha = 0{,}76 \div 0{,}8$.

Existenţa acestui dozaj nesatisfăcător se reflectă, conform datelor din figura 4, în chip nefavorabil şi asupra randamentului, chiar dacă în realitate o uşoară îmbogăţire a dozajului poate fi iniţial favorabilă.

Variaţia conţinutului de monoxid de carbon cu sarcina (fig. 12) indică aceeaşi distribuţie a factorilor poluanţi între cilindri, însă o aplatisare evidentă cu reducerea sarcinii.

Avansul la declanşarea scînteii electrice nu influenţează practic valoarea cantităţii de monoxid de carbon din gazele de evacuare, iar distribuţia acestuia în gazele evacuate între diferiţii cilindri păstrează o formă constantă (fig. 13).

Pe baza celor arătate în cadrul capitolului 3 se poate aprecia că cilindrii *1*, *4*, *6*, *7* şi *8* vor fi cei care dezvoltă cantitatea cea mai redusă de monoxid de azot.

Variația cantității de hidrocarburi nearse din gazele de evacuare cu parametrii funcționali ai motorului este arătată în continuare. În figura 14 se prezintă influența turației. S-a făcut anterior ipoteza că la turații ridicate se asigură o ardere mai bună; această ipoteză, asociată cu influ-

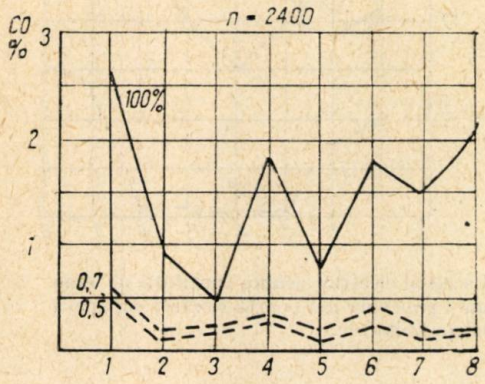


Fig. 12. — Influența sarcinii motorului asupra cantității de moxid de carbon (CO) din gazele de evacuare prelevate din poarta fiecărei supape a cilindrilor motorului policilindric.

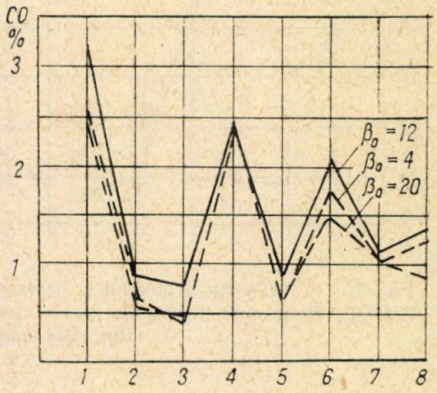


Fig. 13. — Influența avansului la declanșarea scînteii electrice (β) asupra cantității de monoxid de carbon (CO) din gazele de evacuare prelevate din poarta fiecărei supape a cilindrilor motorului policilindric.

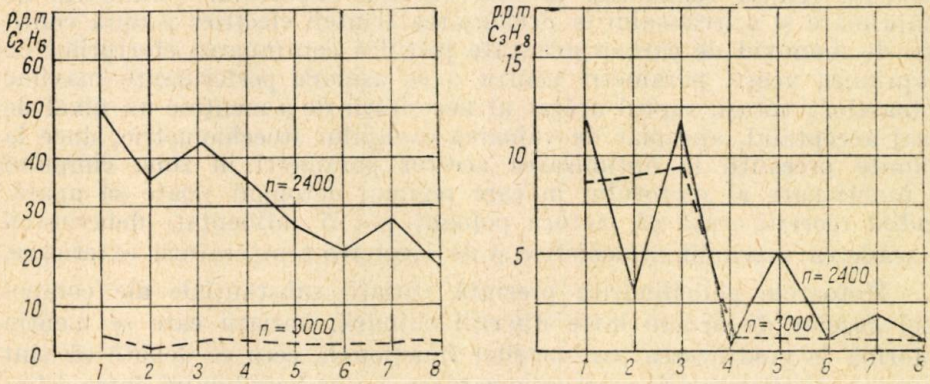


Fig. 14. — Influența turației motorului (n) asupra cantității de etan (C_2H_6) și de propan (C_3H_8) din gazele de evacuare prelevate din poarta fiecărei supape a cilindrilor motorului policilindric.

ența pereților mai calzi, ar putea explica și cantitatea mai scăzută de etan și de propan care se întîlnesc la regimurile de funcționare la turație mai ridicată ale motorului.

Influența avansului la declanșarea scînteii electrice asupra cantității de hidrocarburi nearse este indicată în figura 15. Mărirea avansului la declanșarea scînteii electrice duce de asemenea la o scădere a cantității de hidrocarburi nearse.

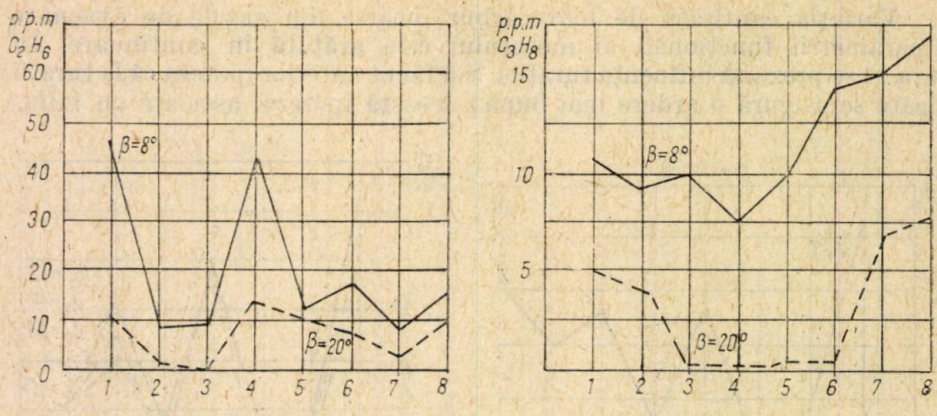


Fig. 15. — Influenţa avansului la declanşarea scînteii electrice asupra cantităţii de etan (C_2H_6) şi de propan (C_3H_8) din gazele de evacuare prelevate din poarta fiecărei supape a cilindrilor motorului policilindric.

5. CONCLUZII

Analiza pe bază de calcul şi verificările experimentale arată că factorul responsabil în principal pentru emisiile de monoxid de carbon în gazele de evacuare de la motoarele cu ardere internă este carburaţia. Influenţa redusă semnalată privind variaţia raportului volumetric de comprimare şi a avansului la declanşarea scînteii electrice asupra cantităţii de monoxid de carbon evacuate justifică continuarea eforturilor de a optimiza aceşti parametri pentru a se asigura performanţe maxime motoarelor; totuşi, faptul arătat al necesităţii de a menţine un nivel de dozaj acceptabil, apropiat de valoarea dozajului stoechiometric, duce la anumite precauţii la optimizarea acestor parametri în zona cîmpului de funcţionare al motorului în care regimul detonant poate să apară. Studiul teoretic arată că factorii poluanţi pot fi influenţaţi defavorabil de scăderea presiunii atmosferice şi de creşterea temperaturii exterioare.

Motoarele policilindrice prezintă variaţii substanţiale ale compoziţiei gazelor de ardere între diferiţii cilindrii, variaţii care se menţin ca formă la modificarea parametrilor funcţionali, ceea ce denotă că sînt efectul unei distribuţii necorespunzătoare a combustibilului între cilindrii motorului. Este necesar să se uniformizeze această variaţie de dozaj prin studierea canalizaţiei de umplere, a regimului de unde de presiune din aceasta şi eventual prin înlocuirea sistemului de carburare globală al aerului cu un sistem de carburare individuală pentru fiecare cilindru. Uniformizarea dozajului între diferiţii cilindri trebuie corelată şi cu anumite reexaminări ale construcţiei şi execuţiei motorului, deoarece se obişnuieşte să se îmbogăţească dozajul pentru a combate tendinţa la detonaţie a cilindrului, care prezintă deficienţe de răcire sau la care raportul volumetric de comprimare şi avansul la declanşarea scînteii electrice sînt mărite.

Este de semnalat că efortul făcut pentru asigurarea uniformității dozajului și a parametrilor de funcționare ai fiecărui cilindru se compensează nu numai prin reducerea factorilor poluanți, ci printr-o evidentă reducere a consumului specific de combustibil.

BIBLIOGRAFIE

1. J. M. Stellwagen, *Perfectionnement apportés aux allumeurs des moteurs à explosion*, Revue des Ingénieurs de l'automobile, *6*, 355 (1968).
2. Herbert Müller, *Ursachen und Umfang der ungleichen Gemischverteilung an Mehrzylinder Ottomotoren*, M.T.Z, *9*, 335 (1967).
3. Walter Zander, *Die Entwicklung von Saugrohren als Beitrag zur Abdasentgiftung der Vergasermotoren*, MTZ, *2*, 52 (1970).
4. И. Рыдкин, *Таблицы термодинамических свойств газов*, Москва, Госэнергоиздат, 1966.
5. М. Н. Карапетианц, *Химическая термодинамика*, Москва, Госэнергоиздат, 1965.
6. Herbert Müller, Sirghart v. Watzdorf, *Das Gehalt an Kohlenwasserstoffen in der Nähe der Brennraumwand nach Abschluss der Verbrennung*, MTZ, *12*, 489 (1968).

PĂTRUNDEREA CÎMPULUI MAGNETIC ÎNTR-UN SEMISPAȚIU FEROMAGNETIC CONDUCTOR CU CARACTERISTICĂ LINIARIZATĂ PE PORȚIUNI

DE

F. SPINEI

538.541 :621.3.018.44

În lucrare se obține soluția exactă pentru cazul pătrunderii cîmpului magnetic într-un semispațiu feromagnetic conductor cu caracteristică liniarizată pe porțiuni; variația cîmpului pe frontieră este treaptă, condițiile inițiale în semispațiu fiind nule. Pentru cazul aproximării caracteristicii cu două porțiuni de dreaptă se rezolvă o serie de cazuri particulare, regăsindu-se și soluția lui Agarwal pentru cazul neliniar-limită.

Studiul fenomenelor neliniare în electrotehnică constituie o problemă extrem de importantă din punct de vedere atît teoretic cît și practic, avînd în vedere utilizarea largă a materialelor neliniare în construcția mașinilor și aparatelor electrice.

Problema curenților variabili în conductoare feromagnetice neliniare furnizează o literatură extrem de vastă. În [1] se poate găsi o sinteză clară a problemelor atacate și a rezolvărilor existente, precum și o vastă bibliografie.

Pătrunderea cîmpului magnetic în conductoare feromagnetice e o temă frecventă în literatura de specialitate [2], [4]. Soluțiile existente în prezent rezolvă diverse cazuri mai particulare sau mai generale în baza unor ipoteze simplificatoare [3]. O rezolvare analitică exactă este obținută în cadrul teoriei neliniare-limită [2], [4]; soluția obținută e valabilă pentru pătrunderea în conductorul feromagnetic atît a unui cîmp magnetic constant, cît și a unui cîmp magnetic sinusoidal (aceasta datorită caracteristicii neliniare-limită de magnetizare considerate: $\mu_1 = \infty$; $\mu_2 = 0$).

În prezenta lucrare se obține soluția exactă pentru pătrunderea cîmpului magnetic într-un semispațiu feromagnetic conductor cu caracteristică liniarizată pe porțiuni; variația cîmpului pe frontieră este treaptă, iar condițiile inițiale în semispațiu se consideră nule. În prima parte a lucrării se consideră caracteristica de magnetizare liniarizată prin două

porțiuni de dreaptă; se rezolvă apoi trei cazuri particulare ale acestei situații, unul dintre ele coincizînd cu cazul neliniar-limită rezolvat în literatură [2], [4]. În a doua parte a lucrării se consideră caracteristica de magnetizare liniarizată prin n porțiuni de dreaptă, indicîndu-se un algoritm de calcul al sistemului de ecuații în care apar constantele de integrare.

1. INTRODUCERE

Studiul pătrunderii cîmpului magnetic se face, în cazul semispațiului conductor feromagnetic sau al tolei, rezolvînd o ecuație de forma

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{1.1}$$

în care

x este direcția de propagare, $x = 0$ fiind în cazul semispațiului frontiera acestuia,

μ — permeabilitatea magnetică a semispațiului,

σ — conductivitatea semispațiului,

H — intensitatea cîmpului magnetic.

În cele ce urmează se consideră condiția pe frontieră $H_{x=0} = H_0 = \text{const}$, iar condițiile inițiale în semispațiu nule.

Din clasa soluțiilor ecuației (1.1) considerăm pe acelea care depind de variabilele x și t prin intermediul variabilei

$$z = \frac{x}{\sqrt{t}}, \tag{1.2}$$

care transformă ecuația (1.1) în

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}z^2} + \mu\sigma \frac{z}{2} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{1.3}$$

Înmulțind ecuația (1.3) cu factorul integrat $\mathrm{e}^{\mu\sigma\frac{z^2}{4}}$, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\mu\sigma\frac{z^2}{4}}\right] = 0, \tag{1.4}$$

care duce la o soluție de forma

$$\psi = A''\int_0^z \mathrm{e}^{-\mu\sigma\frac{z^2}{4}}\,\mathrm{d}z + B. \tag{1.5}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$\mu\sigma\frac{z^2}{4} = u^2 \text{ sau } u = x\sqrt{b}, \tag{1.6}$$

unde

$$b = \frac{\mu\sigma}{4t}, \tag{1.7}$$

soluția (1.5) devine

$$\psi = A'\int_0^{x\sqrt{b}} e^{-u^2}\,du + B \tag{1.8}$$

sau

$$\psi = A \operatorname{erf} x\sqrt{b} + B. \tag{1.9}$$

În cazul unui mediu cu caracteristică liniară (μ = const), punînd condițiile

$$\begin{cases} x = 0 \to H = H_0, \\ t = 0 \to H = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

se obține soluția cunoscută

$$H = H_0(1 - \operatorname{erf} x\sqrt{b}). \tag{1.11}$$

2. CAZUL UNUI MEDIU CU CARACTERISTICĂ DE MAGNETIZARE LINIARIZATĂ

Se consideră un semispațiu cu caracteristica de magnetizare liniarizată (fig. 2.1), satisfăcînd ecuațiile

$$\begin{aligned} |H| < H_s, \quad B &= \mu_1 H, \\ |H| > H_s, \quad B &= B_0 + \mu_2 H. \end{aligned} \tag{2.1}$$

În semispațiu vor exista două domenii, de permeabilitate μ_1 și, respectiv, μ_2 (fig. 2.2), a căror graniță x_s, caracterizată de intensitatea de saturație a cîmpului magnetic H_s, se deplasează cu o viteză notată cu v_s. Deoarece în ambele domenii ecuația de pătrundere este de forma (1.1), se consideră cele două soluții de tipul (1.9)

$$\begin{aligned} H_2 &= A_2 \operatorname{erf} x\sqrt{b_2} + B_2, \\ H_1 &= A_1 \operatorname{erf} x\sqrt{b_1} + B_1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

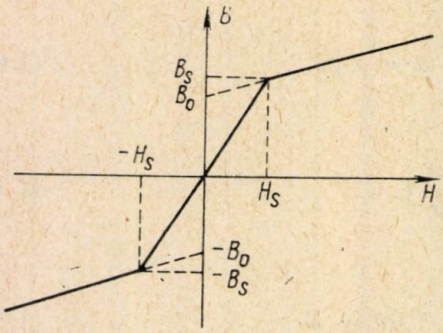


Fig. 2.1. — Caracteristică de magnetizare liniarizată cu două pante diferite.

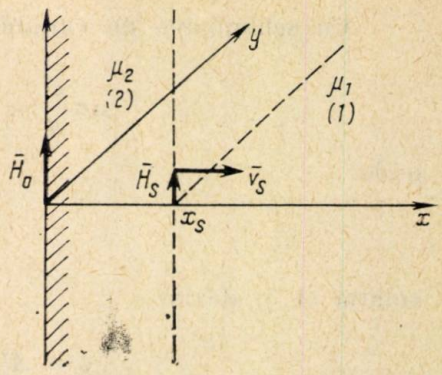


Fig. 2.2. — Cele două domenii ale semispațiului, separate prin suprafața de coordonată mobilă x_s.

Condiția inițială nulă, aplicată lui H_1, duce la

$$A_1 = -B_1. \tag{2.3}$$

Condiția pe frontieră, aplicată lui H_2, duce la

$$B_2 = H_0. \tag{2.4}$$

În acest fel, soluțiile (2.2) se scriu

$$\begin{aligned} H_2 &= H_0 + A_2 \operatorname{erf} x\sqrt{\bar{b}_2}, \\ H_1 &= B_1[1 - \operatorname{erf} x\sqrt{\bar{b}_1}]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pe suprafața de separație (de coordonată x_s) se pun condițiile de trecere

$$H_1 = H_2 = H_s, \tag{2.6}$$

$$E_2 - E_1 = v(B_2 - B_1). \tag{2.7}$$

S-a ținut seama că pătrunderea se face plan-paralel, $\bar{H}$ fiind paralel cu axa z, iar $\bar{E}$ paralel cu axa y. Se poate face observația că (2.6) joacă rolul de condiție „inițială" pentru domeniul 2, ale cărui proprietăți se manifestă pentru intensități ale cîmpului magnetic mai mari ca H_s și rolul de condiție „pe frontieră" pentru domeniul 1, relația (2.7) fiind o relație de trecere specifică suprafețelor de discontinuitate, apărînd în acest caz datorită faptului că frontiera e mobilă.

Condiția (2.6) se poate pune și sub forma

$$x_{s1}(H_s, t) \equiv x_{s2}(H_s, t). \tag{2.6'}$$

O soluție de forma (1.9), pentru $H = \text{const}$, duce la explicitarea

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}} K', \tag{2.8}$$

K' fiind o constantă. Deoarece $b = \frac{\mu\sigma}{4t}$, rezultă

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{2t}, \tag{2.9}$$

deci condiția (2.6) implică, chiar înainte de determinarea constantelor, egalitatea vitezelor frontierei calculate la stînga și la dreapta.

Din relațiile (2.5), ținînd seama de (2.8), rezultă

$$\begin{aligned} x_{s1} &= \frac{1}{\sqrt{b_1}} \operatorname{erf}^{-1}\left(1 - \frac{H_s}{B_1}\right), \\ x_{s2} &= \frac{1}{\sqrt{b_2}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_s - H_0}{A_2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

relații care permit scrierea condiției (2.6) sub forma

$$\frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\operatorname{erf}^{-1}\left(1 - \dfrac{H_s}{B_1}\right)}{\operatorname{erf}^{-1} \dfrac{H_s - H_0}{A_2}}, \tag{2.11}$$

în care este de remarcat dispariția variabilei t.

Intensitatea cîmpului electric se scrie

$$\bar{E} = \frac{1}{\sigma} \bar{J} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{H} = -\bar{j} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial x}$$

sau

$$E = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{2.12}$$

Ținînd seama de relația (2.12), condiția (2.17), avînd în vedere că $B_1 = B_2 = B_s$, devine

$$\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}} \sqrt{\frac{\sigma}{4t}} \left[- A_2 \sqrt{\mu_2}\, \mathrm{e}^{-x_s^2 b_2} - B_1 \sqrt{\mu_1}\, \mathrm{e}^{-x_s^2 b_1} \right] = 0. \tag{2.13}$$

Relațiile (2.11) și (2.13) constituie un sistem de două ecuații pentru determinarea constantelor A_2 și B_1. Introducînd constanta auxiliară K, definită de relația

$$x_s = K\sqrt{\frac{4t}{\sigma}}, \tag{2.14}$$

constantele A_2 și B_1 se vor putea exprima

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{H_s}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu_1}}, \\ A_2 &= \frac{H_s - H_0}{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu_2}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Relația (2.13), avînd în vedere (2.14) și (2.15), devine o ecuație în K:

$$\frac{1 - N}{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu_2}} e^{-K^2\mu_2} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{1}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu_1}} e^{-K^2\mu_1} = 0, \tag{2.16}$$

în care $N = \frac{H_0}{H_s}$. Se explicitează

$$N = 1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu_2}}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu_1}} e^{-K^2(\mu_1 - \mu_2)}. \tag{2.17}$$

Relația (2.17) permite trasarea pentru diverse materiale a caracteristicii $N(K)$, avînd ca parametri μ_1 și μ_2. Pentru o situație dată, cunoscînd N, curba $N(K)$ determină valoarea corespunzătoare a lui K, care, înlocuită în relațiile (2.15), permite determinarea completă a celor două soluții.

Pentru $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, ecuația (2.17) se reduce la

$$N = 1 + \frac{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu}}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu}},$$

cu soluția

$$\operatorname{erf} K\sqrt{\mu} = \frac{N - 1}{N} = \frac{H_0 - H_s}{H_0},$$

care, înlocuită în (2.15), duce la coeficienții $B_1 = H_0$, $A_2 = -H_0$, adică cele două soluții sînt identice cu (1.11).

Pentru oțel electrotehnic s-au trasat curbele $N(K)$ în cazurile :
I) oțel laminat la cald :

$$H_s = 0{,}75 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad \mu_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}; \quad \mu_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ H/m};$$

II) oțel laminat la rece :

$$H_s = 0{,}55 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad \mu_1 = 2{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}; \quad \mu_2 = 1{,}93 \cdot 10^{-4} \text{ H/m};$$

curbele sînt trasate în figura 2.3 în conformitate cu tabela de mai jos :

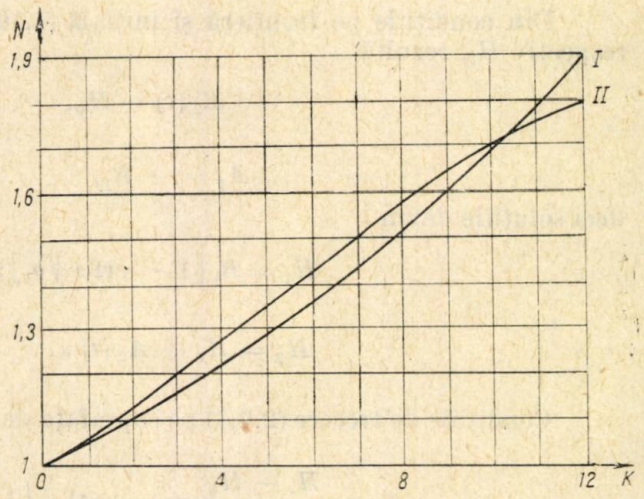


Fig. 2.3. — Curbele $N(K)$ pentru : $I - \mu_1 = 1{,}6.10^{-3}$ H/m ; $\mu_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ H/m, $II - \mu_1 = 2{,}55 \cdot 10^{-3}$ H/m ; $\mu_2 = 1{,}93 \cdot 10^{-4}$ H/m.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_I	1,047	1,099	1,16	1,216	1,283	1,352	1,428	1,507	1,594	1,68	1,78	1,88
N_{II}	1,06	1,126	1,196	1,27	1,345	1,422	1,495	1,565	1,632	1,69	1,75	1,79

Este de remarcat alura curbelor care se apropie destul de mult de o dreaptă. Pentru valori ale lui $K < 3$, folosind dezvoltarea funcției „erf" de argumente mici, se obține relația aproximativă

$$N = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu_1} K. \tag{2.17'}$$

2.1. Cazul particular $\mu_1 = \mu$; $\mu_2 = 0$

În mediul 1, ecuația de pătrundere a cîmpului magnetic avînd forma (1.1), soluția va fi de tipul

$$H_1 = A_1 \operatorname{erf} x \sqrt{b_1} + B_1. \tag{2.18}$$

În mediul 2, ecuația de pătrundere a cîmpului magnetic este

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \tag{2.19}$$

care admite o soluție de forma

$$H_2 = A_2'(t)\, x + B_2'(t). \tag{2.20}$$

Din condițiile pe frontieră și inițială (1.10) aplicate cîmpului H_2 și respectiv H_1, rezultă

$$\begin{aligned} B_2'(t) &= H_0, \\ A_1 &= -B_1, \end{aligned} \tag{2.21}$$

deci soluțiile devin

$$\begin{aligned} H_1 &= B_1\left[1 - \operatorname{erf} x\sqrt{b_1}\right]; \\ H_2 &= H_0 + A_2'(t)\, x. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Condițiile de trecere (2.6,7) pe suprafața de separație x_s duc la

$$x_s = \frac{H_s - H_0}{A_2'(t)} = \frac{1}{\sqrt{b_1}} \operatorname{erf}^{-1}\left(1 - \frac{H_s}{B_1}\right), \tag{2.23}$$

$$-\frac{1}{\sigma} A_2'(t) - B_1 \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}} \sqrt{b_1}\, e^{-x_s^2 b_1} = 0. \tag{2.24}$$

Cu constanta K definită de relația (2.14), din (2.23) rezultă pentru constanta B_1 și funcția de timp necunoscută $A_2'(t)$ expresiile

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{H_s}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu}}, \\ A_2'(t) &= \frac{H_s - H_0}{K} \sqrt{\frac{\sigma}{4t}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Relația (2.24), avînd în vedere (2.14) și (2.25), conduce la o ecuație în constanta K :

$$\frac{1 - N}{2K} + \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \frac{1}{1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu}} e^{-K^2\mu} = 0. \tag{2.26}$$

Explicitînd pe $N = \frac{H_0}{H_s}$, rezultă

$$N = 1 + \frac{2K\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf} K\sqrt{\mu})}\, e^{-K^2\mu}, \tag{2.27}$$

relație care permite trasarea curbei $N(K)$ cu un singur parametru μ, depinzînd de materialul considerat, problema fiind practic rezolvată.

În figura 2.4 sînt trasate curbele $N(K)$ pentru $\mu_r = 1\,000$; $1\,500$; $2\,000$, conform cu datele din tabela de mai jos :

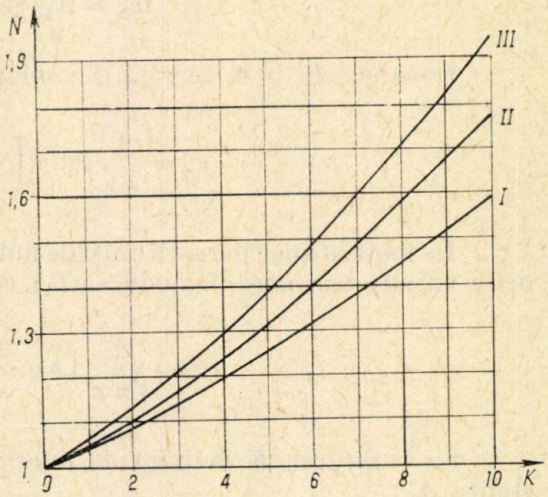


Fig. 2.4. Curbele $N(K)$ pentru :
I — $\mu_{1r} = 1\,000$; $\mu_2 = 0$;
II — $\mu_{1r} = 1\,500$; $\mu_2 = 0$;
III — $\mu_{1r} = 2\,000$; $\mu_2 = 0$.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_{10}	1,042	1,087	1,135	1,186	1,241	1,296	1,358	1,428	1,498	1,572
N_{15}	1,052	1,108	1,169	1,236	1,306	1,386	1,468	1,557	1,651	1,755
N_{20}	1,06	1,127	1,197	1,128	1,368	1,462	1,564	1,675	1,792	1,923

De remarcat că valoarea H_s nu e fixată pentru nici una dintre curbe' ele fiind valabile pentru orice material avînd $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 \to 0$.

2.2. Cazul particular $\mu_1 = \infty$; $\mu_2 = \mu$

În domeniul 1 de permeabilitate infinită, intensitatea cîmpului magnetic va fi nulă, iar în domeniul 2, fiind satisfăcută o ecuație de tipul (1.1), intensitatea cîmpului magnetic va fi de forma (1.9)

$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= A_2 \operatorname{erf} x\sqrt{b} + B_2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Din condiția pe frontieră rezultă

$$B_2 = H_0,$$

condiția inițială fiind identic satisfăcută de H_1. În consecință, soluțiile devin

$$H_1 = 0,$$

$$H_2 = A_2 \operatorname{erf} x\sqrt{b} + H_0. \tag{2.29}$$

Deoarece $H_s = 0$, rezultă din soluția pentru domeniul 2

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{erf}^{-1}\left(-\frac{H_0}{A_2}\right). \tag{2.30}$$

În ipoteza unei inducții inițiale nule (se poate lua, de pildă, $\pm B_s$ sau orice valoare mai mică în modul ca B_s), condiția de trecere (2.7) conduce la

$$-A_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\sigma}\sqrt{b}\, e^{-x_s^2 b} = \frac{x_s}{2t} B_s. \tag{2.31}$$

Cu constanta K definită de relația (2.14), din (2.30) rezultă constanta A_2:

$$A_2 = -\frac{H_0}{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu}}. \tag{2.32}$$

Relația (2.31), avînd în vedere (2.14) și (2.32), devine o ecuație în constanta K:

$$\frac{H_0}{\operatorname{erf} K\sqrt{\mu}} e^{-K^2\mu} \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} = B_s K\sqrt{\mu}, \tag{2.33}$$

din care rezultă

$$\frac{\mu H_0}{B_s} = \sqrt{\pi}\, K\sqrt{\mu}\, e^{K^2\mu} \operatorname{erf} K\sqrt{\mu}. \tag{2.34}$$

Definind și în acest caz pentru inducția magnetică un coeficient N_B similar cu cel utilizat în precedentele două paragrafe pentru intensitatea cîmpului magnetic, rezultă

$$N_B = \frac{B_s + \mu H_0}{B_s} = 1 + \sqrt{\pi}\, K\sqrt{\mu}\, e^{K^2\mu} \operatorname{erf} K\sqrt{\mu}. \tag{2.34'}$$

Relația (2.34′) permite trasarea curbei $N_B(K)$ pentru un material dat, avînd un singur parametru μ, ceea ce rezolvă practic problema.

În figura 2.5 sînt trasate curbele $N_B(K)$ pentru $\mu_r = 1\,000$; $1\,500$; $2\,000$, conform cu datele din tabela de mai jos :

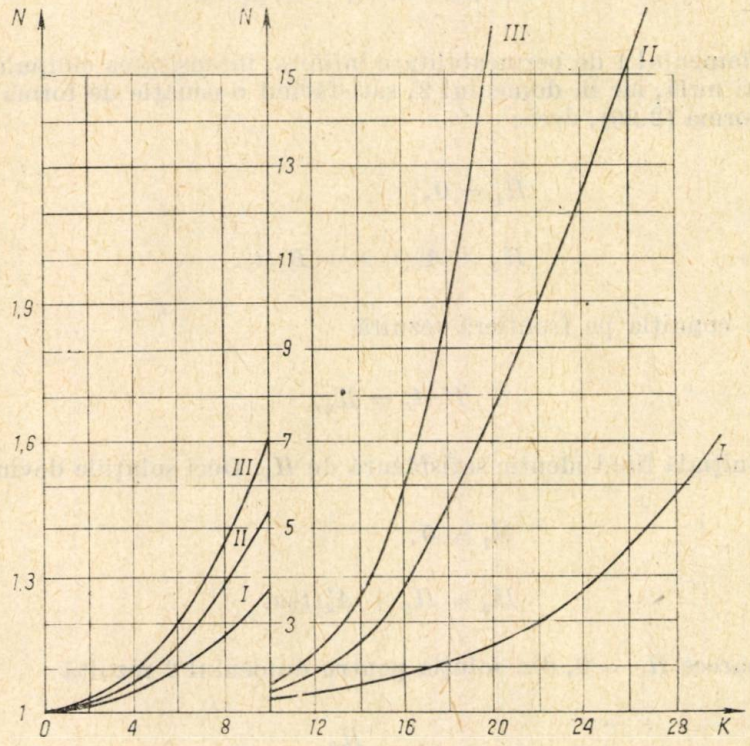


Fig. 2.5. — Curbele $N(K)$ pentru : I — $\mu_1 = \infty$; $\mu_{2r} = 1\,000$,
II — $\mu_1 = \infty$; $\mu_{2r} = 1\,500$,
III — $\mu_1 = \infty$; $\mu_{2r} = 2\,000$.

K	1	3	5	7	8	9	10	15	20	30
$N_{B\,10}$	1,003	1,023	1,065	1,124	1,171	1,219	1,276	1,685	2,42	6,05
$N_{B\,15}$	1,004	1,035	1,098	1,198	1,264	1,340	1,430	2,98	7,86	112
$N_{B\,20}$	1,005	1,046	1,131	1,268	1,36	1,466	1,595	4,48	16,1	478

În cazul în care starea inițială a semispațiului se caracterizează printr-o inducție remanentă $B_r \neq 0$, expresia de calcul (2.34′) se va referi la mărimea

$$N_B = \frac{(B_s - B_r) + \mu H_0}{B_s - B_r}. \tag{2.35}$$

Dacă $B_r = B_s$, pătrunderea se face ca într-un semispațiu de permeabilitate constantă μ.

2.3. Cazul particular $\mu_1 = \infty$; $\mu_2 = 0$

În domeniul 1 de permeabilitate infinită, intensitatea cîmpului magnetic va fi nulă, iar în domeniul 2, satisfăcînd o ecuație de forma (2.19), va fi de forma (2.20), deci :

$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= A_2'(t)\, x + B_2'(t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Din condiția pe frontieră rezultă

$$B_2'(t) = H_0, \tag{2.37}$$

condiția inițială fiind identic satisfăcută de H_1. Deci soluțiile devin :

$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= H_0 + A_2'(t)\, x. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Deoarece $H_s = 0$, din soluția pentru domeniul 2 rezultă

$$x_s = -\frac{H_0}{A_2'}. \tag{2.39}$$

În ipoteza unei inducții inițiale nule, condiția de trecere (2.7) devine

$$-\frac{1}{\sigma} A_2' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{H_0}{A_2'}\right) B_s \tag{2.40}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}A_2'}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sigma B_s} A_2'^3. \tag{2.41}$$

Ultima relație duce la determinarea funcției de timp necunoscute

$$A_2'(t) = \pm \sqrt{\frac{H_0 B_s \sigma}{2\, t}}, \tag{2.42}$$

în a cărei expresie nu apare nici o constantă de la integrarea relației (2.41), deoarece s-a ținut seama că la $t = 0$, $x_s = 0$. Deci în acest ultim caz se poate scrie soluția, cunoscută în literatură [2], [4]

$$H_1 = 0,$$
$$H_2 = -\sqrt{\frac{H_0 B_s \sigma}{2}} \frac{x}{\sqrt{t}} + H_0, \tag{2.43}$$

soluția cu semnul plus pentru A_2' neavînd sens fizic.

Dacă inițial semispațiul se caracterizează printr-o inducție remanentă $B_r \neq 0$, în expresiile (2.40)—(2.43) se înlocuiește B_s cu $B_s - B_r$.

3. CAZUL UNUI MEDIU CU CARACTERISTICĂ DE MAGNETIZARE LINIARIZATĂ (CARACTERISTICA APROXIMANTĂ FIIND ALCĂTUITĂ DIN SEGMENTE DE DREAPTĂ AVÎND n PANTE DIFERITE)

Se consideră un semispațiu cu caracteristica de magnetizare liniarizată (fig. 3.1) :

$$H_{sk-1} < H < H_{sk}; \qquad B = B_{0k} + \mu_k H,$$
$$k = 1,2, \ldots, n; \qquad H_{s0} = 0; \; H_{sn} = H_0. \tag{3.1}$$

În semispațiu vor exista n domenii de permeabilitate $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (fig. 3.2), cu granițele $x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sn-1}$, caracterizate de intensitățile cîm-

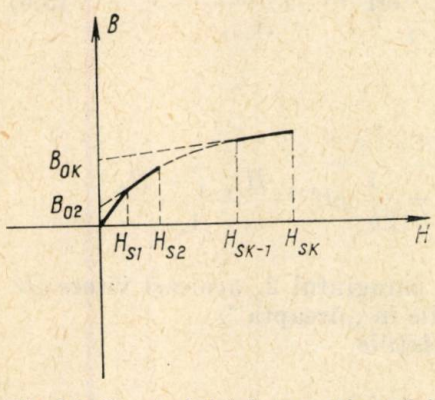


Fig. 3.1. Caracteristică de magnetizare liniarizată cu n pante diferite.

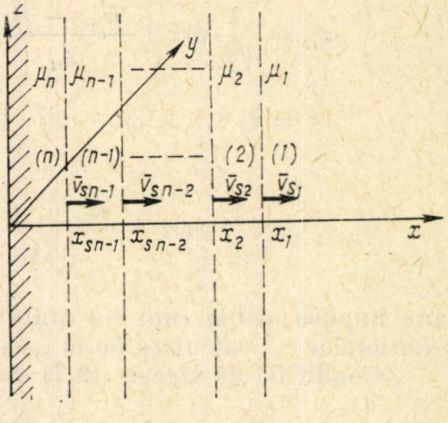


Fig. 3.2. — Cele n domenii ale semispațiului, separate prin $n - 1$ suprafețe de coordonate mobile : $x_{s1}, x_{s2}, \ldots x_{sn-1}$.

pului magnetic $H_{s1}, H_{s2}, \ldots, H_{sn-1}$, deplasîndu-se cu vitezele corespunzătoare $v_{s1}, v_{s2}, \ldots, v_{sn-1}$. Deoarece în toate domeniile ecuația de pătrundere este de forma (1.1), soluțiile vor fi

$$H_i = A_i \operatorname{erf} x \sqrt{b_i} + B_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Condiția inițială nulă aplicată lui H_1 duce la

$$A_1 = -B_1, \tag{3.3}$$

iar condiția pe frontieră aplicată lui H_n la

$$B_n = H_0. \tag{3.4}$$

În acest fel soluțiile (3.2) se scriu

$$\begin{aligned} &H_1 = B_1[1 - \operatorname{erf} x\sqrt{b_1}]; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &H_i = A_i \operatorname{erf} x\sqrt{b_i} + B_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &H_n = H_0 + A_n \operatorname{erf} x\sqrt{b_n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Condiția de trecere (2.6) duce la relațiile

$$x_{s1} = \frac{1}{\sqrt{b_1}} \operatorname{erf}^{-1}\left(1 - \frac{H_{s1}}{B_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_{s1} - B_2}{A_2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned} &x_{si} = \frac{1}{\sqrt{b_i}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_{si} - B_i}{A_i} = \frac{1}{\sqrt{b_{i+1}}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_{si} - B_{i+1}}{A_{i+1}}, \\ &i = 2, 3, \dots, n-2; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{s\,n-1} = \frac{1}{\sqrt{b_{n-1}}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_{s\,n-1} - B_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{b_n}} \operatorname{erf}^{-1} \frac{H_{s\,n-1} - H_0}{A_n},$$

care implică, după cum s-a arătat și în paragraful 2, aceleași viteze ale frontierelor v_{si}, calculate fie în „stînga", fie în „dreapta".

Condițiile de trecere (2.7) duc la relațiile

$$\begin{aligned} &-A_2\sqrt{\mu_2}\, e^{-x_{s1}^2 b_2} - B_1\sqrt{\mu_1}\, e^{-x_{s1}^2 b_1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &-A_i\sqrt{\mu_i}\, e^{-x_{si-1}^2 b_i} + A_{i-1}\sqrt{\mu_{i-1}}\, e^{-x_{si-1}^2 b_{i-1}} = 0, \\ &i = 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.7}$$

avînd în vedere, conform caracteristicii de magnetizare alese, că inducția de ambele părți ale frontierei este aceeași.

Introducînd constantele auxiliare

$$K_i = \frac{x_{si}}{\sqrt{\frac{4t}{\sigma}}}, \tag{3.8}$$

relațiile (3.6) permit exprimarea constantelor de integrare necunoscute A_i, B_i sub forma

$$B_1 = \frac{H_{s1}}{1 - \operatorname{erf} K_1 \sqrt{\mu_1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_i = \frac{H_{si} - H_{si-1}}{\operatorname{erf} K_i \sqrt{\mu_i} - \operatorname{erf} K_{i-1} \sqrt{\mu_i}},$$

$$B_i = \frac{H_{si-1} \operatorname{erf} K_i \sqrt{\mu_i} - H_{si} \operatorname{erf} K_{i-1} \sqrt{\mu_i}}{\operatorname{erf} K_i \sqrt{\mu_i} - \operatorname{erf} K_{i-1} \sqrt{\mu_i}}, \tag{3.9}$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \frac{H_{sn-1} - H_0}{\operatorname{erf} K_{n-1} \sqrt{\mu_n}}.$$

Ținînd seama de relațiile (3.8) și (3.9), relațiile de trecere (3.7) devin

$$\frac{(H_{s2} - H_{s1}) \sqrt{\mu_2}}{\operatorname{erf} K_2 \sqrt{\mu_2} - \operatorname{erf} K_1 \sqrt{\mu_2}} e^{-K_1^2 \mu_2} + \frac{H_{s1} \sqrt{\mu_1}}{1 - \operatorname{erf} K_1 \sqrt{\mu_1}} e^{-K_1^2 \mu_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{(H_{si+1} - H_{si}) \sqrt{\mu_{i+1}} e^{-K_i^2 \mu_{i+1}}}{\operatorname{erf} K_{i+1} \sqrt{\mu_{i+1}} - \operatorname{erf} K_i \sqrt{\mu_{i+1}}} + \frac{(H_{si} - H_{si-1}) \sqrt{\mu_i} e^{-K_i^2 \mu_i}}{\operatorname{erf} K_i \sqrt{\mu_i} - \operatorname{erf} K_{i-1} \sqrt{\mu_i}} = 0;$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-2, \tag{3.10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{(H_{sn-1} - H_0) \sqrt{\mu_n} e^{-K_{n-1}^2 \mu_n}}{\operatorname{erf} K_{n-1} \sqrt{\mu_n}} + \frac{(H_{sn-1} - H_{sn-2}) \sqrt{\mu_{n-1}} e^{-K_{n-1}^2 \mu_{n-1}}}{\operatorname{erf} K_{n-1} \sqrt{\mu_{n-1}} - \operatorname{erf} K_{n-2} \sqrt{\mu_{n-1}}} = 0,$$

adică un sistem de $n-1$ ecuații, avînd drept necunoscute cele $n-1$ constante auxiliare K_i, definite de (3.8). Sistemul se poate rezolva printr-o metodă de iterație conformă cu algoritmul din figura 3.3, bazat pe încadrarea soluției, avînd în vedere din paragraful 2 că H_0 crește cu K (șirul inițial se poate lua $k_j = 10^j$). Obținînd soluțiile $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$, relațiile (3.9) determină complet constantele care apar în soluția (3.5), problema fiind practic rezolvată.

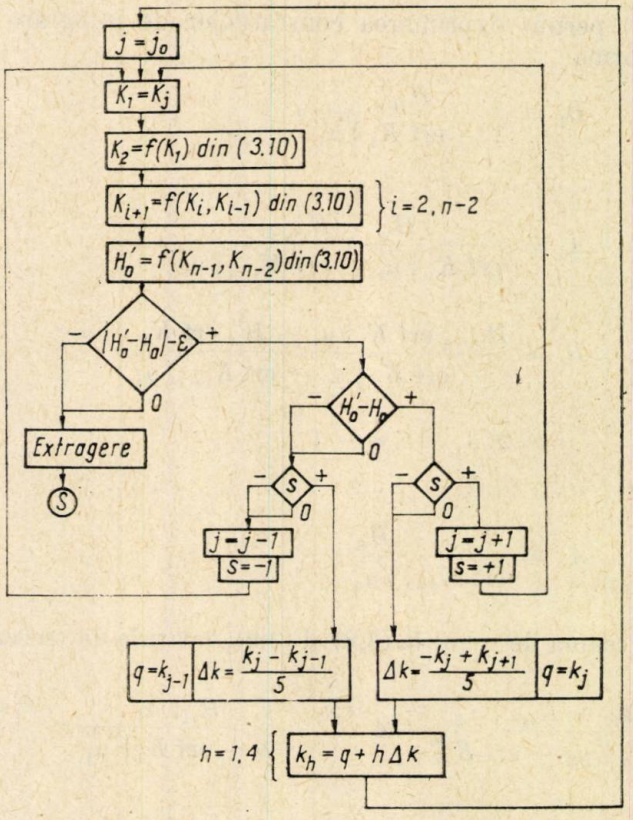


Fig. 3.3. — Algoritm de calcul pentru cazul caracteristicii de magnetizare liniarizate cu n pante diferite.

În cazul unei aproximări cu numărul de pante n suficient de ridicat, sistemul (3.10) și relațiile (3.9) se pot simplifica într-o oarecare măsură, alegînd

$$\Delta H = \frac{H_0}{n}; \quad H_{si} = \mathrm{i}\,\Delta H \tag{3.11}$$

și deci

$$\mu_k = \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}\right)_{H=(k-1)\Delta H} \tag{3.12}$$

4. CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII

În lucrare s-a obținut soluția analitică exactă pentru pătrunderea cîmpului magnetic într-un semispațiu feromagnetic conductor cu caracteristica liniarizată pe porțiuni; variația cîmpului pe frontieră este treaptă, iar condițiile inițiale în semispațiu se consideră nule. Aceasta face ca la rezolvarea problemelor neliniare de acest tip să apară numai eroarea introdusă de aproximarea caracteristicii neliniare, metoda de rezolvare fiind exactă. Soluția se poate obține oricît de precis pe baza măririi volumului de calcule ca în paragraful 3. Cazul rezolvat în §2, precum și cele trei cazuri particulare considerate, prezintă utilitate pentru rezolvările aproximative sau de încadrare a soluției în vederea aprecierii calitative a fenomenelor.

Tratarea cazurilor considerate a fost făcută în mod unitar; cazul particular din paragraful 2.3 regăsește soluția cunoscută în literatură [2], [4], determinată pe alte căi.

Se poate remarca că indiferent de forma particulară a caracteristicii liniarizate, coordonata suprafețelor de separație este proporțională cu $\sqrt{t}$, iar viteza acestora cu $(\sqrt{t})^{-1}$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cupșa, *Curenți variabili în conductoare feromagnetice neliniare*, Electrotehnica, **15**, *2*, 45–55 (1967).
2. P. D. Agarwal, *Eddy-current losses in solid and laminated iron*, Trans. AIEE, **78**, 169–179 (1959).
3. Rao Subba, *Nonlinear magnetization in thin feromagnetic plate*, Proc. IEE, **113**, *6*, 1125 (1966).
4. V. D. Saviuc, *Contribuții la teoria neliniară limită a propagării undelor electromagnetice în conductoare feromagnetice în regim permanent*, Electrotehnica, **14**, *6*, 187 – 200 (1966).

METODĂ OPERATIVĂ PENTRU DETERMINAREA DIRECTĂ A COMPONENTELOR PERIODICE ȘI APERIODICE A CURENȚILOR DE SCURTCIRCUIT

DE

M. POMÂRLEANU

621.316.13.014.3

Lucrarea prezintă un procedeu cifric de calcul direct în funcție de timp al componentelor periodice și aperiodice ale curenților de scurtcircuit, fără calculul întregului proces tranzitoriu, și care printr-un volum redus de operații reușește să dea rezultate cu precizie mulțumitoare.

1. INTRODUCERE

Metodele bazate pe rezolvarea pe pași a regimurilor tranzitorii a sistemelor electroenergetice pentru evaluarea curenților de scurtcircuit necesită, cu toate simplificările aduse, un volum de muncă destul de ridicat; din această cauză, aceste metode exacte sînt recomandabil a fi utilizate ca etalon pentru verificarea corectitudinii altor metode aproximative sau pentru calcule unicat utilizate în situații speciale, unde se cere o precizie ridicată. De cele mai multe ori, necesitățile exploatării sau mai ales ale proiectării sistemelor electroenergetice, solicită cunoașterea curenților de scurtcircuit la diferite intervale de timp de la apariția perturbației, cu precizie modestă, estimativă, însă acoperitoare. Aceste particularități au permis elaborarea mai multor metode, care au la bază fie ipoteza posibilității de extrapolare la cazul unei rețele complexe a modului de variație în timp al curentului de scurtcircuit dat de un generator tip conectat pe impedanța echivalentă a rețelei pasivizate, fie posibilitatea reprezentării generatoarelor în schemele complexe prin cîte o tensiune electromotoare în serie cu o reactanță, ambele variabile în timp, însă de valori predeterminate independent de reactanțele exterioare [1], [2].

Pe lîngă dezavantajele unei echivalări globale cu constante de timp medii neactualizate, care duce la soluții aproximative în ceea ce privește atît rezultanta curentului la locul de defect, cît și mai ales aportul fiecărei

ramuri în parte, metodele, în special cele grafice, sînt improprii lucrului pe calculatoarele cifrice automate.

Scopul lucrării de faţă este să prezinte o metodă cifrică operativă, care să permită efectuarea directă a calculului componentelor curentului de scurtcircuit simetric la timpul dorit, care să ţină cont de particularităţile reale ale generatoarelor, consumatorilor şi reţelei de transport şi care, printr-un volum redus de operaţii, să dea rezultate cu precizie mulţumitoare.

Modul de rezolvare rezidă în construcţia unei reţele echivalente extinse [3]—[5] de la care se extrag o serie de admitanţe operaţionale corespunzătoare aportului fiecărui generator. Pentru obţinerea unei forme acceptabile din punctul de vedere al posibilităţilor de calcul practic, la construcţia acestor admitanţe operaţionale transformările care au asupra rezultatului un efect redus se fac pe căi aproximative, în timp ce operaţiile care au o influenţă determinantă se realizează cît mai exact posibil.

2. CONSTRUCŢIA ADMITANŢELOR OPERAŢIONALE

Vom încerca să obţinem o expresie globală a componentelor curentului de scurtcircuit în funcţie de timp sub forma unei sume ce să cuprindă aportul fiecărei surse în parte. Pentru a păstra o precizie ridicată se va ţine cont de anizotropia maşinilor sincrone, de forţarea excitaţiei acestora şi de unghiurile relative dintre rotoarele generatoarelor. Din această cauză, fiecare element component al sistemului electroenergetic se va reprezenta prin relaţii scrise pe două axe rectangulare şi sincrone.

Deoarece se urmăreşte calculul tuturor componentelor curenţilor de scurtcircuit, în ecuaţiile reprezentative ale maşinilor sincrone se va ţine cont de componentele de pulsaţie, iar ecuaţiile corespunzătoare liniilor electrice se vor scrie astfel încît să se ţină cont şi de regimul tranzitoriu din acestea.

Astfel, pentru maşinile sincrone, relaţiile de legătură între tensiuni şi curenţi în raport cu un sistem de referinţă propriu rotorului sînt [6]

$$\begin{aligned} G'(p)e_{de} - u_q &= \left(r + p\frac{x_d(p)}{\omega}\right) i_d + x_q(p)\, i_q, \\ \frac{p}{\omega} G'(p)\, e_{de} - u_d &= -x_d(p)\cdot i_d + \left(r + p\frac{x_q(p)}{\omega}\right) i_q, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $G'(p)$, $x_d(p)$ şi $x_q(p)$ au expresiile cunoscute din literatura de specialitate [6].

În formă matriceală, relaţia (1) se poate scrie

$$\begin{bmatrix} e_q \\ e_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_q \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + p\dfrac{x_d(p)}{\omega} & x_q(p) \\ -x_d(p) & r + p\dfrac{x_q(p)}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_d \end{bmatrix}, \tag{2}$$

unde

$$e_q = G'(p)\, e_{de} \quad \text{și} \quad e_d = \frac{p}{\omega} G'(p)\, e_{de}\,.$$

Dacă relația (2) este scrisă în raport cu un sistem de referință unic, atunci ea are forma

$$\begin{bmatrix} e'_k \\ \\ e''_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u'_k \\ \\ u''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ T_k^t \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k + p\dfrac{x_d(p)}{\omega} & x_q(p) \\ -x_d(p) & r + p\dfrac{x_q(p)}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ T_k \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_k \\ \\ i''_k \end{bmatrix},$$

unde

$$\left[T_k\right] = \begin{bmatrix} \cos\delta_k & \sin\delta_k \\ -\sin\delta_k & \cos\delta_k \end{bmatrix}, \tag{3}$$

δ_k fiind unghiul dintre sistemul de axe unice și cele corespunzătoare generatorului k, iar $[T_k^t]$ este transpusa matricei $[T_k]$.

În continuare vom lucra cu o formă matriceală compactă, corespunzătoare expresiei (2):

$$[e_k] - [u_k] = [z_k]\,[i_k]$$

sau

$$[i_k] = [y_k]\,[e_k - u_k], \tag{4}$$

unde

$$[y_k] = [z_k]^{-1},$$

k fiind numărul generatorului la care ne referim.

Sub formă explicită, expresia (4) pentru $[T_k] = 1$ se poate scrie, după neglijarea unor termeni mici, astfel [7], [8]:

$$i_q = \left[\frac{r}{2x''_d x''_q}\left(\frac{p}{p-a_1} + \frac{p}{p-a_2}\right) + \frac{r}{x_d x_q} + \frac{r}{x_q}\left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{p}{p + \dfrac{1}{T'_d}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r}{x'_d x''_q} - \frac{r}{x'_d x_q}\right)\frac{p}{p + \dfrac{1}{T''_d}} - \frac{1}{2jx''_q}\left(\frac{p}{p-a_1} - \frac{p}{p-a_2}\right)\right] u_q -$$

$$-\left[\frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{p}{p + \dfrac{1}{T''_q}} - \frac{1}{2x''_q}\left(\frac{p}{p-a_1} + \frac{p}{p-a_2}\right)\right] u_d, \tag{4'}$$

$$i_a=\left[\frac{1}{x_d}+\left(\frac{1}{x'_d}-\frac{1}{x_d}\right)\frac{p}{p+\frac{1}{T'_d}}+\left(\frac{1}{x''_d}-\frac{1}{x'_d}\right)\frac{p}{p+\frac{1}{T''_d}}-\frac{1}{2x''_d}\left(\frac{p}{p-a_1}+\frac{p}{p-a_2}\right)\right]u_q+$$

$$+\left[\frac{r}{2x''_d x''_q}\left(\frac{p}{p-a_1}+\frac{p}{p-a_2}\right)+\frac{r}{x_d x_q}+\frac{r}{x_q}\left(\frac{1}{x'_d}-\frac{1}{x_d}\right)\frac{p}{p+\frac{1}{T'_d}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r}{x''_d x''_q}-\frac{r}{x_q x'_d}\right)\frac{p}{p+\frac{1}{T''_d}}-\frac{1}{2jx''_q}\left(\frac{p}{p-a_1}-\frac{p}{p-a_2}\right)\right]u_d-\frac{1}{x_d}\left(\frac{1}{1+pT'_d}\right)e_{de},$$

unde

$$a_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-\omega^2};\qquad a=\frac{r\omega}{2}\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right).$$

Vom grupa expresiile (4) pentru toți generatorii k într-o formă matriceală bloc sub forma

$$[E_g]-[U_g]=[Z_g]\,[I_g]\quad\text{sau}\quad[I_g]=[Y_g]\,[E_g-U_g]. \tag{5}$$

O linie de transport oarecare se poate reprezenta cu următoarele relații pe două axe :

$$\begin{bmatrix}u'_l\\ \\ u''_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_l+p\frac{x_l}{\omega} & x_l\\ \\ -x_l & r_l+p\frac{x_l}{\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i'_l\\ \\ i''_l\end{bmatrix}, \tag{6}$$

unde u'_e și u''_e sînt componentele căderii de tensiune pe linie.

În continuare se va lucra cu o formă matriceală ca în (4) :

$$[u_l]=[z_l]\,[i_l]\quad\text{sau}\quad[i_l]=[y_l]\,[u_l], \tag{6'}$$

unde

$$[y_l]=[z_l]^{-1}.$$

Sub forma explicită, curentul are aproximativ expresia (7)

$$i''_l=-\left[\frac{r_l}{2x_l}\left(\frac{p}{p-a'_1}+\frac{p}{p-a'_2}\right)+\frac{r_l}{x_l^2}-\frac{1}{2jx_l}\left(\frac{p}{p-a'_1}-\frac{p}{p-a'_2}\right)\right]u'_l+$$

$$+\left[\frac{1}{x_l}-\frac{1}{2x_l}\left(\frac{p}{p-a'_1}+\frac{p}{p-a'_2}\right)\right]u''_l, \tag{7}$$

$$i_i'' = -\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{2x_i}\left(\frac{p}{p-a_1'} + \frac{p}{p-a_2'}\right)\right]u_i' +$$

$$+\left[\frac{r_i}{2x_i^2}\left(\frac{p}{p-a_1'} + \frac{p}{p-a_2'}\right) + \frac{r_i}{x_i^2} - \frac{1}{2jx_i}\left(\frac{p}{p-a_1'} - \frac{p}{p-a_2'}\right)\right]u_i'',$$

unde

$$a_{1,2}' = \frac{r_i\omega}{x_i} \pm j\omega.$$

Pentru întreaga rețea de transport se poate scrie, după liniarizarea celor s noduri de sarcină și separarea nodului de scurtcircuit i, următoarea expresie matriceală nodală [3], [5]:

$$\begin{bmatrix} I_g \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{gg}' & Y_{gi}' \\ Y_{ig}' & Y_{ii}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g \\ U_i \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Înlocuind pe (5) în (8), obținem pentru cazul cînd $U_i = 0$ următoarea expresie a curentului de scurtcircuit [5]:

$$[I_{isc}] = [Y_{ig}'][Y_{gg}' + Y_g]^{-1}[Y_g][E_g] = [Y_{ig}''][E_g]. \tag{9}$$

Punînd sub o formă explicită relația de mai sus, avem

$$[I_{isc}] = \sum_{k=1}^{m} [y_{ki}''(p)][e_k] = \sum_{k=1}^{m} i_{kisc}, \tag{10}$$

unde $y_{ki}''(p)$ reprezintă pe rețeaua extinsă admitanța operațională de legătură între generatorul k și punctul de scurtcircuit i, i_{kisc} expresia matriceală a curentului de scurtcircuit pe ramura ik, iar m numărul total de noduri generatoare.

Aplicînd teorema Norton pentru fiecare ramură ki în parte, se poate scrie următoarea expresie a curentului [3], [5]:

$$[i_{kisc}] = [i_{ki0}] + [y_{ki}''(p)][u_{i0} + \Delta e_k(t)] \tag{11}$$

sau

$$[\Delta i_{ki}] = [i_{kisc}] - [i_{ki0}] = [y_{ki}''(p)][u_{i0}] + [y_{ki}''(p)][\Delta e_k(t)]. \tag{12}$$

Se observă că abaterea curentului pe ramura ki de la valoarea staţionară iniţială la un scurtcircuit în nodul i este determinată de admitanţa operaţională $y'_{ki}(p)$, căreia i se aplică treapta de tensiune U_{i0}, egală numeric cu tensiunea existentă în nodul i înainte de defect, şi variaţia în timp a tensiunii e_k faţă de valoarea ei staţionară iniţială, funcţie cunoscută considerînd acţionarea forţării excitaţiei (pentru generatoarele depărtate de punctul de scurtcircuit se ia $\Delta e_k = 0$). În cele ce urmează vom căuta să dăm pentru (12) o expresie aproximativă, uşor rezolvabilă practic.

Aşa după cum s-a arătat, admitanţa y'_{ik} este rezultatul a $s + m - 1$ operaţii de eliminare, care afectează admitanţa iniţială y_{ik} [5] şi are expresia

$$[y'_{ik}] = [y^{(k)}_{ik}]\,[y_k + y^{(k)}_{kk}]^{-1}\,[y_k] = [y^{(k)}_{ik}]\,[y^{(k)}_{kk}]\,[z_k + z^{(k)}_{kk}]^{-1}, \qquad (13$$

unde

$$[y^{(k)}_{ik}] = [y_{ik}] - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,k}}^{m+s-1} [y^{(j)}_{ij}]\,[y_j + y^{(j)}_{jj}]^{-1}[y^{(j)}_{ik}],$$

$$[y^{(k)}_{kk}] = [y_{kk}] - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,k}}^{m+s-1} [y^{(j)}_{kj}]\,[y_j + y^{(j)}_{jj}]^{-1}\,[y^{(j)}_{jk}] \qquad (14)$$

şi

$$[z^{(k)}_{kk}] = [y^{(k)}_{kk}]^{-1}.$$

În expresiile de mai sus, indicele superior (j) sau (k) arată că admitanţa respectivă trebuie considerată înainte de eliminarea lui j sau k, adică după eliminarea nodurilor de la 1 la $j - 1$, respectiv $k - 1$.

Pentru a da o formă simplificată relaţiei (13), vom evalua ponderea diferiţilor termeni din expresiile (13) şi (14); pentru aceasta vom evalua mai întîi suma $[y_j + y^{(j)}_{jj}]$. Considerînd, aşa cum s-a arătat în anexa 1, că efectul unghiurilor relative asupra matricei y_j este neglijabil, lucru perfect acceptabil pentru cazul de faţă, rezultă că suma se obţine prin adunarea directă a unor expresii de tipul (4′) şi (7) care conţin termeni de aceeaşi formă. Ştiind că reactanţa rezultantă a liniilor ce converg în nodul j este mult mai mică decît oricare dintre reactanţele echivalente ale generatorului însumate cu cele ale transformatorului bloc (iar rezistenţele sînt comparabile), rezultă că mărimile operaţionale elementare au în factori termeni care pentru generatori sînt mult mai mici decît pentru linii. Avînd în vedere de asemenea faptul că constantele $a'_{1,2}$ corespunzătoare circuitului generator-transformator nu diferă cu mult de $a'_{1,2}$ corespunzător liniilor electrice aeriene, se poate considera că în suma $y_{jj} + y_j$ ultimul termen intervine cu o pondere mică.

Aceasta justifică introducerea unei expresii aproximative pentru y_j la calculul termenilor $y^{(k)}_{jk}$ şi $y^{(k)}_{kk}$ din (13).

Adăugînd la aceasta observaţia că în (13) $y^{(k)}_{jk}$ şi $y^{(k)}_{kk}$ intervine sub formă de raport şi ştiind că pentru liniile electrice ale reţelei de transport raportul L/R se găseşte între limite relativ restrînse, se poate considera

într-o primă aproximație că factorii operaționali se reduc. Astfel elementele care intervin în acest raport se pot determina similar ca la un calcul de regim staționar prin metoda eliminării, în care, pentru o mai bună precizie, admitanța y_j se determină sub forma unei medii :

$$y_j = g_j(t) + j\frac{1}{2}(b_{dj}(t) + b_{qj}(t)), \tag{15}$$

unde valorile lui g_j și b_j sînt soluțiile pentru momentul considerat t ale fiecărui termen din expresia (4') la aplicarea unei trepte de tensiune unitare :

$$g(t) = \frac{r}{x_q}\left[\frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)e^{-\frac{t}{T'_d}} + \left(\frac{x_q}{x''_d x''_q} - \frac{1}{x'_d}\right)e^{-\frac{t}{T''_d}}\right],$$

$$b_q(t) = \frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)e^{-\frac{t}{T''_q}}, \tag{15'}$$

$$b_d(t) = \frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)e^{-\frac{t}{T'_d}} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)e^{-\frac{t}{T''_d}}.$$

Determinarea în acest fel a parametrilor echivalenți ai mașinilor sincrone (pentru calculul raportului $[y^{(k)}_{jk}]\,[y^{(k)}_{kk}]^{-1}$) se justifică prin aceea că în cazul unui scurtcircuit generatorii apropiați (care au influențe importante) prezintă la borne o variație de tensiune care poate fi aproximată cu o funcție treaptă de tensiune; ceilalți generatori (depărtați) permit aproximații și mai mari, astfel că această reprezentare este în orice caz mai bună decît cea în care parametrii sînt considerați constanți.

Liniile electrice se reprezintă de asemenea pentru această situație prin parametrii de regim staționar. În schimb, termenul care are asupra rezultatului o influență importantă (suma $z_k + z^{(k)}_{kk}$) se introduce în calculul expresiei (13) cît mai corect, cu formularea sa exactă dată în (2) și (6).

Cu aceste simplificări, expresia operațională a abaterii curentului de scurtcircuit de la starea staționară inițială apare sub forma

$$[\Delta i_{kisc}] = [a_{ik}]\,[z_k(p) + z^{(k)}_{kk}]^{-1}\,[u_{i0} + \Delta e_k], \tag{16}$$

unde

$$[a_{ik}] = |y^{(k)}_{ik}| \cdot |y^{(k)}_{kk}|^{-1}. \tag{16'}$$

Se observă că problema a fost redusă la o formă similară cazului în care un generator debitează prin intermediul unei impedanțe exterioare pe o bară scurtcircuitată; factorul a_{ik} introduce în expresia curentului influența relativă a restului sistemului. Înlocuind în (16) expresiile corespunzătoare ale lui $z_k(p)$ din (3), în care se iau drept axe de referință axele generatorului k, se obține, după neglijarea rezistențelor în sumele în care ele apar alături de reactanțe și după calculul inversei, următoarea expresie a componentelor curentului:

$$\begin{vmatrix} \Delta i_{qiksc} \\ \\ \Delta i_{diksc} \end{vmatrix} = \frac{a_{ik}\,\omega^2}{p^2 + 2ap + \omega^2}$$

$$\begin{vmatrix} r_k + r_{kk}^{(k)} + p\,\dfrac{x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)}}{\omega} & 1 \\ \dfrac{}{(x_{kd}(p) + x_{kk}^{(k)})\,(x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)})} & \dfrac{}{x_{dk}(p) + x_{kk}^{(k)}} \\ 1 & r_k + r_{kk}^{(k)} + p\,\dfrac{x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)}}{\omega} \\ \dfrac{}{x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)}} & \dfrac{}{(x_{dk}(p) + x_{kk}^{(k)})\,(x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)})} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta u_{qi0} + \\ + \Delta e_q \\ \\ \Delta u_{di0} \end{vmatrix} \tag{17}$$

După transformarea sumelor $x_{dk}(p) + x_{kk}^{(k)}$ și $x_{qk}(p) + x_{kk}^{(k)}$ în reactanțe operaționale echivalente [7], și după neglijarea unor termeni mici [8], se poate trece la calculul transformatei și apoi a originalului în funcție de timp, care are următoarea expresie:

$$\Delta i_{qkisc} = A_{ki}\left[1 + \frac{x_{dek}\,x_{qek}}{x''_{dek}\,x''_{qek}}\,e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\cos\omega t + \left(\frac{x_{dek}}{x'_{dek}} - 1\right)e^{-\frac{t}{T'_{de}}} + \right.$$

$$+ \left(\frac{x_{dek}\,x_{qek}}{x''_{dek}\,x''_{qek}} - \frac{x_{dek}}{x'_{dek}}\right)e^{-\frac{t}{T''_{de}}} - \left.\frac{x_{dek}\,x_{qek}}{r_{ek}\,x''_{qek}}\,e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\sin\omega t\right]u_{qi0} -$$

$$- B_{ki}\left[\left(\frac{x_{qek}}{x''_{qek}} - 1\right)e^{-\frac{t}{T''_{qe}}} + 1 - \frac{x_{qek}}{x''_{qek}}\,e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\cos\omega t\right]u_{di0} =$$

$$= M_{ki}\,u_{qi0} + N_{ki}^{q}\,u_{di0}, \tag{18}$$

$$\Delta i_{dkisc} = -C_{ki}\left[1+\left(\frac{x_{dek}}{x'_{dek}}-1\right)e^{-\frac{t}{T'_{de}}}+\left(\frac{x_{dek}}{x''_{dek}}-\frac{x_{dek}}{x'_{dek}}\right)e^{-\frac{t}{T''_{de}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_{dek}}{x''_{dek}}e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\cos\omega t\right]u_{qi0}+A_{ki}\left[1+\frac{x_{dek}\,x_{qek}}{x''_{dek}\,x''_{qek}}e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\cos\omega t+\right.$$

$$+\left(\frac{x_{dek}}{x'_{dek}}-1\right)e^{-\frac{t}{T'_{de}}}+\left(\frac{x_{dek}\,x_{qek}}{x''_{dek}\,x''_{qek}}-\frac{x_{dek}}{x'_{dek}}\right)e^{-\frac{t}{T''_{de}}}-\frac{x_{dek}\,x_{qek}}{x''_{qek}\,r_{ek}}e^{-\frac{t}{T_{ak}}}\sin\omega t\Big]u_{di0}+$$

$$+D_{ki}\left[1+\frac{T'_{de}}{T_{ex}-T'_{de}}e^{-\frac{t}{T'_{de}}}-\frac{T_{ex}}{T_{ex}-T'_{de}}e^{-\frac{t}{T_{ex}}}\right]=N^{d}_{ki}u_{qi0}+M_{ki}u_{di0}+F_{ki},$$

unde

$$A_{ki}=\frac{a_{ki}r_{ek}}{x_{dek}x_{qek}};\qquad B_{ki}=\frac{a_{ki}}{x_{qek}};\qquad C_{ki}=\frac{a_{ki}}{x_{dek}};\qquad D_{ki}=C_{ki}\Delta E_{de\,max},$$

$$x_{qek}=x_{qk}+x^{(k)}_{qkk},\qquad x''_{qek}=x''_{qk}+x^{(k)}_{qkk},\qquad r_{ek}=r_{k}+r^{(k)}_{kk},$$

$$x_{dek}=x_{dk}+x^{(k)}_{dkk},\qquad x'_{dek}=x'_{dk}+x^{(k)}_{dkk},\qquad x''_{dek}=x''_{dk}+x^{(k)}_{dkk},$$

$$T'_{de}=T'_{d0}\frac{x'_{dek}}{x_{dek}},\quad T''_{de}=T''_{d0}\frac{x''_{dek}}{x'_{dek}},\quad T''_{qe}=T''_{q0}\frac{x''_{qek}}{x_{qek}},\quad T_{ak}=\frac{2x''_{dek}x''_{qek}}{\omega r_{ek}(x''_{dek}+x''_{qek})}.$$

Variația curentului rezultant la locul defectului se obține din însumarea relațiilor de forma (18), considerate, bineînțeles, în raport cu un sistem unic de referință:

$$\begin{bmatrix}\Delta i'_{isc}\\ \Delta i''_{isc}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{m}[T_k]\begin{bmatrix}M_{ki} & N^{q}_{ki}\\ N^{d}_{ki} & M_{ki}\end{bmatrix}[T_k]\begin{bmatrix}u'_{i0}\\ u''_{i0}\end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{m}[T^{i}_{k}]\begin{bmatrix}0\\ F_{ki}\end{bmatrix},\qquad(19)$$

unde M_{ki}, N^{0}_{ki}, N^{d}_{ki} au semnificațiile corespunzătoare relațiilor (18), iar T_k corespunzătoare relației (3).

În aceste expresii, unghiurile δ_k se calculează separat pentru timpul t dorit, fie dintr-un calcul foarte simplificat privind mișcarea rotoarelor mașinilor în care puterea electrică maximă se ia cea corespunzătoare primului moment, fie din relația

$$\delta_k(t)=\delta_{k0}+\frac{180\,ft^2}{J}\cdot\Delta P_k,\qquad(20)$$

unde frecvența f se exprimă în Hz, iar constanta de inerție J în secunde și în care s-a considerat dezechilibrul de puteri pe mașini constant, fie con-

siderînd unghiurile existente înainte de apariţia scurtcircuitului (pentru intervale de timp mici).

Utilizînd concluziile din anexa 1, se poate folosi de asemenea o expresie mai simplă, fără ca prin aceasta să se introducă o sursă importantă de erori. Astfel relaţia finală are forma

$$\Delta i'_{sc} = \left(\sum_{k=1}^{m} M_{ki}\right) u'_{i0} + \left(\sum_{k=1}^{m} N^{q}_{ki}\right) u''_{i0} - \sum_{k=1}^{m} F_{ki} \sin \delta_k,$$

$$\Delta i''_{sc} = \left(\sum_{k=1}^{m} N^{d}_{ki}\right) u'_{i0} + \left(\sum_{k=1}^{m} M_{ki}\right) u''_{i0} + \sum_{k=1}^{m} F_{ki} \cos \delta_k. \tag{21}$$

Ultimele sume din expresia de mai sus reprezintă efectul forţării excitaţiei şi se vor lua în consideraţie pentru generatorii apropiaţi de locul de scurtcircuit, aşa cum se va arăta mai departe. Din analiza relaţiei (18) sau (21) rezultă imediat posibilitatea separării componentelor periodice de cele aperiodice şi a calculării lor în mod independent.

3. MODUL PRACTIC DE CALCUL

Algoritmul de calcul cuprinde o serie de etape care permit pentru un sistem dat, să se determine valorile curenţilor de scurtcircuit de la locul de defect sau de pe ramurile adiacente acestuia, precum şi aporturile generatoarelor la acest scurtcircuit în funcţie de intervalul de timp scurs de la apariţia defectului, pentru scurtcircuit în orice punct al sistemului.

În ordinea efectuării calculului, etapele sînt următoarele:

a) se determină cu expresia (15) (care de altfel se execută cu acelaşi program cu care se calculează termenii relaţiei (18) pentru $a_{ki} = 1$; $x^{(k)}_{kk} = r^{(k)}_{kk} = 0$) valorile

$$g_k(t);\ b_{qk}(t) \text{ şi } b_{dk}(t);$$

b) se calculează cu relaţia (15) y_k şi apoi cu ajutorul unui program clasic de eliminare [3], [4] se construieşte matricea admitanţelor nodale a reţelei extinse în raport cu nodul cu scurtcircuit i;

c) pentru toţi generatorii k se determină cu relaţia (16′) coeficienţii a_{ik};

d) se determină apoi reactanţele $x^{(k)}_{kk}$ (pentru calculul acestor mărimi se utilizează relaţia cunoscută de la eliminare, în care y_k se ia cu semn schimbat);

e) se determină nodurile pentru care va acţiona forţarea excitaţiei, şi anume nodurile pentru care $a_{ik} \geqslant \dfrac{\Delta U_{lim}}{U_n}$ la $t=0$ (vezi anexa 2), unde ΔU_{lim} este căderea de tensiune-limită de la care începe să acţioneze forţarea excitaţiei;

f) se calculează separat cu relațiile (18) componentele periodice ale abaterilor curenților de scurtcircuit, la care, adăugînd valorile regimurilor staționare inițiale, se determină curenții de scurtcircuit pe ramurile generatoare ; se determină apoi componentele aperiodice.

g) se obține, în fine, curentul rezultat la locul de scurtcircuit în raport cu sistemul de referință unic (relațiile (19) sau (21)).

Observăm că s-a stabilit o cale directă de calcul a curenților de scurtcircuit în funcție de timp sub formă analitică neiterativă cu relații relativ simple, care pot fi încadrate într-un program cifric unitar. Se poate observa de asemenea că, dacă am elabora un program cifric după principiile care au stat la baza metodei curbelor de decrement, volumul de calcul cerut nu ar diferi cu mult de cel necesitat de metoda prezentată în lucrarea de față, care însă are în plus avantajul unei precizii mai bune.

4. VERIFICĂRI PRACTICE

În scopul stabilirii corectitudinii, a modului practic de utilizare și a performanțelor metodei, s-a întocmit un program pentru calculatorul CIFA —102. Pentru aceasta s-a ales o rețea cu 15 noduri, schematizată în figura 1.

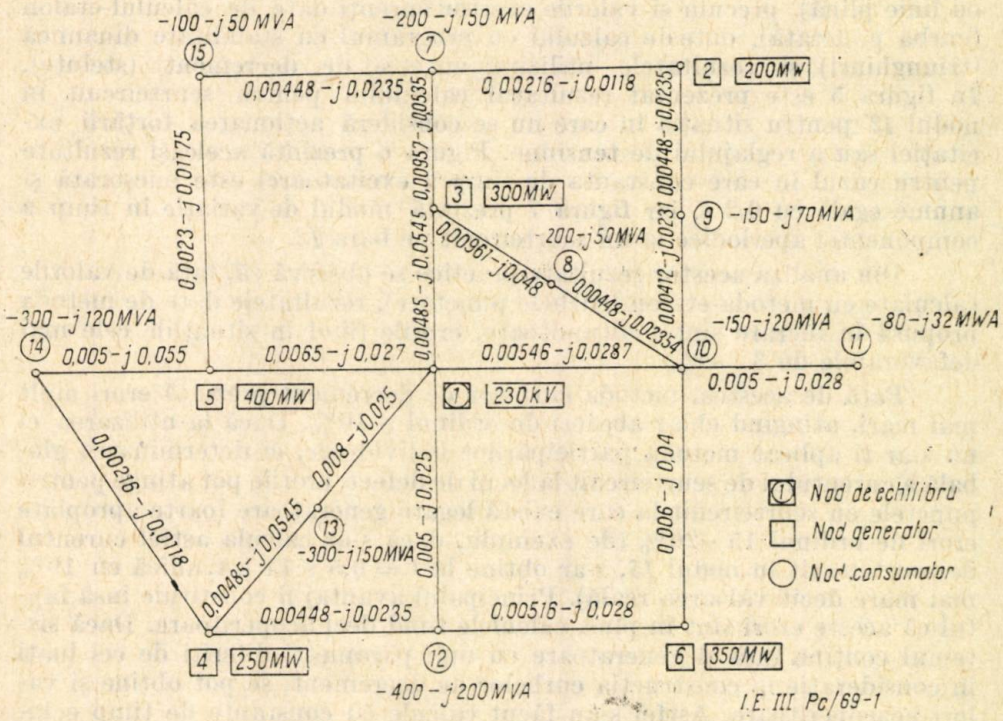


Fig. 1

Parametrii mașinilor sincrone din nodurile generatoare (în care sînt incluși și parametrii transformatoarelor-bloc), parametrii consumatorilor și caracteristicile nodale ale regimului electric anterior defectului sînt prezentați în tabela 1.

Plafonul excitației s-a ales pentru toate generatoarele egal cu 2, iar constanta de timp echivalentă a excitatoarei 0,6 s pentru a putea astfel compara rezultatele obținute pe calea prezentată față de cele obținute utilizînd curbele de decrement. Pentru a stabili corectitudinea calculelor, rezultatele sînt analizate în raport cu cele obținute cu un model cifric foarte precis, considerat de noi etalon, în care se integrează pe pași foarte mici (0,001 s) ecuațiile tranzitorii complete ale mașinilor sincrone, ale liniilor și ale instalațiilor de reglaj automat [8].

De asemenea s-au mai calculat curenții de scurtcircuit cu ajutorul unui program de stabilitate dinamică în care se neglijează în ecuațiile generatoarelor componentele aperiodice și regimul tranzitoriu din linii, iar mașinile sincrone sînt reprezentate prin reactanțele supratranzitorii și prin tensiuni electromotoare variabile în timp pe ambele axe [9].

S-au calculat prin aceste metode curenții de scurtcircuit pentru cazul apariției la momentul $t = 0$ a unui scurtcircuit trifazat în diferite puncte ale sistemului.

Figurile 2, 3, 4 și 6 reprezintă valorile eficace ale componentelor periodice ale acestor curenți în funcție de timp pentru scurtcircuit pe barele *5*, *12*, *15* (fig. 1), calculate prin metoda prezentată în lucrare (curba cu linie plină), precum și valorile acestor curenți date de calculul-etalon (curba punctată), date de calculul cu programul cu stabilitate dinamică (triunghiuri) și rezultatele utilizînd curbele de decrement (steluțe). În figura 5 este prezentat rezultatul calculului pentru scurtcircuit în nodul *12* pentru situația în care nu se consideră acționarea forțării excitației sau a reglajului de tensiune. Figura 6 prezintă aceleași rezultate pentru cazul în care constanta de timp a excitatoarei este micșorată și anume egală cu 0,2 s, iar figura 7 prezintă modul de variație în timp a componentei aperiodice la un scurtcircuit pe bara *12*.

Din analiza acestor rezultate practice se observă că, față de valorile calculate cu metoda-etalon (curbele punctate), rezultatele date de metoda propusă în lucrare sînt mulțumitoare, erorile fiind în situațiile cele mai defavorabile de 3—4%.

Față de acestea, metoda curbelor de decrement prezintă erori mult mai mari, atingînd chiar abateri de ordinul a 10%. Dacă la utilizarea ei nu s-ar fi aplicat metoda participărilor individuale, ci determinarea globală a curentului de scurtcircuit la locul de defect, erorile pot atinge pentru punctele cu scurtcircuit la care există legate generatoare foarte apropiate erori de ordinul 15—20% (de exemplu, dacă s-ar calcula astfel curentul de scurtcircuit în nodul *15*, s-ar obține la $t = 0{,}5$ s 14 kA, adică cu 19% mai mare decît valoarea reală). Principalul avantaj îl constituie însă faptul că aceste erori sînt în plus, calculele fiind deci acoperitoare. Dacă sistemul conține însă și generatoare cu unii parametri diferiți de cei luați în considerație la construcția curbelor de decrement, se pot obține și valori neacoperitoare. Astfel s-au făcut calcule cu constante de timp echivalente circuitelor excitatoarei mai mici decît cele utilizate la construcția

Tabela 1

Caracteristicile regimului inițial și parametrii generatoarelor

Nod	Tensiunea		Curentul		Puterea nominală	X_d	X_q	X'_d	X''_d	X''_q	T'_d	T''_{do}	T''_{qo}	T_a	L_a
	U'(KV)	U''(KV)	I(KA)	I''(KA)	(MVA)	(Ω)	(Ω)	(Ω)	(Ω)	(Ω)	(s)	(s)	(s)	(s)	(Ω)
1	230	0	1,828	−0,9875	550	230,83	230,8	44,4	33,6	33,7	1,26	0,089	0,528	0,24	0,45
2	229,881	9,256	0,886	−0,3825	250	423,2	423,2	86,6	65,6	65,6	1,29	0,088	0,430	0,25	0,84
3	229,980	2,752	1,2919	−1,0444	350	317,4	317,4	46,9	35,36	35,4	0,777	0,0736	0,6	0,25	0,45
4	229,79	9,919	1,0395	−1,1221	325	341,8	341,8	55	45,57	45,6	1,4	0,0856	0,498	0,23	0,63
5	229,880	7,336	1,76	−0,624	500	229,6	229,6	43,4	32,8	32,8	1,21	0,0885	0,538	0,25	0,84
6	229,939	5,189	1,538	−0,704	500	229,6	229,6	32,8	24,75	24,8	0,914	0,0735	0,62	0,25	0,32
7	214,97	−12,958	−0,885	0,751	−200−j150										
8	219,902	−16,869	−0,887	0,295	−200−j50										
9	213,833	−13,865	−0,677	0,3712	−150−j70										
10	218,55	−11,917	−0,664	0,402	−150−j80										
11	209,473	−23,37	−0,360	0,192	−80−j32										
12	211,482	−20,895	−1,780	1,121	−400−j200										
13	216,753	−21,079	−1,304	0,8188	−300−j150										
14	218,555	−14,42	−1 33	0,636	−300−j120										
15	210,18	−17,042	−0,435	0,2746	−100−j50										

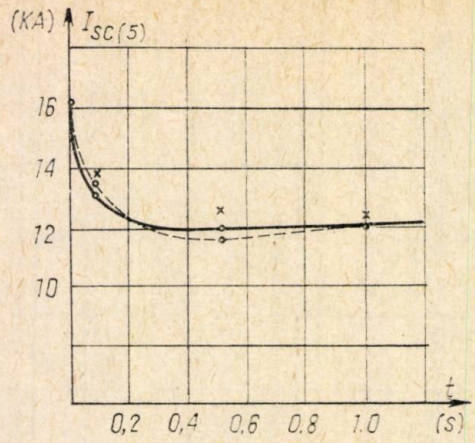


Fig. 2

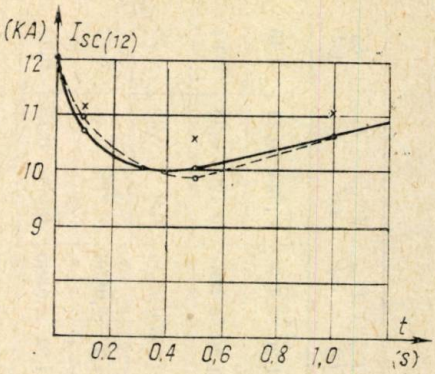


Fig. 3

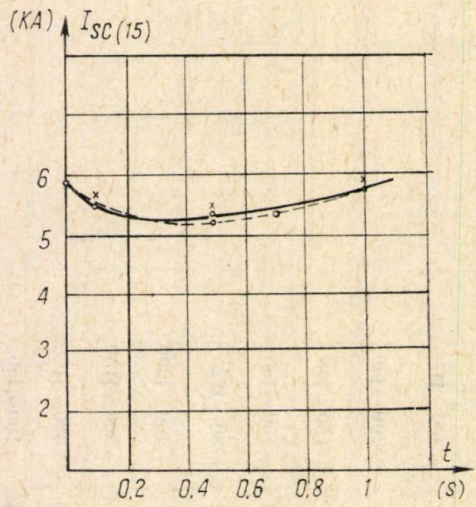


Fig. 4

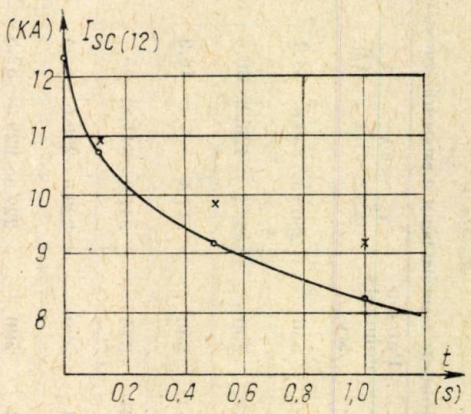


Fig. 5

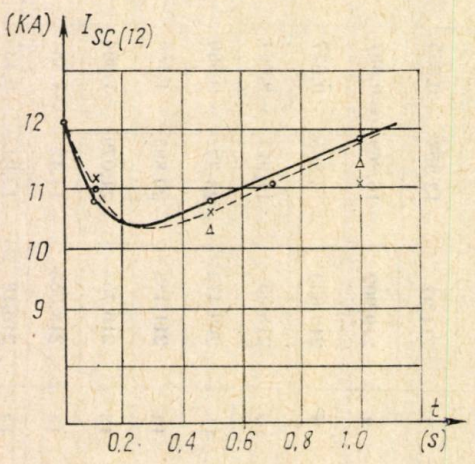


Fig. 6

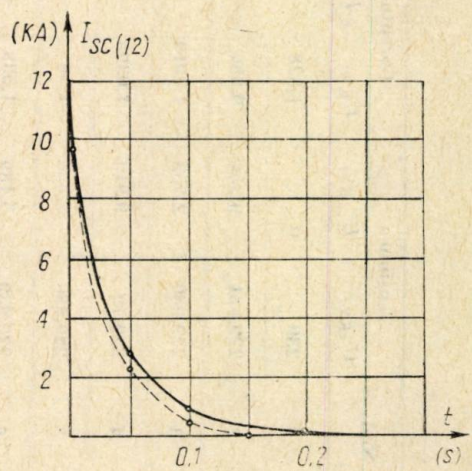


Fig. 7

curbelor de decrement (constante de timp întîlnite astăzi la generatoarele moderne); rezultatele, reprezentate în figura 6, arată că la timpi mai mari (atunci cînd se simte acțiunea forțării excitației) rezultatele date de curbele de decrement indică curenți de scurtcircuit mai mici decît valorile reale cu aproximativ 6%. Dificultățile și mai mari apar la sisteme mixte (termo-hidro) interconectate printr-o rețea amplu buclată, la care condițiile de echivalare pentru obținerea reactanțelor de calcul cerute de utilizarea curbelor de decrement impun o serie de separări arbitrare. În aceste situații, curenții de scurtcircuit obținuți pentru timp mic (0,1—0,5 s) pot avea abateri mari de la valorile adevărate, lucru care este evitat complet de metoda prezentată în această lucrare.

În ceea ce privește componentele aperiodice, rezultatele pot fi considerate de asemenea mulțumitoare (fig. 7); diferențele obținute, datorită amortizării ceva mai lente decît situația luată la etalon, sînt mai importante la timpi pentru care componentele aperiodice devin nesemnificative.

5. CONCLUZII

Prin construcția unei rețele extinse echivalente rețelei reale, care permite extragerea unor admitanțe operaționale corespunzătoare aportului la scurtcircuit al fiecărei surse în parte, s-au stabilit o serie de relații care dau posibilitatea determinării directe, în funcție de timp, a valorilor curenților de scurtcircuit simetric pentru defect în orice punct al rețelei.

Aceste relații, care necesită un volum relativ redus de calcule, prezintă avantajul că iau în considerare anizotropia rotorului mașinilor sincrone (lucru deosebit de important pentru grupurile hidro), efectele forțării excitației, parametri reali ai fiecărei centrale în parte, unghiurile dintre mașini, caracteristicile complete ale rețelei de transport etc.

Datorită principiilor utilizate, metoda permite calculul separat atît al componentelor periodice, cît și al celor aperiodice ale curenților de scurtcircuit.

Rezultatele obținute pe o serie de exemple de calcul au scos în evidență operativitatea metodei, posibilitățile ei de încadrare simplă într-un program cifric unitar și precizia mulțumitoare a mărimilor calculate.

ANEXE

1. EFECTUL UNGHIURILOR RELATIVE ALE PIESELOR POLARE ASUPRA ADMITANȚELOR OPERAȚIONALE

Vom scrie în sistemul de referință particular mașinii sincrone d, q, ecuațiile de legătură dintre curenți și tensiuni sub următoarea formă, obținută prin inversarea relației (2) din text:

$$\begin{bmatrix} i_q \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(p) & G_q(p) \\ -G_d(p) & B(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_q - u_q \\ e_d - u_d \end{bmatrix},$$

unde $B(p)$, $G_q(p)$, $G_d(p)$ au semnificaţia termenilor din parantezele drepte ale relaţiilor (4′) din text.

Scrise în raport cu sistemul de referinţă unic, aceste relaţii devin, după o transformare similară a în (3),

$$\begin{bmatrix} i' \\ i'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B + \dfrac{G_d - G_q}{2} \sin 2\delta & G_q - (G_d - G_q)\sin^2\delta \\ -G_d + (G_d - G_q)\sin^2\delta & B - \dfrac{G_d - G_q}{2}\sin 2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e' - u' \\ e'' - u'' \end{bmatrix}.$$

Analizînd prin intermediul răspunsului indicial diferenţa $G_d - G_q$ se poate observa că ea este relativ mică şi, în plus, este înmulţită cu o mărime subunitară; deci putem acepta că efectul schimbării sistemului de referinţă nu influenţează semnificativ expresia admitanţei operaţionale echivalente a generatorului respectiv, astfel că, în situaţiile în care această admitanţă se află în sume alături de termeni mai mari, se poate neglija schimbarea sistemului de referinţă.

2. SELECTAREA GENERATORILOR LA CARE ACŢIONEAZĂ FORŢAREA EXCITAŢIEI

Variaţia de tensiune la bornele generatorului k după momentul apariţiei perturbaţiei este

$$[\Delta u_k] = [y_k(p)]^{-1}\,[\Delta i_{ki}],$$

Însă, conform relaţiei (16), rezultă

$$[\Delta i_{ki}] = a_{ki}\,[z_k(p) + z_{kk}^{(k)}]^{-1}\,[u_{i0}].$$

Deoarece $z_{kk}^{(k)} \ll z_k$ şi deoarece diferenţele dintre tensiunile diferitelor bare în regim normal de funcţionare nu diferă prea mult, se poate scrie

$$[\Delta u_k] \cong [y_k(p)]^{-1}\,a_{ki}\,[z_k(p)]\,[u_{k0}]$$

sau

$$\frac{|\Delta u|_k}{|u_{k0}|} \cong a_{ki}.$$

Deci, pentru $t = 0$, parametrul a_{ki} indică aproximativ chiar variaţia relativă a tensiunii de la bara k pentru scurtcircuit în i şi permite astfel identificarea barelor unde are loc acţionarea forţării excitaţiei.

BIBLIOGRAFIE

1. S.A. Ulianov, *Regimuri tranzitorii ale sistemelor electrice*, București, Edit. tehnică, 1967, p. 638.
2. * * * *Electrical transmission and Distribution Reference* Book, Ed. 4, East Pittsburgh PA Westinghouse Corporation, 1950, p. 824.
3. M. Pomârleanu, *Utilizarea unor scheme echivalente la calculul curenților de scurtcircuit*, St. cerc. electr., **17**, *4*, 769–782 (1967).
4. P. Dimo, G. Moraite, S. Huckert, *Calculul exact al curenților de scurtcircuit cu determinarea simultană a schemelor REI*, Energetica, *9*, 476–481 (1963).
5. M. Pomârleanu, *Selectarea factorilor determinanți și valorilor curenților de scurtcircuit*, St. cerc. energ., **19**, *3*, 601–616 (1969).
6. B. Adkins, *The general theory of electrical machines*, Londra, Chapman-Hall, 1957, p. 235.
7. E. Manea, S. Ionescu, M. Pomârleanu, *Calculul numeric al regimurilor tranzitorii succesive*, St. cerc. energ. **12**, *1*, 163 – 185 (1962).
8. M. Pomârleanu, *Studiu pe un model cifric al procesului tranzitoriu de scurtcircuit*, St. cerc. energ., **19**, *4*, 831–839 (1969).
9. S. Ionescu, M. Stadaker, I. Iosub, *Algoritm pentru calculul regimurilor dinamice din sistemele electroenergetice*, Energetica, **XVIII**, *4*, 198–203 (1969).

METODĂ DE DETERMINARE A VARIAȚIEI TENSIUNII DE-A LUNGUL UNEI LINII ELECTRICE LUNGI DESCHISE LA CAPĂT ȘI ÎNDEPLININD CONDIȚIA HEAVISIDE

DE

I. S. ANTONIU, GH. DUMITRESCU și V. S. TURCU

621.372.21

În acest articol se prezintă o metodă de determinare a tensiunii la o linie electrică deschisă la capătul receptor $[Z(p) = \infty]$, alimentată cu o tensiune constantă $U_1 = E$ și satisfăcînd condiția lui Heaviside $\delta = \frac{r}{l} = \frac{g}{c}$.

1. EXPRESIA ANALITICĂ A TENSIUNII ÎNTR-UN PUNCT AL LINIEI ÎN FUNCȚIE DE TIMP ȘI DE DISTANȚĂ

Expresia cunoscută a imaginei tensiunii în cazul considerat $Z(p) = \infty$ și $U_1 = E$ devine

$$\mathfrak{L}u = \frac{\operatorname{ch}(\gamma x)}{\operatorname{ch}(\gamma X)}\,\mathfrak{L}E = \frac{\operatorname{ch}(\gamma x)}{p\operatorname{ch}(\gamma X)}\,E. \qquad (1)$$

În condiția Heaviside $\delta = \frac{r}{l} = \frac{g}{c}$, expresia impedanței caracteristice

$$Z_c = \sqrt{\frac{r + pl}{g + pc}}$$

devine

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}},$$

iar constanta de propagare

$$\gamma = \sqrt{(r + pl)(g + pc)}$$

St. cerc. energ. electr. Tom. 20, Nr. 4, p. 867–881, 1970

devine

$$\gamma = (p + \delta)\sqrt{lc}.$$

Dar fiindcă expresia lui $\mathfrak{L}\,u$ este de forma $\frac{A(p)}{p\,B(p)}$, originalul corespunzător se obţine aplicînd teorema dezvoltării lui Heaviside:

$$u = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(p_i)}{p_i B'(p_i)} e^{p_i t}, \tag{2}$$

în care

$$A(p) = E\,\mathrm{ch}(\gamma x) = E\,\mathrm{ch}[(p + \delta)\sqrt{lc}\,x] =$$

$$= E\,\mathrm{ch}\left[(p + \delta)\tau\,\frac{x}{X}\right], \tag{3}$$

$$B(p) = \mathrm{ch}(\gamma X) = \mathrm{ch}[(p + \delta)\sqrt{lc}\,X] =$$

$$= \mathrm{ch}[(p + \delta)\tau], \tag{4}$$

$$B'(p) = X\,\mathrm{sh}(\gamma X)\frac{\partial \gamma}{\partial p} = X\sqrt{lc}\,\mathrm{sh}[(p + \delta)\sqrt{lc}\,X] =$$

$$= \tau\,\mathrm{sh}[(p + \delta)\tau], \tag{5}$$

unde s-a notat

$$X\sqrt{lc} = \tau.$$

Rezultă

$$A(\mathrm{o}) = E\,\mathrm{ch}(\delta\sqrt{lc}\,x) = E\,\mathrm{ch}\left(\delta\tau\,\frac{x}{X}\right), \tag{6}$$

$$B(\mathrm{o}) = \mathrm{ch}\,(\delta\sqrt{lc}\,X) = \mathrm{ch}(\delta\tau). \tag{7}$$

Se determină rădăcinile lui $B(p)$:

$$\mathrm{ch}[(\mathrm{p} + \delta)\sqrt{lc}\,X] = 0,$$

egalitate care are loc numai pentru p imaginar.

Luînd

$$\mathrm{ch}[(p + \delta)\sqrt{lc}\,X] = \cos[-j(p + \delta)\sqrt{lc}\,X] = 0,$$

rezultă

$$-j(p_n + \delta)\sqrt{lc}\,X = (2n + 1)\,\frac{\pi}{2}\,;\ [n \in I = \text{mulţimea numerelor întregi}],$$

apoi

$$(p_n + \delta)\sqrt{lc}\,X = j(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

și deci

$$p_n = j\frac{2n+1}{X\sqrt{lc}}\frac{\pi}{2} - \delta = j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta. \tag{8}$$

Ținînd seama de (5) și (8), se deduce

$$\begin{aligned} B'(p_n) &= \tau\,\mathrm{sh}\left[\left(j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta + \delta\right)\tau\right] = \\ &= \tau\,\mathrm{sh}\left[j(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = j\,(-1)^n\tau, \\ A(p_n) &= E\,\mathrm{ch}\left[\left(j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta + \delta\right)\tau\frac{x}{X}\right] = \\ &= E\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

și

$$e^{p_n t} = e^{\left(j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta\right)\tau} = e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}e^{-\delta t} = e^{-\delta t}(\cos\alpha + j\sin\alpha), \tag{10}$$

unde

$$\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}.$$

Ținînd seama de formulele (6), (7), (9), (10) și de faptul că

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} N = \sum_{0}^{\infty}(N + N^*) = 2\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,N,$$

formula (2) devine

$$u = E\left\{\frac{\mathrm{ch}\left(\delta\tau\frac{x}{X}\right)}{\mathrm{ch}(\delta\tau)} + 2\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{E\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\right]}{\left[j\frac{2n+1}{\tau}\frac{\pi}{2} - \delta\right]j(-1)^n\tau}e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}e^{-\delta t}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{\mathrm{ch}\left(\delta\tau\frac{x}{X}\right)}{\mathrm{ch}(\delta\tau)} - \right. \tag{11}$$

$$\left. \frac{4}{\pi}e^{-\delta t}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\right]\mathrm{Re}\frac{e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}}{(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau}\right\}.$$

Notînd

$$(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau = M_n e^{j\varphi_n} = M_n(\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n),$$

se obţine

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{\delta\tau}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \quad \text{şi} \quad M_n = \sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{2}{\pi}\delta\tau\right)^2}$$

şi deci

$$\operatorname{Re}\frac{e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}}{(2n+1)+j\frac{2}{\pi}\delta\tau} = \frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}},$$

astfel că relaţia (11) devine

$$u = E\left\{\frac{\operatorname{ch}\left(\delta\tau\frac{x}{X}\right)}{\operatorname{ch}(\delta\tau)} - \right.$$

$$\left. -\frac{4}{\pi}e^{-\delta t}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{X}\right]\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right\}. \tag{12}$$

În cazul cînd linia este fără pierderi ($r = g = 0$) rezultă $\delta = 0$, $\varphi_n = 0$, $\forall n \in I$, regăsindu-se relaţia corespunzătoare [1].

Revenind la expresia (12), ea se mai poate scrie şi sub forma

$$u = E\left\{\frac{\operatorname{ch}\left(\delta\tau\frac{x}{X}\right)}{\operatorname{ch}(\delta\tau)} - \frac{2}{\pi}e^{-\delta t}\sum_0^\infty\right. \tag{12'}$$

$$\left.(-1)^n\frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X}-\frac{t}{\tau}\right)+\varphi_n\right]+\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{X}+\frac{t}{\tau}\right)-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\delta^2\tau^2}}\right\}.$$

Din această relaţie rezultă că pe linie apar unde călătoare directe şi reflectate de diverse armonice; aceste unde se propagă cu viteza

$$V_0 = \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{lc}}$$

pentru unda directă și cu viteza

$$V_0 = \frac{dx}{dt} = \frac{X}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

pentru unda reflectată, adică aproximativ cu viteza luminii; toate aceste armonici se amortizează cu același factor de amortizare δ.

2. REPREZENTAREA GRAFICĂ A VARIAȚIEI TENSIUNII PE LINIE ÎN FUNCȚIE DE TIMP

Expresia analitică exactă (12′) dă posibilitatea reprezentării variației tensiunii electrice de-a lungul liniei. Operația este laborioasă și necesită modelarea pe un calculator electronic.

Ne propunem să dăm o reprezentare grafică a tensiunii, dedusă tot din relația (12′) în funcție de variabilele x și t, folosind un calculator digital.

Se consideră valoarea relativă a tensiunii definită de relația $R(t, x) = \frac{u(t, x)}{E}$, a cărei reprezentare grafică se face în domeniul

$$\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant \mathcal{T}, \\ 0 \leqslant x \leqslant X, \end{cases}$$

unde $\mathcal{T}$ este timpul pentru care se reprezintă grafic variația tensiunii și se ia egal cu $332 \cdot 10^{-4}$ s, iar X este lungimea totală a liniei.

În acest domeniu se va considera un număr finit de puncte situate în vîrfurile unor dreptunghiuri, coordonatele vîrfurilor pentru un asemenea dreptunghi fiind

$$(t_{i-1}, x_{j-1});\ (t_i, x_{j-1});\ (t_{i-1}, x_j) \text{ și } (t_i, x_j).$$

Pentru simplificarea problemei se va face această reprezentare numai în cinci puncte ale liniei, și anume pentru $x = 0$; $\frac{1}{4}X$; $\frac{2}{4}X$; $\frac{3}{4}X$ și X. Se va lua deci

$$t_i - t_{i-1} = 2.10^{-4} \text{ s și } x_j - x_{j-1} = \frac{1}{4}X\,m,$$

în care

$$j = 1 \cdots 4;\ i = 1 \cdots 166 \text{ și } x_0 = 0,\ t_0 = 0.$$

Reprezentarea grafică a domeniului este dată în figura 1.

În expresia $R(t,x)$ se ia

$$\delta = 60 \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = 3,(3)\ 10^{-3} \text{ s},$$

$$X = 10^6 \text{ m}.$$

Notînd $\frac{x}{X} = u$; $\frac{t}{\tau} = v$ şi $\delta\tau = z$, expresia lui $R(t,x)$ dedusă din relaţia (12′) se poate scrie

$$R(v,u) = \frac{\operatorname{ch}(z\,u)}{\operatorname{ch} z} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\,e^{-zv}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}(u-v)+\varphi_n\right]+\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}(u+v)-\varphi_n\right]}{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 z^2}}.$$

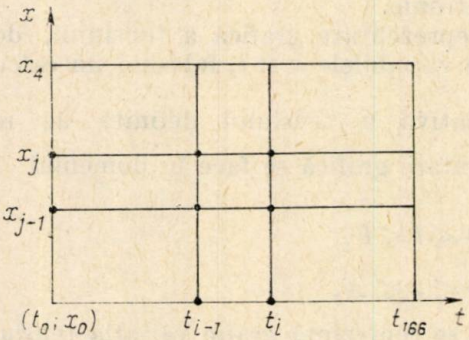


Fig. 1. — Domeniul de variaţie a tensiunii de-a lungul liniei.

În consecinţă, graficul corespunzător expresiei $R(t, x)$ va fi cel obţinut pentru expresia $R(u, v)$, definit pe domeniul

$$0 \leqslant u \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant v \leqslant 9{,}96,$$

unde vîrfurile dreptunghiurilor vor avea coordonatele (v_{i-1}, u_{j-1});

(v_{i-1}, u_j); (v_i, u_{j-1}) şi (v_i, u_j), iar $v_i - v_{i-1} = 6.10^{-2}$;

$(i = 1 \cdots 166)$; $u_j - u_{j-1} = \frac{1}{4}$; $(j = 1 \cdots 4)$,

$$v_0 = 0 \text{ şi } u_0 = 0.$$

Calculul valorilor corespunzătoare expresiei la aceste moduri a fost făcut cu ajutorul calculatorului CIFA — 102 pe baza schemei logice date în figura 2.

În schema logică, prin indicele c am evidenţiat faptul că este vorba de valoarea curentă a parametrului, iar prin f s-a subînţeles faptul că

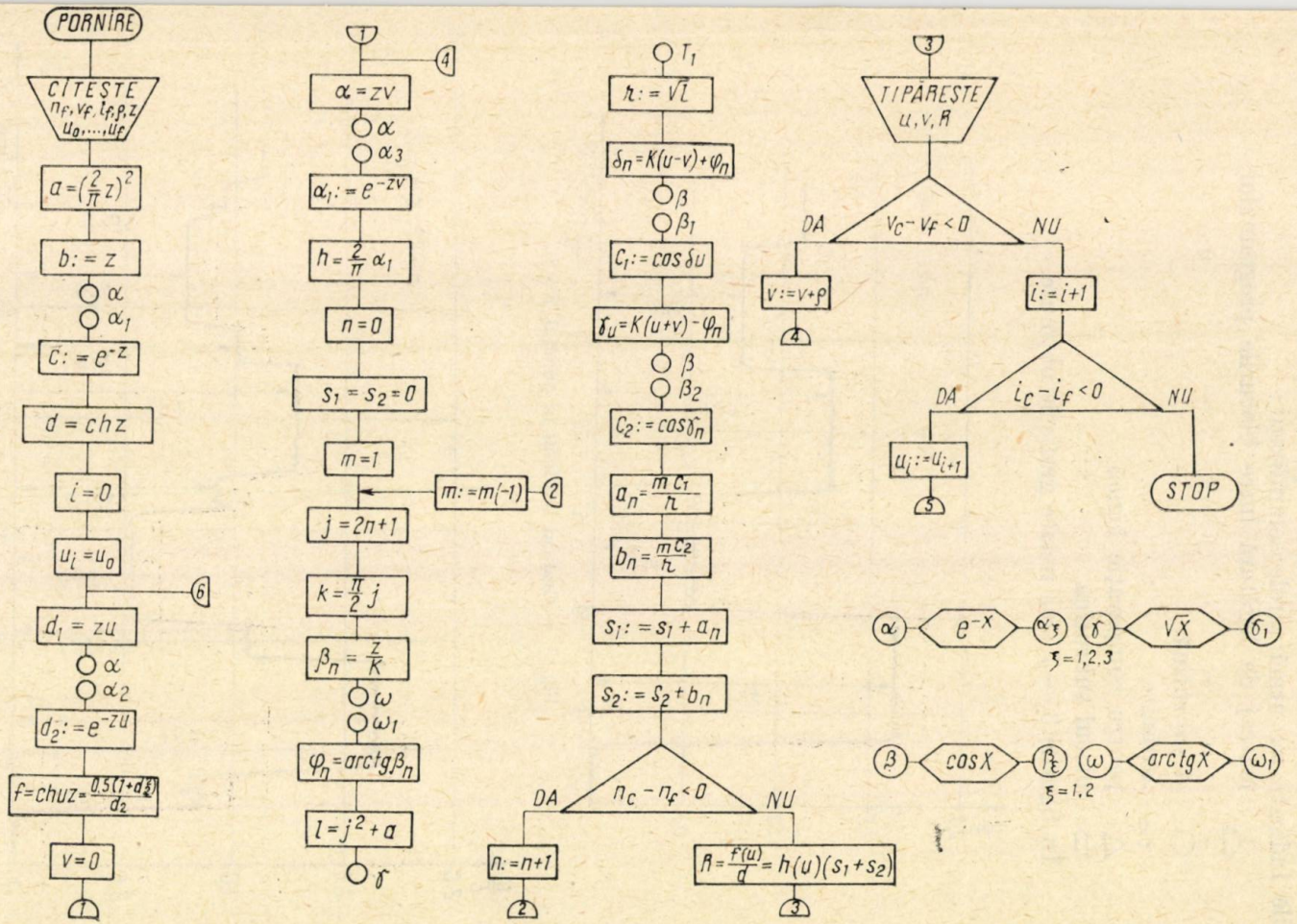


Fig. 2. — Schema logică.

este considerată valoarea finală a parametrului. De asemenea simbolurile indicate au următoarele semnificaţii:

⌓ marcaj de legătură între blocurile programului

⌓ " " " " " "

○ şi subrutină

:= atribuire

△ pentru comparaţie logică

⊃ blocul subrutină

În figurile 3 — 7 sînt redate graficele obţinute.

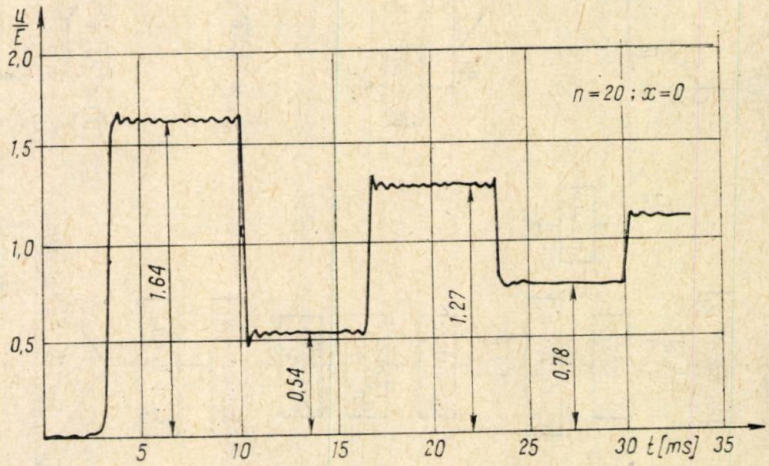


Fig. 3. — Graficul tensiunii în punctul $x = 0$.

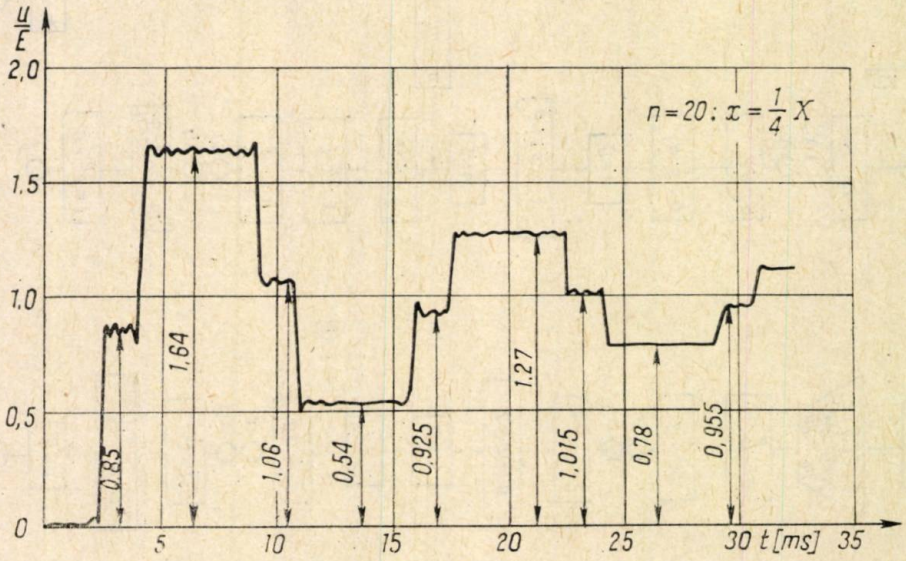


Fig. 4. — Graficul tensiunii în punctul $x = \frac{1}{4} X$.

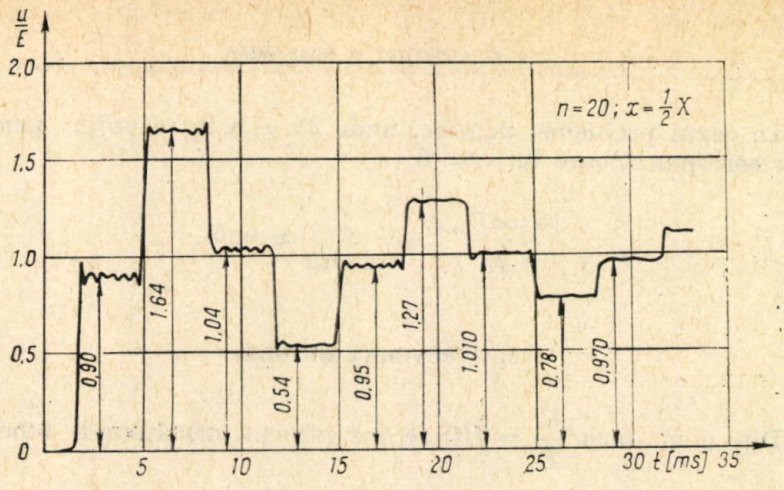


Fig. 5. — Graficul tensiunii în punctul $x = \frac{1}{2} X$.

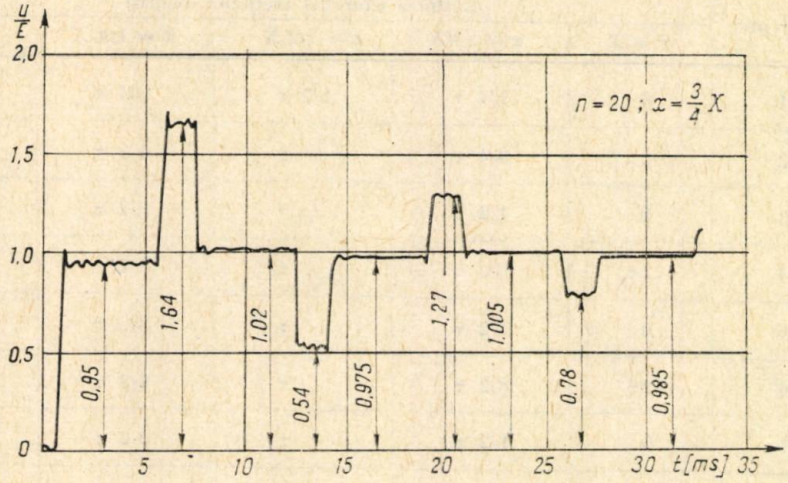


Fig. 6. — Graficul tensiunii în punctul $x = \frac{3}{4} X$.

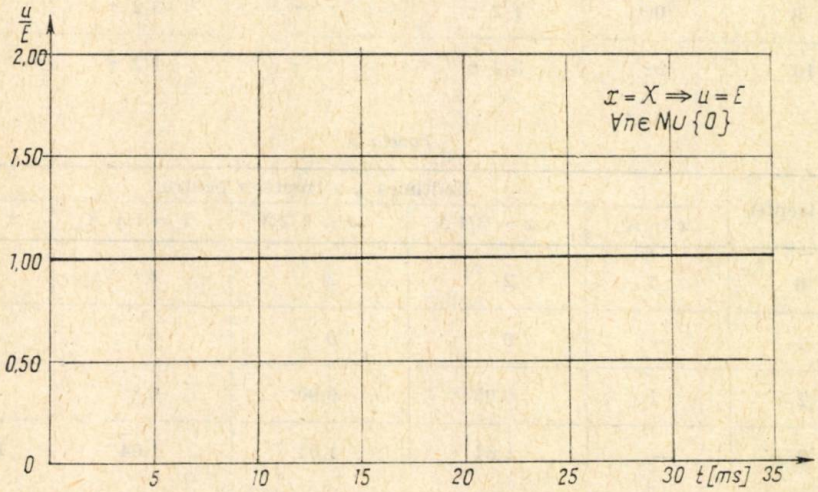


Fig. 7. — Graficul tensiunii în punctul $x = X$.

În cazul problemei noastre, unde $\delta\tau = 0,2$, se obţine pentru diagrama corespunzătoare lui $x = 0$

$$\frac{[u(\infty)]_{x=0}}{E} = \frac{1}{\text{ch } 0,2} \approx 0,98.$$

3. EXPUNEREA METODEI

Din diagramele $\frac{U}{E} = f(t)$ se pot întocmi următoarele tabele:

Tabela 1

Nr. treptei	Lăţimea (durata) treptelor pentru				
	$x = X$	$x = 3/4X$	$x = 1/2\,X$	$x = 1/4\,X$	$x = 0$
1	0	1/4 τ	1/2 τ	3/4 τ	τ
2	2τ	3/4 τ	τ	1/2 τ	0
3	0	1/2 τ	τ	3/2 τ	2τ
4	2τ	3/2 τ	τ	1/2 τ	0
5	0	1/2 τ	τ	3/2 τ	2τ
6	2τ	3/2 τ	τ	1/2 τ	0
7	0	1/2 τ	τ	3/2 τ	2τ
8	2τ	3/2 τ	τ	1/2 τ	0
9	0	1/2 τ	τ	3/2 τ	2τ
10	2τ	3/2 τ	τ	1/2 τ	0

Tabela 2

Nr. treptei	Înălţimea y a treptelor pentru				
	$x = X$	$x = 3/4\,X$	$x = 1/2\,X$	$x = 1/4\,X$	$x = 0$
0	1	2	3	4	5
1	—	0	0	0	0
2	1	0,95	0,90	0,85	—
3	—	1,64	1,64	1,64	1,64

Se poate observa cu ușurință (chiar și din expresia analitică) faptul că pentru punctul $x = X$ curba rezultată este o dreaptă paralelă cu axa timpului și ordonată egală cu 1 (fig. 7). Analizînd forma curbelor pentru $x \in \left\{0; \frac{1}{4}x; \frac{1}{2}x; \frac{3}{4}x; X\right\}$, se observă că în intervalul de timp $t \in [0;$ 33,2], exprimat în [ms], rezultă 10 trepte pentru $x = \frac{1}{4}x; \frac{1}{2}x$ și $\frac{3}{4}x$, 5 trepte pentru $x = 0$ și 1 treaptă pentru $x = X$.

Așa cum se arăta mai departe, atît pentru $x = 0$, cît și pentru $x = X$ există tot 10 trepte, numai că pentru $x = 0$ treptele de ordin par au lățimea zero, iar pentru $x = X$ treptele de ordin impar au lățimea zero. De asemenea se mai observă că trecerea de la o treaptă la alta devine mai abruptă cînd n crește, devenind complet bruscă atunci cînd $n \to \infty$. Deci se poate trage concluzia că, pentru orice punct $x \in [0, X]$ pentru care se construiesc graficele, există anumite valori ale abscisei t pentru care $\lim \frac{U}{E}(t-0)$ și $\lim \frac{U}{E}(t+0)$ există și sînt diferite.

Diferența $\frac{U}{E}(t+0) - \frac{U}{E}(t-0)$ reprezintă saltul funcției în punctul de abcisă t, salt care tinde spre zero cînd $t \to \infty$. Aceasta se poate constata și analitic pentru cazul $x = 0$. Într-adevăr, pornind de la relația (1), care pentru $x = 0$ devine

$$(\mathfrak{L}u)_{x=0} = \frac{E}{p}\,\frac{1}{\operatorname{ch}(p+\delta)\tau} = \frac{E}{p}\,\frac{2}{e^{(p+\delta)\tau} + e^{-(p+\delta)\tau}}.$$

Dezvoltînd membrul doi în serie, se poate scrie

$$(\mathfrak{L}u)_{x=0} = \frac{2E}{p}\left[e^{-(p+\delta)\tau} - e^{-3(p+\delta)\tau} + e^{-5(p+\delta)\tau} - \ldots\right].$$

Aplicînd teorema întîrzierii, se obține

$$[u(t)]_{x=0} = 2E\left[e^{-\delta\tau}\,\gamma(t-\tau)\,e^{-3\delta\tau}(t-3\tau) + e^{-5\delta\tau}\,\gamma(t-5\tau) - \ldots\right],$$

în care $\gamma(t)$ reprezintă funcția treptei-unitate, iar pentru $t \to \infty$ se obține

$$[u(\infty)]_{x=0} = 2E\left(e^{-\delta\tau} - e^{-3\delta\tau} + e^{-5\delta\tau} - \ldots\right].$$

sau

$$\frac{[u(\infty)]_{x=0}}{E} = \frac{1}{\operatorname{ch}\delta\tau}.$$

Tabela 3

0	1	2	3	4	5
4	1	1,02	1,04	1,06	—
5	—	0,54	0,54	0,54	0,54
6	1	0,975	0,95	0,925	—
7	—	1,27	1,27	1,27	1,27
8	1	1,005	1,010	1,015	—
9	—	0,78	0,78	0,78	0,78
10	1	0,985	0,970	0,955	—

În tabela 1 treptele au fost considerate ca delimitate de mijlocul distanței dintre abscisa maximă a unei trepte și abscisa minimă a treptei următoare. De asemenea se observă că durata unei trepte D depinde de distanța x. Această dependență poate fi reprezentată prin relațiile următoare:

$$D_1(x) = \tau \frac{X - x}{X},$$

$$D_{2n}(x) = 2\tau \frac{x}{X}, \tag{13}$$

$$D_{2n+1}(x) = 2\tau \frac{X - x}{X},$$

care pot fi reprezentate grafic prin niște drepte (fig. 8).

Examinînd tabela 3, se observă că treptele de același rang impar au aceeași ordonată pentru $\forall x [0, X]$. Am marcat prin intervalul deschis la dreapta, întrucît pentru $x = X$ nu avem treaptă de ordin impar. Treptele de rang par, după cum rezultă din aceeași tabelă 3, se împart în două grupe:

— trepte de rangul 2 $(2n + 1)$ cu ordonate subunitare;

— trepte de rangul 2 $(2n + 2)$ cu ordonate supraunitare.

Deoarece treptele de rang impar au ordonata constantă în raport cu x, cu ajutorul datelor din tabela 3 se poate pune în evidență ordonata acestor trepte pentru orice $x \in [0, X]$.

Pentru treptele de ordin par, ordonatele în orice punct $x \in (0, X]$ se obțin din graficul figurii 9.

Folosind cele arătate în figura 8 și figura 9, se poate determina graficul lui $\frac{U(t)}{E}$ în orice punct $x \in [0, X]$. Astfel se poate determina variația tensiunii în raport cu timpul în orice punct al unei linii lungi deschise la capăt și îndeplinind condiția Heaviside.

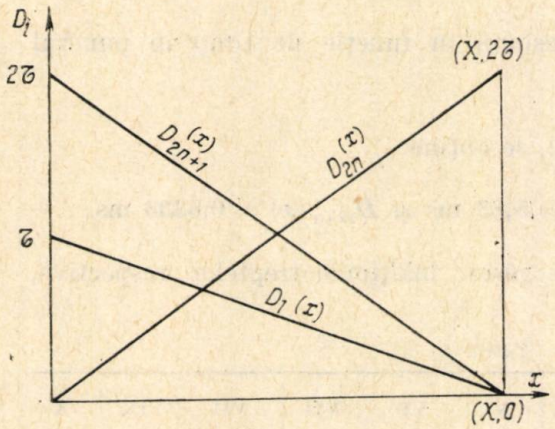


Fig. 8. — Reprezentarea grafică a relațiilor $D_i = f(x)$: a — funcția $D_1(x)$; b — funcția $D_{2n}(x)$; c — funcția $D_{2n+1}(x)$.

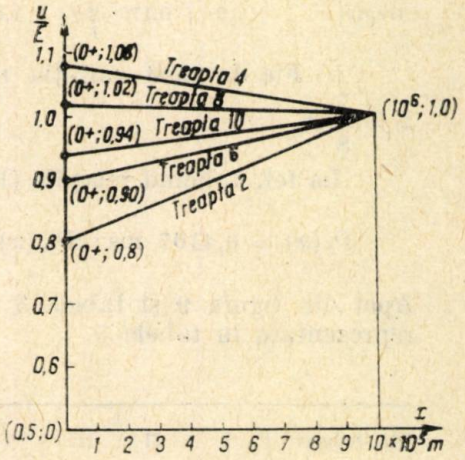


Fig. 9 — Grafic pentru obținera ordonatelor treptelor de ordin par.

Dacă în condiția Heaviside facem $r = g = 0$, deci $\delta = 0$ (cazul unei linii fără pierderi), se obțin cu următoarele particularități:

— treptele de rang $4n - 3$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ au ordonatele egale cu zero;

— treptele de rang $2n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ au ordonatele egale cu 1;

— treptele de rang $4n - 1$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ au ordonatele egale cu 2.

4. EXEMPLU DE APLICAȚIE A METODEI PROPUSE

a) Fie de găsit variația tensiunii în funcție de timp în punctul $x = \frac{3}{8} X$.

Aplicînd relațiile (13), se obține

$$D_1(x) = 2{,}075 \quad D_{2n}(x) = 2{,}5 \text{ ms}$$

și

$$D_{2n+1}(x) = 4{,}15 \text{ ms}.$$

Apoi din figura 9 şi din tabela 3 se găsesc înălţimile treptelor respective, rezultate în tabela 4.

Tabela 4

Nr. treptei	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Înălţimea treptei	0	0,175	1,64	1,05	0,54	0,9375	1,27	1,0125	0,78	0,9625

b) Fie de găsit variaţia tensiunii în funcţie de timp în punctul $x = \frac{7}{8} X$.

La fel, aplicînd relaţiile (13), se obţine

$$D_1(x) = 0{,}4167 \text{ ms}; \; D_{2n}(x) = 5{,}83 \text{ ms şi } D_{2n+1}(x) = 0{,}8333 \text{ ms}.$$

Apoi din figura 9 şi tabela 3 se găsesc înălţimile treptelor respective, reprezentate în tabela 5.

Tabela 5

Nr. treptei	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	IX	X
Înălţimea treptei	0	0,975	1,64	1,01	0,54	0,9875	1,27	1,0025	0,78	0,9925

Rezultatele obţinute prin calcul sînt confirmate de graficele din figurile 10 şi 11, arătînd utilitatea metodei propuse.

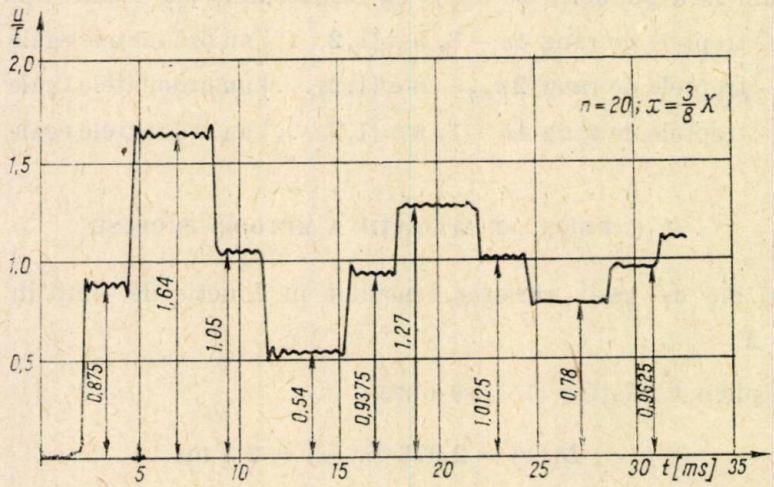


Fig. 10. — Graficul tensiunii în punctul $x = \frac{3}{8} X$.

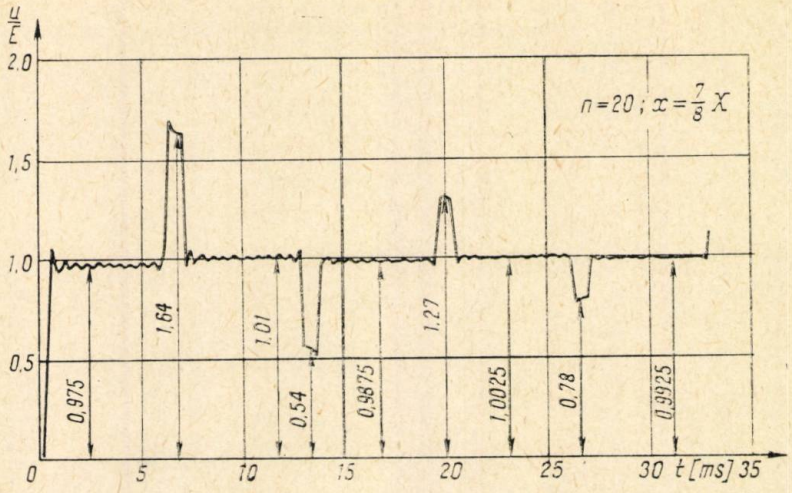


Fig. 11. — Graficul tensiunii în punctul $x = \frac{7}{8} X$.

BIBLIOGRAFIE

1. I.S. Antoniu, I. Adamut, *Contribution à la definition de la vitess de propagation d'un signal dans les chaines de quadripoles*, Rev. Roum. des sc. tehn., serie electrotechnique et energetique, **11**, *3*, 341—369 (1966).
2. I. S. Antoniu, *Chestiuni speciale de electrotehnică*, București, Edit. Academiei, 1956.
3. Dragoș Vaida, *Programarea calculatoarelor electronice*, București, Edit. Academiei, 1967.

PROPRIETĂȚILE TRANSFORMATORULUI DIFERENȚIAL NESIMETRIC ÎN CONDIȚII DE LUCRU ARBITRARE

DE

CRISTOFOR VASILIU

621.314.2 :621.396

Se stabilesc proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial nesimetric în cele mai generale condiții de lucru și se face o comparație între transformatorul diferențial simetric și cel nesimetric.

1. INTRODUCERE

Transformatorul diferențial este nelipsit din orice cale de comunicație pe fire, putînd îndeplini diverse roluri (cel mai frecvent fiind să realizeze trecerea de la comunicația pe două fire la aceea pe patru fire). În mod obișnuit, transformatorul diferențial este simetric, în care caz, și în condiții optime de lucru, semnalul care intră pe la o poartă se împarte în două părți egale ce ies prin cele două părți alăturate. În cazul transformatorului diferențial nesimetric, una dintre cele două porți este favorizată, în sensul că cea mai mare parte a semnalului iese prin această poartă. Această repartiție inegală a semnalului între cele două porți alăturate porții de intrare poate fi folositoare în anumite situații practice.

Proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial nesimetric sînt parțial cunoscute. Ele sînt stabilite în special pentru condițiile teoretice de lucru și, în parte, pentru un caz practic mai des întîlnit, așa cum se pot găsi, spre exemplu, în [1]—[3].

Lucrarea de față are două scopuri. Primul este acela de a stabili proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial nesimetric în condițiile cele mai generale de lucru pe o cale cît mai simplă și mai unitară. Rezultatele în oricare caz special se vor obține atunci prin simpla particularizare a acestor rezultate generale. Al doilea scop este să facă, pe baza rezultatelor obținute, o comparație între transformatorul diferențial simetric și cel nesimetric pentru a scoate în relief avantajele și neajunsurile.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 883—896, 1970

Pentru simplificarea expunerii sînt prezentate în continuare cîteva din relațiile binecunoscute de la studiul diportului. Vom folosi în lucrarea de față parametrii de scurt și gol (Z_{1sc}, Z_{1g}, Z_{2sc} și Z_{2g}) la cele două porți și impedanța de transfer de gol (Z_{12}). Între cei patru parametri de scurt și gol există relația

$$Z_{1sc}\, Z_{2g} = Z_{2sc}\, Z_{1g}, \tag{1}$$

iar impedanța de transfer de gol se poate obține din egalitatea

$$Z_{12}^2 = Z_{1g}\,(Z_{2g} - Z_{2sc}) = Z_{2g}\,(Z_{1g} - Z_{1sc}). \tag{2}$$

În funcție de acești parametri avem impedanțele imagine

$$W_1^2 = Z_{1sc}\, Z_{1g}\,;\quad W_2^2 = Z_{2sc}\, Z_{2g} \tag{3}$$

și exponentul pe imagini

$$g = \ln \frac{\sqrt{Z_{1g}} + \sqrt{Z_{1sc}}}{\sqrt{Z_{1g}} - Z_{1sc}}. \tag{4}$$

Impedanța de intrare la poarta (*1*) cînd poarta (*2*) este închisă pe impedanța Z_2 are expresia

$$Z_{1in} = \frac{Z_{1g}(Z_2 + Z_{2g}) - Z_{12}^2}{Z_2 + Z_{2g}}, \tag{5}$$

iar exponentul compus al diportului închis la cele două porți pe impedanțele Z_1 și Z_2 este dat de egalitatea

$$g_c = \ln \frac{(Z_1 + Z_{1g})\,(Z_2 + Z_{2g}) - Z_{12}^2}{2Z_{12} \sqrt{Z_1\, Z_2}}. \tag{6}$$

Apelînd la aceste relații, analiza care urmează va putea fi urmărită cu mai multă ușurință.

2. PROPRIETĂȚILE DE TRANSMISIE ÎN CONDIȚII DE LUCRU GENERALE

În figura 1 este reprezentat transformatorul diferențial nesimetric. Înfășurările au fost reprezentate în modul arătat pentru a pune în evi-

dență faptul că transformatorul este presupus ideal. Vom folosi notațiile

$$m_1 = \frac{n_1}{n_3}\ ;\ m_2 = \frac{n_2}{n_3}\ ;\ \lambda = \frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

Raportul de transformare λ poate fi considerat ca un factor de asimetrie. Cînd $\lambda = 1$, transformatorul diferențial devine simetric.

2.1. TRANSMISIA SEMNALULUI ÎNTRE POARTA (2) ȘI POARTA (3)

Vom începe analiza prin determinarea proprietăților diportului (2, 3), reprezentat în figura 2. Parametrii de scurt și gol ai acestui diport se obțin cu ușurință dacă ne reamintim că o impedanță conectată la una dintre porțile unui transformator ideal „se vede" la cealaltă poartă multiplicată (sau împărțită) prin pătratul raportului de transformare corespunzător. Astfel, un scurtcircuit la poarta (3) pune în scurtcircuit toate înfășurările, iar impedanțele Z_L și Z_E apar în paralel la poarta (2); așadar

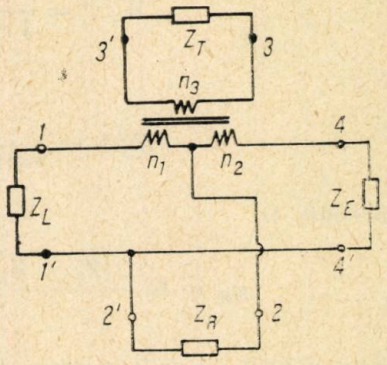


Fig. 1. — Transformatorul diferențial nesimetric.

$$Z_{2sc} = \frac{Z_L\, Z_E}{Z_L + Z_E}. \tag{8}$$

Tot așa, cînd poarta (2) este în gol, se obține

$$Z_{3g} = \left(\frac{n^3}{n_1 + n_2}\right)^2 (Z_L + Z_E) = \frac{Z_L + Z_E}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{9}$$

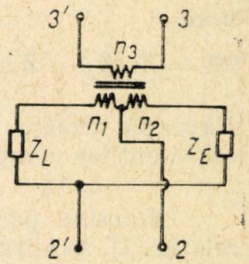


Fig. 2. — Diportul (2,3).

În cazul unui scurtcircuit la poarta (2), la poarta (3) apar impedanțele Z_L/m_1^2 și Z_E/m_2^2 în paralel, adică

$$Z_{3sc} = \frac{Z_L\, Z_E}{m_2\, Z_L + m_1\, Z_E} = \frac{Z_L\, Z_E}{m_2\,(Z_L + \lambda Z_E)}. \tag{10}$$

Din cele trei relații de mai sus se obține, folosind (1)

$$Z_{2g} = \frac{m_2^2\, Z_L + m_1^2\, Z_E}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{Z_L + \lambda^2 Z_E}{(1 + \lambda)^2} \tag{11}$$

și impedanța de transfer de gol Z_{23}, în conformitate cu (2),

$$Z_{23} = \frac{m_2 Z_L - m_1 Z_E}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{Z_L - \lambda Z_E}{m_2(m_1 + m_2)^2}. \tag{12}$$

Pentru parametrii-imagine, după (3) și (4), avem

$$W_2^{(2,3)} = \frac{1}{1+\lambda} \sqrt{\frac{Z_L Z_E (Z_L + \lambda^2 Z_E)}{Z_L + Z_E}} \tag{13}$$

și

$$W_3^{(2,3)} = \frac{1}{m_2^2(1+\lambda)} \sqrt{\frac{Z_L Z_E (Z_L + Z_E)}{Z_L + \lambda^2 Z_E}}, \tag{14}$$

precum și

$$g_{23} = \ln \frac{\sqrt{(Z_L + Z_E)(Z_L + \lambda^2 Z_E)} + (1+\lambda)\sqrt{Z_L Z_E}}{Z_L - \lambda Z_E}. \tag{15}$$

Exponentul compus pentru diportul închis la cele două porți, respectiv pe Z_R și Z_T, se calculează folosind relația (6) și este dat de egalitatea

$$g_{c23} = \ln \frac{M}{2(m_2 Z_L - m_1 Z_E)\sqrt{Z_R Z_T}}, \tag{16}$$

unde

$$M = Z_R(Z_L + Z_E) + Z_T(m_2^2 Z_L + m_1^2 Z_E) + (m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T + Z_L Z_E. \tag{17}$$

Expresia pentru M a fost scrisă separat, deoarece apar în expresiile exponenților compuși ai tuturor diporților stabiliți în continuare.

Folosind parametrii de impedanțe de gol determinați mai sus și relația (5), se obține pentru impedanța de intrare la poarta (3) cu poarta (2) închisă pe Z_R expresia

$$Z_{3in} = \frac{Z_L(Z_E + Z_R) + Z_E Z_R}{m^2[Z_L + \lambda^2 Z_E + (1+\lambda)^2 Z_R]}, \tag{18}$$

care va fi folosită pentru determinarea parametrilor diportului (1, 3).

2.2. Transmisia dintre porțile (1) și (4)

În figura 3 este reprezentat diportul (1, 4) și diportul în T echivalent. Echivalența acestor doi diporți se poate verifica imediat dacă ne referim la figura 4. În această figură, cei doi tripoli sînt echivalenți, deoa-

rece prezintă între cele trei borne aceleași impedanțe, și anume $Z_{ac} = m_1^2 Z_T$, $Z_{bc} = m_2^2 Z_T$ și $Z_{ab} = (m_1 + m_2)^2 Z_T$.

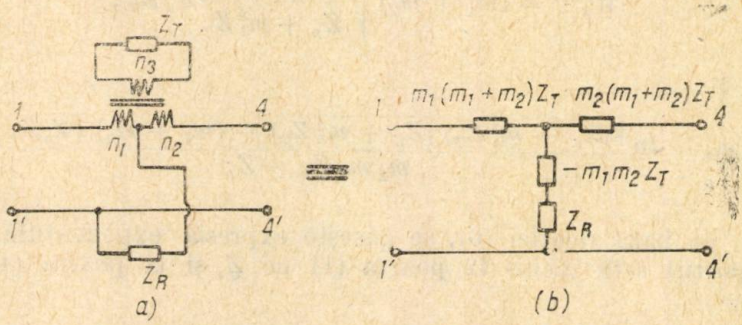


Fig. 3. — Diportul (1,4) și diportul în T echivalent.

Proprietățile diportului (1,4) se pot acum determina cu ușurință analizînd diportul din figura 3 *b*. Astfel, pentru parametrii de scurt și gol se găsesc imediat expresiile

$$Z_{1g} = Z_R + m_1^2 Z_T,$$
$$Z_{1sc} = \frac{(m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_R + m_2^2 Z_T} \tag{19}$$

și

$$Z_{4g} = Z_R + m_2^2 Z_T,$$
$$Z_{4sc} = \frac{(m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_R + m_1^2 Z_T}. \tag{20}$$

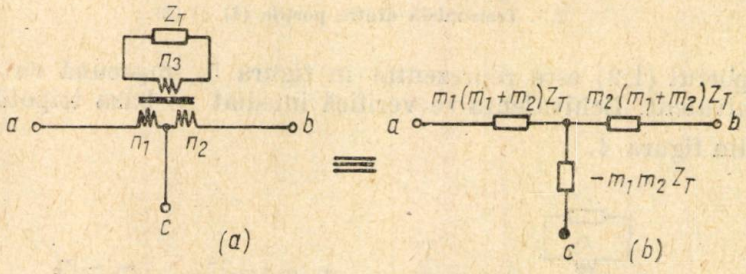


Fig. 4. — Tripoli echivalenți.

Din aceeași figură se vede că impedanța de transfer de gol este

$$Z_{14} = -m_1 m_2 Z_T. \tag{21}$$

Pentru parametrii imagine se obțin atunci expresiile

$$W_1^{(1,4)} = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{Z_R + m_1^2 Z_T}{Z_R + m_2^2 Z_T} Z_R Z_T} \tag{22}$$

şi

$$W_4^{(1,4)} = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{Z_R + m_2^2 Z_T}{Z_R + m_1^2 Z_T} Z_R Z_T}, \tag{23}$$

precum şi

$$g_{14} = \ln \frac{\sqrt{(Z_R + m_1^2 Z_T)(Z_R + m_2^2 Z_T)} + (m_1 + m_2)\sqrt{Z_R Z_T}}{m_1 m_2 Z_T - Z_R}. \tag{24}$$

Tot aşa, pe baza relaţiei (6), se găseşte expresia exponentului compus cînd diportul este închis la poarta (1) pe Z_L şi la poarta (4) pe Z_E, şi anume

$$g_{c14} = \ln \frac{M}{2(Z_R - m_1 m_2 Z_T)\sqrt{Z_L Z_E}}, \tag{25}$$

unde M este dat de (17).

În sfîrşit, impedanţa de intrare la poarta (1) cînd poarta (4) este închisă pe impedanţa Z_E are valoarea

$$Z_{1in} - \frac{Z_E(Z_R + m_1^2 Z_T) + (m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_E + Z_R + m_2^2 Z_T} \tag{26}$$

şi se poate calcula fie apelînd la relaţia (5), fie, mai simplu, direct prin diportul din figura 3*b* închis la poarta (4) pe Z_E.

2.3. Transmisia dintre porţile (1) şi (2)

Diportul (1,2) este reprezentat în figura 5, împreună cu diportul în T echivalent. Echivalenţa se verifică imediat pe baza tripolilor echivalenţi din figura 4.

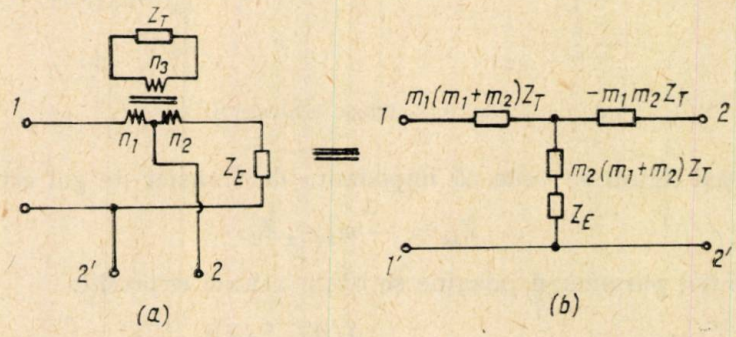


Fig. 5. — Diportul (1,2) şi diportul în T echivalent.

Parametrii de scurt și gol ai diportului (1,2) se determină direct din figura 5*b* și au expresiile

$$\begin{aligned} Z_{1g} &= Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T, \\ Z_{1sc} &= \frac{m_1^2 Z_E Z_T}{Z_E + m_2^2 Z_T} \end{aligned} \tag{27}$$

și

$$\begin{aligned} Z_{2g} &= Z_E + m_2^2 Z_T, \\ Z_{2sc} &= \frac{m_1^2 Z_E Z_T}{Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T}, \end{aligned} \tag{28}$$

iar impedanța de transfer de gol este

$$Z_{12} = Z_E + (m_2^2 + m_1 m_2) Z_T. \tag{29}$$

Din aceşti parametri de scurt şi gol, apelînd la aceleaşi relaţii date în introducere, se deduc impedanţele-imagine

$$W_1^{(1,2)} = m_1 \sqrt{\frac{Z_E Z_T [Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T]}{Z_E + m_2^2 Z_T}} \tag{30}$$

şi

$$W_2^{(1,2)} = m_1 \sqrt{\frac{Z_E Z_T (Z_E + m_2^2 Z_T)}{Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T}}, \tag{31}$$

precum şi exponentul pe imagini

$$g_{12} = \ln \frac{\sqrt{(Z_E + m_2^2 Z_T)[Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T]} + m_1 \sqrt{Z_E Z_T}}{Z_E + m_2(m_1 + m_2) Z_T}. \tag{32}$$

Din aceiaşi parametri de scurt şi gol, folosind relaţia (6), se obţine exponentul compus al diportului închis la poarta (1) pe Z_L şi la poarta (2) pe Z_R, şi anume

$$g_{c12} = \ln \frac{M}{2[Z_E + (m_2^2 + m_1 m_2) Z_T] \sqrt{Z_L Z_R}}, \tag{33}$$

cu aceeaşi expresie pentru M din (17).

2.4. Transmisia dintre porţile (1) şi (3)

În figura 6 este reprezentat diportul (1,3). Parametrii de scurt şi gol la poarta (1) se pot obţine foarte simplu făcînd impedanţa Z_T egală cu zero şi infinit în (26) şi au expresiile

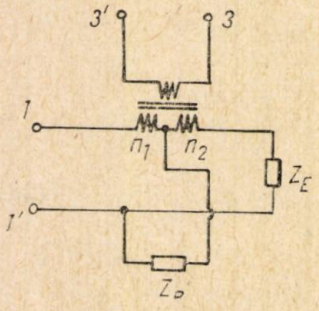


Fig. 6. — Diportul (1,3).

$$Z_{1g} = \lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R,$$
$$Z_{1sc} = \frac{Z_E Z_R}{Z_E + Z_R}. \tag{34}$$

Tot aşa, făcînd impedanţa Z_L egală cu zero şi infinit în (18), se găsesc impedanţele de scurt şi gol la poarta (3), şi anume

$$Z_{3g} = \frac{Z_E + Z_R}{m_2^2}$$

şi

$$Z_{3sc} = \frac{Z_R Z_E}{m_2^2[\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]}. \tag{35}$$

Cu ajutorul relaţiei (2) se calculează impedanţa de transfer de gol:

$$Z_{13} = \frac{1}{m_2}[\lambda Z_E + (1 + \lambda) Z_R]. \tag{36}$$

Ca şi în cazul celorlalţi diporţi, se deduc impedanţele-imagine:

$$W_1^{(1,3)} = \sqrt{\frac{Z_R Z_E [\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]}{Z_E + Z_R}} \tag{37}$$

şi

$$W_3^{(1,3)} = \frac{1}{m_2^2}\sqrt{\frac{Z_R Z_E (Z_R + Z_E)}{\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R}}, \tag{38}$$

exponentul pe imagini:

$$g_{13} = \ln \frac{\sqrt{(Z_E + Z_R)[\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]} + \sqrt{Z_R Z_E}}{\lambda Z_E + (1 + \lambda) Z_R} \tag{39}$$

şi exponentul compus cînd diportul este închis pe impedanţele Z_L şi Z_T:

$$g_{c13} = \ln \frac{M}{2[m_1 Z_E + (m_1 + m_2) Z_R]\sqrt{Z_L Z_T}}, \tag{40}$$

unde M este dat tot de expresia (17).

Cele de mai sus încheie stabilirea proprietăților de transmisie ale transformatorului diferențial în orice condiții de lucru. Proprietățile diportului (4,2) și (4,3) se obțin din cele ale diportului (1,2), respectiv (1,3), înlocuind Z_L, m_1, m_2, λ, cu Z_E, m_2, m_1, $1/\lambda$ și invers.

3. CONDIȚII OPTIME DE LUCRU

Rolul transformatorului diferențial este să împiedice trecerea semnalului între porțile (2) și (3). Acest lucru are loc dacă $Z_L = \lambda Z_E$, cînd atenuarea pe imagini în (15) și cea compusă în (16) devin infinite. În această situație, impedanțele-imagine (13) și (14) devin

$$W_2^{(2,3)} \frac{Z_L}{1+\lambda} \tag{41}$$

și

$$W_3^{(2,3)} = \frac{Z_L}{m_1 m_2(1+\lambda)}. \tag{42}$$

Diportul (2,3) lucrează adaptat dacă Z_R și respectiv Z_T sînt egale cu aceste impedanțe-imagine. Cele trei condiții se pot scrie sub forma

$$Z_E = \frac{Z_L}{\lambda};\quad Z_R = \frac{Z_L}{1+\lambda};\quad Z_T = \frac{Z_L}{m_1 m_2(1+\lambda)}. \tag{43}$$

În aceste egalități, impedanța caracteristică Z_L a liniei este o mărime dată care nu poate fi modificată.

Cînd condițiile (43) sînt satisfăcute, din relațiile stabilite mai sus se constată cu ușurință cele ce urmează. Mai întîi, atenuarea (pe imagini și compusă) între porțile (1) și (4) și între porțile (2) și (3) este infinită. În al doilea rînd, impedanțele caracteristice la cele patru porți (indiferent de diportul cărora aparțin) sînt egale cu impedanțele care închid acele porți ($W_1 = Z_L$, $W_2 = Z_R$, $W_3 = Z_T$ și $W_4 = Z_E$), adică transformatorul diferențial este simultan adaptat la cele patru porți. În al treilea rînd, atenuarea (pe imagini egală cu cea compusă) între porțile (1) și (2) este

$$g_{12} = a_{12} = \frac{1}{2}\ln(1+\lambda), \tag{44}$$

iar între porțile (1) și (3) are valoarea

$$a_{13} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\lambda}{\lambda}. \tag{45}$$

Linia conectată la poarta (1) este adaptată și reflexia semnalului venind din linie este nulă.

Aceste rezultate permit ca condițiile din (43) să fie numite condiții optime de lucru pentru transformatorul diferențial.

4. CONDIȚII PRACTICE DE LUCRU

În practică, condițiile optime (43) nu pot fi riguros îndeplinite, deoarece Z_L este o funcție transcendentă (impedanța caracteristică a unui diport cu constante uniform distribuite), iar celelalte trei impedanțe sînt fracții raționale (impedanța unor dipoli cu constante concentrate).

Într-un domeniu finit de frecvențe (banda utilă de frecvențe), impedanța Z_E a echilibrorului poate însă aproxima oricît de bine impedanța iZ_L/λ astfel încît atenuarea dintre porțile (2) și (3), deși nu va fi infinită, va putea fi făcută suficient de mare.

În majoritatea cazurilor practice, impedanțele Z_R și Z_T sînt simple rezistențe. De aceea aceste impedanțe, deși nu pot satisface exact condițiile optime, pot însă fi aduse în raportul care rezultă din (42), și anume

$$m_1 m_2(1 + \lambda) Z_T = (1 + \lambda) Z_R = Z, \tag{46}$$

unde Z nu este decît notația comună pentru cei doi termeni anteriori ai egalității. Această egalitate poate fi îndeplinită prin alegerea potrivită a produsului $m_1 m_2$ pentru un raport $\lambda = m_1/m_2$ dat.

Să analizăm acum care sînt proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial în acest caz practic important în care condiția (46) este îndeplinită.

Pentru diportul (1,4), atenuarea (pe imagini și compusă) este infinită, adică nu există nici un transfer de semnal între poarta (1) și poarta (4), iar impedanțele-imagine capătă valorile

$$W_1^{(1,4)} = Z \tag{47}$$

și

$$W_4^{(1,4)} = \frac{Z}{\lambda}. \tag{48}$$

Expresiile parametrilor-imagine ai celorlalți trei diporți nu se modifică, deoarece aceste expresii nu depind de egalitatea (46).

Mai importante din punct de vedere practic sînt însă atenuările compuse ale celor trei diporți. Înlocuind egalitatea (46) în (16) și (17), se găsește pentru atenuarea compusă între poarta (2) și poarta (3) expresia

$$a_{c23} = \ln \frac{1 + \lambda}{2\sqrt{\lambda}} + \ln \left| \frac{(Z_L + Z)(\lambda Z_E + Z)}{Z(Z_L - \lambda Z_E)} \right|. \tag{49}$$

Tot așa pentru atenuările compuse ale diporților (1,2) și (1,3) se obțin expresiile

$$a_{c12} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{4} + \ln \left| \frac{Z_L + Z}{\sqrt{ZZ_L}} \right| \tag{50}$$

și

$$a_{c13} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{4\lambda} + \ln \left| \frac{Z_L + Z}{\sqrt{ZZ_L}} \right|. \tag{51}$$

O altă mărime utilă practic este aceea a impedanței de intrare la poarta (1). Expresia acestei impedanțe se obține prin înlocuirea egalității (46) în (26) și este dată de relația

$$Z_{1in} = Z. \tag{52}$$

Această impedanță de intrare este egală cu impedanța caracteristică din (47) și nu depinde de impedanța Z_E a echilibrorului, lucru explicabil prin faptul că transmisia semnalului între porțile (1) și (4) este nulă. Linia uniformă nu este adaptată și măsura neadaptării este dată de coeficientul de reflexie

$$\rho_L = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L}. \tag{53}$$

O altă situație ce se poate întîlni în practică este aceea în care, pe lîngă Z_R și Z_T, Z_E este o simplă rezistență. Aceste trei rezistențe pot fi luate în raportul rezultînd din (43), adică

$$\lambda Z_E = m_1 m_2 (1 + \lambda) Z_T = (1 + \lambda) Z_R = Z. \tag{54}$$

În aceste condiții, atenuarea compusă din (49) ia forma

$$a_{c23} = \ln \frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \ln \left| \frac{Z_L + \lambda Z_E}{Z_L - \lambda Z_E} \right|. \tag{55}$$

Această expresie poate fi folosită și ca formă aproximativă pentru relația (49) atunci cînd modulul impedanței Z_E satisface doar cu aproximație condiția (54).

5. COMPARAȚIE ÎNTRE TRANSFORMATORUL DIFERENȚIAL SIMETRIC ȘI CEL NESIMETRIC. CONCLUZII

Dacă în relațiile stabilite mai sus se consideră $\lambda = 1$, transformatorul diferențial devine simetric. În cele ce urmează vom face o comparație între transformatorul diferențial simetric și cel nesimetric din punctul de vedere atît al atenuărilor compuse între diversele porți, cît și al valo-

rilor inductanțelor necesare. Comparația o vom face pentru cazul practic cel mai frecvent în care este satisfăcută egalitatea (46).

Este normal să presupunem că, atunci cînd λ variază, Z în (46) și λZ_E rămîn neschimbate. Într-adevăr, mărimile care se presupun date în practică sînt Z_L și Z_T. Rezistența Z se alege astfel încît să se apropie cît mai mult de $|Z_L|$ în banda de frecvențe folosită. Pentru satisfacerea primei egalități în (46), se alege în mod convenabil produsul $m_1 m_2$, așa

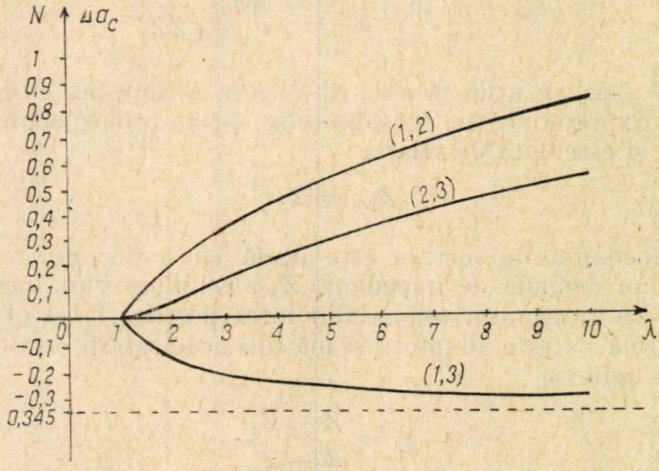


Fig. 7

cum s-a arătat mai sus. Rezistența Z_R va fi aceea care rezultă din a doua egalitate în (46). Cît privește impedanța Z_E, schimbarea raportului λ necesită doar multiplicarea impedanței echilibrorului cu o constantă, ceea ce nu schimbă complexitatea rețelei corespunzătoare.

Ținînd cont de observația de mai sus, se constată că al doilea termen în (49), (50) și (51) nu depinde de λ. Să notăm cu Δa_c diferența dintre expresiile acestor atenuări și cele corespunzătoare transformatorului diferențial simetric ($\lambda = 1$.) Vom avea atunci din (50) și (51) diferențele

$$\Delta a_{c12} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{2} \tag{56}$$

și

$$\Delta a_{c13} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \tag{57}$$

iar din (49) diferența

$$\Delta a_{c23} = \ln \frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{58}$$

Curbele care reprezintă variația cu λ a acestor diferențe au fost reprezentate în figura 7. Examinarea acestor curbe duce la constatările care urmează.

Cînd λ crește, atenuarea compusă între porțile (1) și (3) se micșorează, iar această micșorare nu poate depăși valoarea de 0,345 N (atinsă cînd λ tinde către infinit). Pentru $\lambda = 9$, această micșorare este de 0,3 N și o mărire suplimentară a raportului nu mai aduce practic nici o modificare a atenuării compuse.

Atenuarea compusă între porțile (1) și (2) crește nelimitat cu creșterea lui λ, dar creșterea este relativ înceată. Pentru $\lambda = 9$, această creștere este de 0,8 N.

Și atenuarea compusă între porțile (2) și (3) crește cu λ, însă și mai încet decît în cazul precedent. Pentru $\lambda = 9$, această creștere are valoarea de 0,45 N.

Constatările de mai sus pot indica situații în care transformatorul diferențial nesimetric este preferat celui simetric. O asemenea situație este aceea în care un cîștig de 0,3 N între porțile (1) și (3) ar fi binevenit, fără însă ca o creștere corespunzătoare de 0,8 N a atenuării între porțile (1) și (2) să fie supărătoare.

O altă constatare interesantă este aceea că asimetria tinde să echilibreze transformatorul diferențial. Acest lucru îl arată creșterea cu λ a atenuării compuse între porțile (2) și (3) pentru o valoare dată a diferenței $Z_L - \lambda Z_E$. Această creștere este însă relativ înceată.

Să vedem acum modul în care mărimile celor trei inductanțe depind de λ. După cum se știe, la un transformator de adaptare, pentru un factor de distorsiuni de atenuare dat, inductanța unei înfășurări este proporțională cu rezistența conectată la bornele acelei înfășurări. Deoarece impedanța Z_T (presupusă o rezistență) este dată, înseamnă că inductanța L_3 (și deci și numărul de spire n_3) trebuie să fie independentă de λ dacă dorim ca transformatorul să fie de aceeași calitate pentru orice λ. Cum și impedanța Z_L a liniei este dată, ultima dintre egalitățile din (43) arată că termenul $m_1 m_2 (1 + \lambda)$ trebuie să fie independent de λ. Reamintind că inductanța variază proporțional cu pătratul numărului de spire și folosind notațiile din (7), rezultă că inductanțele L_1 și L_2 depind de λ după relațiile

$$L_1 = k \frac{\lambda}{1 + \lambda} \tag{59}$$

$$L_2 = k \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)}, \tag{60}$$

unde k este o constantă. Aceste relații arată că L_1 variază de la o valoare dată pînă la dublul ei cînd λ variază de la unitate (transformator simetric) pînă la infinit. Variația raportului λ se face în principal pe seama inductanței L_2, care scade cînd λ crește.

6. CONCLUZII

În lucrarea de față au fost stabilite, în primul rînd, proprietățile transformatorului diferențial nesimetric în condițiile cele mai generale de lucru, proprietăți referitoare la transmisia semnalului între toate cele

patru porți, luate două cîte două, completîndu-se astfel rezultatele cunoscute din literatura de specialitate. Stabilirea acestor proprietăți s-a căutat a fi făcută pe o cale cît mai unitară și mai simplă. Aceste rezultate generale au fost apoi particularizate la condițiile optime de lucru și la condițiile practice cele mai frecvent întîlnite.

În al doilea rînd, a fost făcută o comparație între proprietățile transformatorului diferențial simetric și cel nesimetric. Această comparație a fost făcută pentru condițiile practice de lucru. Constatările care au rezultat arată că transformatorul diferențial nesimetric poate prezenta oarecare avantaje față de cel simetric în anumite situații particulare de utilizare.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Wallot, *Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik*, ed. 5, Berlin, Springer-Verlag, 1948.
2. Otto Henkler, *Anpassungs — und Differenzialübertrager der* Nachrichtentechnik, vol. 13, Berlin, Technik-Verlag, 1951.
3. P. Postelnicu, *Expresia matricei de repartiție a unui cvadripol în punte simetric sau potențial simetric în funcție de parametrii de repartiție ai impedanțelor componente*, Telecomunicații, **13**, *11*, 489—498 (1969).

METODE DE IDENTIFICARE A PROCESELOR ÎN SISTEME NELINIARE

DE

MIRCEA PETCU

517.9 : 621.316.7

Se face o scurtă analiză a procedeelor de studiu a sistemelor neliniare. În scopul identificării, autorul arată că aceste metode pot fi folosite cu succes. Este evidențiat prin exemple că identificarea anumitor parametri pentru sistemele cu ciclu-limită și intrare nulă este posibilă în aproximarea funcțiilor de descriere și de cunoaștere a modelului părții liniare.

1. SISTEME NELINIARE

Performanțele sistemelor neliniare se pot stabili prin diferite metode Acestea se caracterizează printr-o anumită specializare, fiecare metodă fiind practică numai pentru anumite tipuri de probleme. Fiecare metodă are avantajul și dezavantajul ei.

Încercarea pe prototipuri are avantajul că se evită căutarea unui model matematic pentru reprezentarea sistemului. Dezavantajul constă în timpul îndelungat pentru construcție și în costul ridicat.

Simularea pe calculatoare este un procedeu foarte util, care reduce din dezavantajele încercării pe prototipuri. Ca fază finală a proiectării, înainte de construirea reală a unui sistem automat, simularea este deosebit de utilă. Încercarea de a simplifica celelalte faze ale studiului analitic prin teste asupra unui sistem neliniar simulat nu este satisfăcătoare, datorită faptului că este costisitor să se încerce multe combinații de condiții inițiale și tipuri de semnale de intrare. Dacă performanța nu e bună, o altă serie de încercări de corectare a sistemului complică procedeul.

Analiza sistemelor neliniare pornind de la soluția ecuațiilor diferențiale se poate face numai în cîteva cazuri speciale pentru sisteme de ordinul doi.

Pentru sistemele de ordinul unu și doi, proprietățile dinamice pot fi studiate prin rezolvarea grafică a ecuațiilor diferențiale în planul fazelor. Problema găsirii traiectoriilor de fază se complică atunci cînd există și o funcție de intrare, însă aproximările ce se obțin sînt destul de bune.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 4, p. 897—917, 1970

Fără a se determina evoluția sistemului, metoda directă a lui Leapunov permite evaluarea stabilității cunoscînd condițiile inițiale și intrarea sistemului. Alegerea funcției Leapunov corespunzătoare este însă o problemă.

Pentru găsirea soluției ecuațiilor diferențiale neliniare s-au creat o mulțime de procedee de expansiune a soluției în diverse forme. Problema principală este convergența.

Liniarizarea operațiilor neliniare constituie o aproximare satisfăcătoare pentru foarte multe sisteme. De obicei procedeul se justifică pentru abateri mici ale variabilei în jurul unui punct de funcționare. Pentru neliniaritățile cu puncte de discontinuitate, procedeul nu e aplicabil.

Cvasiliniarizarea e un procedeu prin care un operator neliniar e înlocuit cu unul liniar care depinde de unele proprietăți ale semnalului de intrare.

Cvasiliniarizarea este procedeul cel mai util în studiul sistemelor neliniare, în ciuda faptului că modelul cvasiliniar e folosit pentru găsirea semnalelor din sistem, iar cvasiliniarizarea depinde de proprietățile acestor semnale.

Soluția practică pentru înlăturarea viciului de mai sus este aceea de a presupune cunoscută forma semnalului de intrare în neliniaritate. Aproximarea cvasiliniară pentru operatorii neliniari se face admițînd formele de bază ale semnalelor de intrare : componenta continuă, sinusoida, procese întîmplătoare cu distribuție gausiană. Din procedeele cvasiliniare, „funcțiile de descriere" sînt cele mai expeditive și mai des folosite [1], deoarece ipoteza filtrării este îndeplinită în foarte multe sisteme reale.

Posibilitățile de identificare pentru sisteme neliniare sînt legate de posibilitățile de analiză, interpretarea și prelucrarea datelor fiind făcute după schemele de calcul proprii analizei. Cum procedeele de analiză nu sînt exacte, ci numai aproximative, se poate prevedea că și identificarea va fi afectată de aceleași erori sistematice.

2. DINAMICA CICLURILOR-LIMITĂ ȘI SISTEMELE ADAPTIVE

Multe sisteme neliniare cînt concepute să funcționeze cu ciclu-limită, deoarece astfel se mărește sensibilitatea componentelor, deci și performanțele generale ale sistemului. Schimbarea caracteristicilor procesului determină și schimbarea amplitudinii sau frecvenței oscilațiilor ciclului-limită. Problema este aceea de a regla amplitudinea oscilațiilor permanente pentru a nu deveni supărător de mare (chiar periculoasă pentru sistem) sau prea mică, ceea ce ar duce la dispariția avantajului de a avea oscilația permanentă a ciclului-limită.

Reglarea amplitudinii oscilațiilor ciclului-limită se poate face cu o schemă adaptivă de tipul celei din figura 1. Ca indice de performanță se consideră amplitudinea ciclului-limită care se compară cu valoare de referință impusă. Funcție de abatere $(A_{ref} - A)$, se ajustează un para-

metru al sistemului care modifică amplitudinea A. Dintre acțiunile descrise în schema-bloc, cea mai complicată este dinamica schimbării ciclului-limită ca răspuns la modificarea parametrului P.

Existența ciclului-limită se determină considerînd neliniaritatea reprezentată prin funcția ei de descriere.

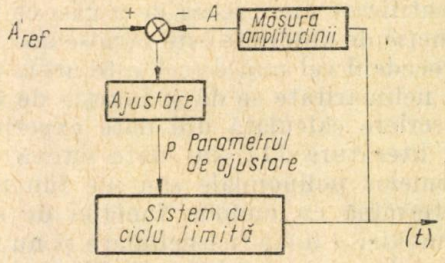


Fig. 1. — Regulator adaptiv pentru amplitudinea oscilațiilor de tip ciclu-limită ale unui sistem automat.

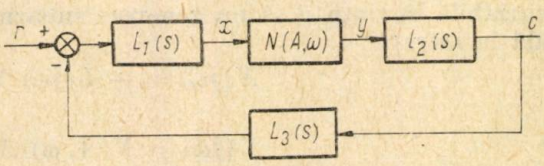


Fig. 2. — Schema-bloc a unui sistem automat neliniar.

Fie schema-bloc din figura 2, în care x și y sînt mărimile de intrare și ieșire ale neliniarității N. Părțile liniare ale sistemului sînt reprezentate prin blocurile $L_1(s)$, $L_2(s)$, $L_3(s)$. Dacă sistemul oscilează, iar $r = 0$, atunci x și y sînt funcții periodice în timp. Dacă sînt îndeplinite condițiile [2]

$$|L_1L_2L_3(jk\omega)| \leqslant |L_1(j\omega)\cdot L_2\cdot L_3(j\omega)| \quad \text{pentru } k = 2,3 \ \ldots$$
$$\text{și } L_1L_2L_3(jk\omega) \to 0 \text{ cînd } k \to \infty, \tag{1}$$

atunci x poate fi aproximat foarte bine cu o sinusoidă:

$$x = A \sin \omega t \tag{2}$$

care aplicată elementului neliniar, va determina că mărimea y să nu fie sinusoidală. Ea însă poate fi descompusă în armonici, dintre care numai prima prezintă interes în condițiile (1).

Neliniaritatea N din figura 2 este descrisă matematic prin funcția de descriere sinusoidală, definită ca

$$N(A,\omega) = \frac{\text{reprezentarea vectorială a componentei } \omega \text{ a mărimii } y}{\text{reprezentarea vectorială a intrării de frecvență } \omega}. \tag{3}$$

Din definiția (3) pentru neliniarități de forma $y = y(x, \dot{x})$ se poate deduce relația de calcul

$$N(A,\omega) = \frac{j}{\pi A}\int_0^{2\pi} y(A \sin \psi, A\omega \cos \psi)\, e^{-j\psi}\, d\psi, \tag{4}$$

unde s-a considerat prima armonică a mărimii de ieşire. Relaţia de mai sus (4) se poate găsi gata calculată, aplicată şi tabelată pentru diferite tipuri de neliniarităţi [1]. Se dau neliniarităţile şi se indică funcţia de descriere.

Pentru dispozitivele la care s-a determinat experimental răspunsul armonic, se poate calcula imediat funcţia de descriere. O problemă de identificare ar fi aceea de a găsi ce fel de neliniaritate este aceea a cărei funcţie de descriere este cunoscută. Evident că inversiunea nu este unică. Procedeul cel mai direct este acela de a inspecta tabelele în care alături de neliniaritate se dă şi funcţia de descriere şi a urmări dacă funcţia de descriere calculată din date experimentale coincide cu una din tabelă. În literatură [1] sînt date cîteva procedee analitice de inversiune ale formelor polinomiale sau ale funcţiilor liniare pe porţiuni. Ceea ce se determină cu metoda funcţiei de descriere este o aproximare a primei armonici a oscilaţiei neliniare şi nu forma reală a oscilaţiei.

În afara condiţiei de filtrare a armonicilor superioare în asemenea grad ca reacţia lor să fie neglijabilă, este necesar ca neliniaritatea să fie invariabilă în timp şi să nu genereze subarmonici cînd i se aplică o sinusoidă la intrare :

$$X(j\omega) = -L(j\omega)\cdot Y(j\omega),$$
$$Y(j\omega) = N(A,\omega)\cdot X(j\omega). \tag{5}$$

Frecvenţa şi amplitudinea ciclului-limită rezultă ($r = 0$) din rezolvarea sistemului de mai sus, care determină relaţia

$$1 + N(A,\omega)\cdot L(j\omega) = 0, \tag{6}$$

unde

$$L(j\omega) = L_1(j\omega)\cdot L_2(j\omega)\cdot L_3(j\omega).$$

Relaţia (6) poate fi analizată algebric prin scrierea ecuaţiei reale şi imaginare, care se rezolvă simultan :

$$N_r(A_0\omega_0)\,\mathrm{Re}\,[L(j\omega_0)] \pm N_i(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Im}\,[L(j\omega_0)] = -1,$$
$$N_r(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Im}\,[L(j\omega_0)] + N_i(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Re}\,[L(j\omega_0)] = 0. \tag{7}$$

Foarte adesea relaţia (6) se rezolvă în raport cu A şi ω grafic : se reprezintă pe acelaşi desen $L(j\omega)$ şi $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$.

La intersecţia celor două curbe

$$L(j\omega) = -\frac{1}{N(A,\omega)}$$

şi pe diagramă se găsesc A_0 şi ω_0.

Parametrii de scurt și gol ai diportului (1,2) se determină direct din figura 5*b* și au expresiile

$$\begin{aligned} Z_{1g} &= Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T, \\ Z_{1sc} &= \frac{m_1^2 Z_E Z_T}{Z_E + m_2^2 Z_T} \end{aligned} \tag{27}$$

și

$$\begin{aligned} Z_{2g} &= Z_E + m_2^2 Z_T, \\ Z_{2sc} &= \frac{m_1^2 Z_E Z_T}{Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T}, \end{aligned} \tag{28}$$

iar impedanța de transfer de gol este

$$Z_{12} = Z_E + (m_2^2 + m_1 m_2) Z_T. \tag{29}$$

Din acești parametri de scurt și gol, apelînd la aceleași relații date în introducere, se deduc impedanțele-imagine

$$W_1^{(1,2)} = m_1 \sqrt{\frac{Z_E Z_T [Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T]}{Z_E + m_2^2 Z_T}} \tag{30}$$

și

$$W_2^{(1,2)} = m_1 \sqrt{\frac{Z_E Z_T (Z_E + m_2^2 Z_T)}{Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T}}, \tag{31}$$

precum și exponentul pe imagini

$$g_{12} = \ln \frac{\sqrt{(Z_E + m_2^2 Z_T)[Z_E + (m_1 + m_2)^2 Z_T]} + m_1 \sqrt{Z_E Z_T}}{Z_E + m_2(m_1 + m_2) Z_T}. \tag{32}$$

Din aceiași parametri de scurt și gol, folosind relația (6), se obține exponentul compus al diportului închis la poarta (1) pe Z_L și la poarta (2) pe Z_R, și anume

$$g_{c12} = \ln \frac{M}{2[Z_E + (m_2^2 + m_1 m_2) Z_T] \sqrt{Z_L Z_R}}, \tag{33}$$

cu aceeași expresie pentru M din (17).

2.4. Transmisia dintre porțile (1) și (3)

În figura 6 este reprezentat diportul (1,3). Parametrii de scurt și gol la poarta (1) se pot obține foarte simplu făcînd impedanța Z_T egală cu zero și infinit în (26) și au expresiile

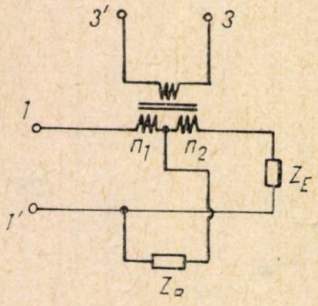


Fig. 6. — Diportul (1,3).

$$Z_{1g} = \lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R,$$
$$Z_{1sc} = \frac{Z_E Z_R}{Z_E + Z_R}. \tag{34}$$

Tot așa, făcînd impedanța Z_L egală cu zero și infinit în (18), se găsesc impedanțele de scurt și gol la poarta (3), și anume

$$Z_{3g} = \frac{Z_E + Z_R}{m_2^2}$$

și

$$Z_{3sc} = \frac{Z_R Z_E}{m_2^2[\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]}. \tag{35}$$

Cu ajutorul relației (2) se calculează impedanța de transfer de gol:

$$Z_{13} = \frac{1}{m_2}[\lambda Z_E + (1 + \lambda) Z_R]. \tag{36}$$

Ca și în cazul celorlalți diporți, se deduc impedanțele-imagine:

$$W_1^{(1,3)} = \sqrt{\frac{Z_R Z_E [\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]}{Z_E + Z_R}} \tag{37}$$

și

$$W_3^{(1,3)} = \frac{1}{m_2^2}\sqrt{\frac{Z_R Z_E (Z_R + Z_E)}{\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R}}, \tag{38}$$

exponentul pe imagini:

$$g_{13} = \ln \frac{\sqrt{(Z_E + Z_R)[\lambda^2 Z_E + (1 + \lambda)^2 Z_R]} + \sqrt{Z_R Z_E}}{\lambda Z_E + (1 + \lambda) Z_R} \tag{39}$$

și exponentul compus cînd diportul este închis pe impedanțele Z_L și Z_T:

$$g_{c13} = \ln \frac{M}{2[m_1 Z_E + (m_1 + m_2) Z_R]\sqrt{Z_L Z_T}}, \tag{40}$$

unde M este dat tot de expresia (17).

Cele de mai sus încheie stabilirea proprietăților de transmisie ale transformatorului diferențial în orice condiții de lucru. Proprietățile diportului (4,2) și (4,3) se obțin din cele ale diportului (1,2), respectiv (1,3), înlocuind Z_L, m_1, m_2, λ, cu Z_E, m_2, m_1, $1/\lambda$ și invers.

3. CONDIȚII OPTIME DE LUCRU

Rolul transformatorului diferențial este să împiedice trecerea semnalului între porțile (2) și (3). Acest lucru are loc dacă $Z_L = \lambda Z_E$, cînd atenuarea pe imagini în (15) și cea compusă în (16) devin infinite. În această situație, impedanțele-imagine (13) și (14) devin

$$W_2^{(2,3)} \frac{Z_L}{1+\lambda} \tag{41}$$

și

$$W_3^{(2,3)} = \frac{Z_L}{m_1 m_2(1+\lambda)}. \tag{42}$$

Diportul (2,3) lucrează adaptat dacă Z_R și respectiv Z_T sînt egale cu aceste impedanțe-imagine. Cele trei condiții se pot scrie sub forma

$$Z_E = \frac{Z_L}{\lambda};\quad Z_R = \frac{Z_L}{1+\lambda};\quad Z_T = \frac{Z_L}{m_1 m_2(1+\lambda)}. \tag{43}$$

În aceste egalități, impedanța caracteristică Z_L a liniei este o mărime dată care nu poate fi modificată.

Cînd condițiile (43) sînt satisfăcute, din relațiile stabilite mai sus se constată cu ușurință cele ce urmează. Mai întîi, atenuarea (pe imagini și compusă) între porțile (1) și (4) și între porțile (2) și (3) este infinită. În al doilea rînd, impedanțele caracteristice la cele patru porți (indiferent de diportul cărora aparțin) sînt egale cu impedanțele care închid acele porți ($W_1 = Z_L$, $W_2 = Z_R$, $W_3 = Z_T$ și $W_4 = Z_E$), adică transformatorul diferențial este simultan adaptat la cele patru porți. În al treilea rînd, atenuarea (pe imagini egală cu cea compusă) între porțile (1) și (2) este

$$g_{12} = a_{12} = \frac{1}{2}\ln(1+\lambda), \tag{44}$$

iar între porțile (1) și (3) are valoarea

$$a_{13} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\lambda}{\lambda}. \tag{45}$$

Linia conectată la poarta (1) este adaptată și reflexia semnalului venind din linie este nulă.

Aceste rezultate permit ca condițiile din (43) să fie numite condiții optime de lucru pentru transformatorul diferențial.

4. CONDIȚII PRACTICE DE LUCRU

În practică, condițiile optime (43) nu pot fi riguros îndeplinite, deoarece Z_L este o funcție transcendentă (impedanța caracteristică a unui diport cu constante uniform distribuite), iar celelalte trei impedanțe sînt fracții raționale (impedanța unor dipoli cu constante concentrate).

Într-un domeniu finit de frecvențe (banda utilă de frecvențe), impedanța Z_E a echilibrorului poate însă aproxima oricît de bine impedanța iZ_L/λ astfel încît atenuarea dintre porțile (2) și (3), deși nu va fi infinită, va putea fi făcută suficient de mare.

În majoritatea cazurilor practice, impedanțele Z_R și Z_T sînt simple rezistențe. De aceea aceste impedanțe, deși nu pot satisface exact condițiile optime, pot însă fi aduse în raportul care rezultă din (42), și anume

$$m_1 m_2(1 + \lambda) Z_T = (1 + \lambda) Z_R = Z, \tag{46}$$

unde Z nu este decît notația comună pentru cei doi termeni anteriori ai egalității. Această egalitate poate fi îndeplinită prin alegerea potrivită a produsului $m_1 m_2$ pentru un raport $\lambda = m_1/m_2$ dat.

Să analizăm acum care sînt proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial în acest caz practic important în care condiția (46) este îndeplinită.

Pentru diportul (1,4), atenuarea (pe imagini și compusă) este infinită, adică nu există nici un transfer de semnal între poarta (1) și poarta (4), iar impedanțele-imagine capătă valorile

$$W_1^{(1,4)} = Z \tag{47}$$

și

$$W_4^{(1,4)} = \frac{Z}{\lambda}. \tag{48}$$

Expresiile parametrilor-imagine ai celorlalți trei diporți nu se modifică, deoarece aceste expresii nu depind de egalitatea (46).

Mai importante din punct de vedere practic sînt însă atenuările compuse ale celor trei diporți. Înlocuind egalitatea (46) în (16) și (17), se găsește pentru atenuarea compusă între poarta (2) și poarta (3) expresia

$$a_{c23} = \ln \frac{1 + \lambda}{2\sqrt{\lambda}} + \ln \left| \frac{(Z_L + Z)(\lambda Z_E + Z)}{Z(Z_L - \lambda Z_E)} \right|. \tag{49}$$

dență faptul că transformatorul este presupus ideal. Vom folosi notațiile

$$m_1 = \frac{n_1}{n_3}\ ;\ m_2 = \frac{n_2}{n_3}\ ;\ \lambda = \frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

Raportul de transformare λ poate fi considerat ca un factor de asimetrie. Cînd $\lambda = 1$, transformatorul diferențial devine simetric.

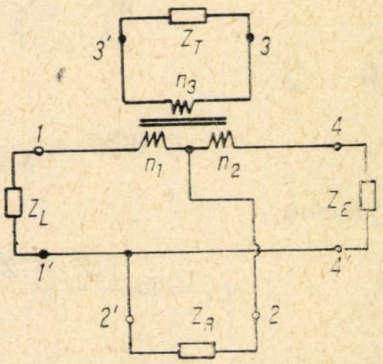


Fig. 1. — Transformatorul diferențial nesimetric.

2.1. TRANSMISIA SEMNALULUI ÎNTRE POARTA (2) ȘI POARTA (3)

Vom începe analiza prin determinarea proprietăților diportului (2, 3), reprezentat în figura 2. Parametrii de scurt și gol ai acestui diport se obțin cu ușurință dacă ne reamintim că o impedanță conectată la una dintre porțile unui transformator ideal „se vede" la cealaltă poartă multiplicată (sau împărțită) prin pătratul raportului de transformare corespunzător. Astfel, un scurtcircuit la poarta (3) pune în scurtcircuit toate înfășurările, iar impedanțele Z_L și Z_E apar în paralel la poarta (2); așadar

$$Z_{2sc} = \frac{Z_L\, Z_E}{Z_L + Z_E}. \tag{8}$$

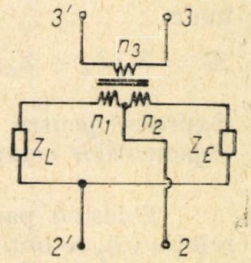


Fig. 2. — Diportul (2,3).

Tot așa, cînd poarta (2) este în gol, se obține

$$Z_{3g} = \left(\frac{n^3}{n_1 + n_2}\right)^2 (Z_L + Z_E) = \frac{Z_L + Z_E}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{9}$$

În cazul unui scurtcircuit la poarta (2), la poarta (3) apar impedanțele Z_L/m_1^2 și Z_E/m_2^2 în paralel, adică

$$Z_{3sc} = \frac{Z_L\, Z_E}{m_2\, Z_L + m_1\, Z_E} = \frac{Z_L\, Z_E}{m_2\, (Z_L + \lambda Z_E)}. \tag{10}$$

Din cele trei relații de mai sus se obține, folosind (1)

$$Z_{2g} = \frac{m_2^2\, Z_L + m_1^2\, Z_E}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{Z_L + \lambda^2 Z_E}{(1 + \lambda)^2} \tag{11}$$

şi impedanţa de transfer de gol Z_{23}, în conformitate cu (2),

$$Z_{23} = \frac{m_2 Z_L - m_1 Z_E}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{Z_L - \lambda Z_E}{m_2(m_1 + m_2)^2}. \tag{12}$$

Pentru parametrii-imagine, după (3) şi (4), avem

$$W_2^{(2,3)} = \frac{1}{1+\lambda} \sqrt{\frac{Z_L Z_E (Z_L + \lambda^2 Z_E)}{Z_L + Z_E}} \tag{13}$$

şi

$$W_3^{(2,3)} = \frac{1}{m_2^2(1+\lambda)} \sqrt{\frac{Z_L Z_E (Z_L + Z_E)}{Z_L + \lambda^2 Z_E}}, \tag{14}$$

precum şi

$$g_{23} = \ln \frac{\sqrt{(Z_L + Z_E)(Z_L + \lambda^2 Z_E)} + (1+\lambda)\sqrt{Z_L Z_E}}{Z_L - \lambda Z_E}. \tag{15}$$

Exponentul compus pentru diportul închis la cele două porţi, respectiv pe Z_R şi Z_T, se calculează folosind relaţia (6) şi este dat de egalitatea

$$g_{c23} = \ln \frac{M}{2(m_2 Z_L - m_1 Z_E)\sqrt{Z_R Z_T}}, \tag{16}$$

unde

$$M = Z_R(Z_L + Z_E) + Z_T(m_2^2 Z_L + m_1^2 Z_E) + (m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T + Z_L Z_E. \tag{17}$$

Expresia pentru M a fost scrisă separat, deoarece apar în expresiile exponenţilor compuşi ai tuturor diporţilor stabiliţi în continuare.

Folosind parametrii de impedanţe de gol determinaţi mai sus şi relaţia (5), se obţine pentru impedanţa de intrare la poarta (3) cu poarta (2) închisă pe Z_R expresia

$$Z_{3in} = \frac{Z_L(Z_E + Z_R) + Z_E Z_R}{m^2[Z_L + \lambda^2 Z_E + (1+\lambda)^2 Z_R]}, \tag{18}$$

care va fi folosită pentru determinarea parametrilor diportului (1, 3).

2.2. Transmisia dintre porţile (1) şi (4)

În figura 3 este reprezentat diportul (1, 4) şi diportul în T echivalent. Echivalenţa acestor doi diporţi se poate verifica imediat dacă ne referim la figura 4. În această figură, cei doi tripoli sînt echivalenţi, deoa-

rece prezintă între cele trei borne aceleași impedanțe, și anume $Z_{ac} = m_1^2 Z_T$, $Z_{bc} = m_2^2 Z_T$ și $Z_{ab} = (m_1 + m_2)^2 Z_T$.

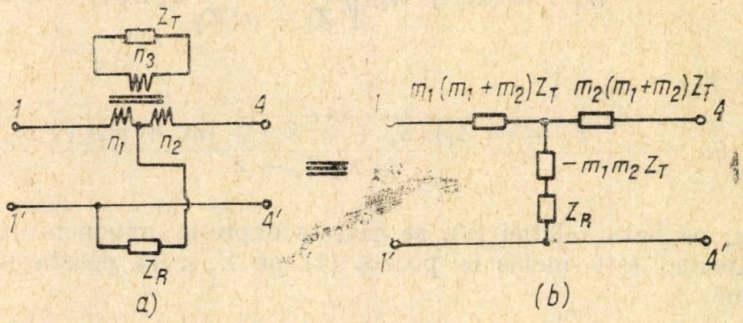


Fig. 3. — Diportul (1,4) și diportul în T echivalent.

Proprietățile diportului (1,4) se pot acum determina cu ușurință analizînd diportul din figura 3 *b*. Astfel, pentru parametrii de scurt și gol se găsesc imediat expresiile

$$Z_{1g} = Z_R + m_1^2 Z_T,$$
$$Z_{1sc} = \frac{(m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_R + m_2^2 Z_T} \tag{19}$$

și

$$Z_{4g} = Z_R + m_2^2 Z_T,$$
$$Z_{4sc} = \frac{(m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_R + m_1^2 Z_T}. \tag{20}$$

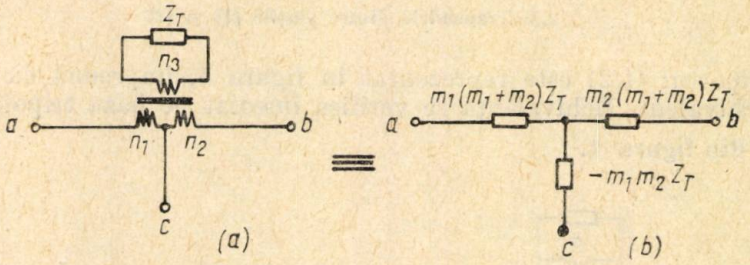


Fig. 4. — Tripoli echivalenți.

Din aceeași figură se vede că impedanța de transfer de gol este

$$Z_{14} = -m_1 m_2 Z_T. \tag{21}$$

Pentru parametrii imagine se obțin atunci expresiile

$$W_1^{(1,4)} = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{Z_R + m_1^2 Z_T}{Z_R + m_2^2 Z_T} Z_R Z_T} \tag{22}$$

şi

$$W_4^{(1,4)} = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{Z_R + m_2^2 Z_T}{Z_R + m_1^2 Z_T} Z_R Z_T}, \tag{23}$$

precum şi

$$g_{14} = \ln \frac{\sqrt{(Z_R + m_1^2 Z_T)(Z_R + m_2^2 Z_T)} + (m_1 + m_2)\sqrt{Z_R Z_T}}{m_1 m_2 Z_T - Z_R}. \tag{24}$$

Tot aşa, pe baza relaţiei (6), se găseşte expresia exponentului compus cînd diportul este închis la poarta (1) pe Z_L şi la poarta (4) pe Z_E, şi anume

$$g_{c14} = \ln \frac{M}{2(Z_R - m_1 m_2 Z_T)\sqrt{Z_L Z_E}}, \tag{25}$$

unde M este dat de (17).

În sfîrşit, impedanţa de intrare la poarta (1) cînd poarta (4) este închisă pe impedanţa Z_E are valoarea

$$Z_{1in} = \frac{Z_E(Z_R + m_1^2 Z_T) + (m_1 + m_2)^2 Z_R Z_T}{Z_E + Z_R + m_2^2 Z_T} \tag{26}$$

şi se poate calcula fie apelînd la relaţia (5), fie, mai simplu, direct prin diportul din figura 3*b* închis la poarta (4) pe Z_E.

2.3. Transmisia dintre porţile (1) şi (2)

Diportul (1,2) este reprezentat în figura 5, împreună cu diportul în T echivalent. Echivalenţa se verifică imediat pe baza tripolilor echivalenţi din figura 4.

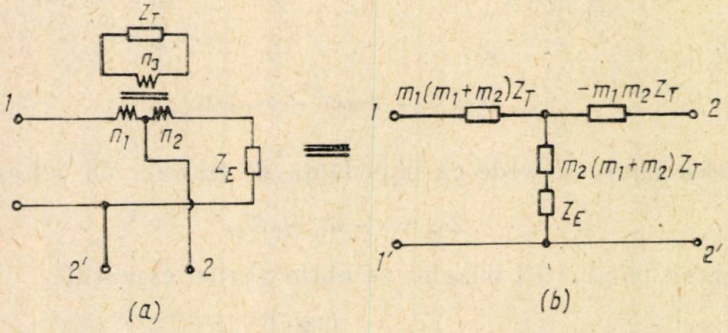


Fig. 5. — Diportul (1,2) şi diportul în T echivalent.

METODE DE IDENTIFICARE A PROCESELOR ÎN SISTEME NELINIARE

DE

MIRCEA PETCU

517.9 : 621.316.7

Se face o scurtă analiză a procedeelor de studiu a sistemelor neliniare. În scopul identificării, autorul arată că aceste metode pot fi folosite cu succes. Este evidențiat prin exemple că identificarea anumitor parametri pentru sistemele cu ciclu-limită și intrare nulă este posibilă în aproximarea funcțiilor de descriere și de cunoaștere a modelului părții liniare.

1. SISTEME NELINIARE

Performanțele sistemelor neliniare se pot stabili prin diferite metode Acestea se caracterizează printr-o anumită specializare, fiecare metodă fiind practică numai pentru anumite tipuri de probleme. Fiecare metodă are avantajul și dezavantajul ei.

Încercarea pe prototipuri are avantajul că se evită căutarea unui model matematic pentru reprezentarea sistemului. Dezavantajul constă în timpul îndelungat pentru construcție și în costul ridicat.

Simularea pe calculatoare este un procedeu foarte util, care reduce din dezavantajele încercării pe prototipuri. Ca fază finală a proiectării, înainte de construirea reală a unui sistem automat, simularea este deosebit de utilă. Încercarea de a simplifica celelalte faze ale studiului analitic prin teste asupra unui sistem neliniar simulat nu este satisfăcătoare, datorită faptului că este costisitor să se încerce multe combinații de condiții inițiale și tipuri de semnale de intrare. Dacă performanța nu e bună, o altă serie de încercări de corectare a sistemului complică procedeul.

Analiza sistemelor neliniare pornind de la soluția ecuațiilor diferențiale se poate face numai în cîteva cazuri speciale pentru sisteme de ordinul doi.

Pentru sistemele de ordinul unu și doi, proprietățile dinamice pot fi studiate prin rezolvarea grafică a ecuațiilor diferențiale în planul fazelor. Problema găsirii traiectoriilor de fază se complică atunci cînd există și o funcție de intrare, însă aproximările ce se obțin sînt destul de bune.

St. cerc. energ. electr., tom. 20, nr. 4, p. 897—917, 1970

Fără a se determina evoluţia sistemului, metoda directă a lui Leapunov permite evaluarea stabilităţii cunoscînd condiţiile iniţiale şi intrarea sistemului. Alegerea funcţiei Leapunov corespunzătoare este însă o problemă.

Pentru găsirea soluţiei ecuaţiilor diferenţiale neliniare s-au creat o mulţime de procedee de expansiune a soluţiei în diverse forme. Problema principală este convergenţa.

Liniarizarea operaţiilor neliniare constituie o aproximare satisfăcătoare pentru foarte multe sisteme. De obicei procedeul se justifică pentru abateri mici ale variabilei în jurul unui punct de funcţionare. Pentru neliniarităţile cu puncte de discontinuitate, procedeul nu e aplicabil.

Cvasiliniarizarea e un procedeu prin care un operator neliniar e înlocuit cu unul liniar care depinde de unele proprietăţi ale semnalului de intrare.

Cvasiliniarizarea este procedeul cel mai util în studiul sistemelor neliniare, în ciuda faptului că modelul cvasiliniar e folosit pentru găsirea semnalelor din sistem, iar cvasiliniarizarea depinde de proprietăţile acestor semnale.

Soluţia practică pentru înlăturarea viciului de mai sus este aceea de a presupune cunoscută forma semnalului de intrare în neliniaritate. Aproximarea cvasiliniară pentru operatorii neliniari se face admiţînd formele de bază ale semnalelor de intrare : componenta continuă, sinusoida, procese întîmplătoare cu distribuţie gausiană. Din procedeele cvasiliniare, „funcţiile de descriere" sînt cele mai expeditive şi mai des folosite [1], deoarece ipoteza filtrării este îndeplinită în foarte multe sisteme reale.

Posibilităţile de identificare pentru sisteme neliniare sînt legate de posibilităţile de analiză, interpretarea şi prelucrarea datelor fiind făcute după schemele de calcul proprii analizei. Cum procedeele de analiză nu sînt exacte, ci numai aproximative, se poate prevedea că şi identificarea va fi afectată de aceleaşi erori sistematice.

2. DINAMICA CICLURILOR-LIMITĂ ŞI SISTEMELE ADAPTIVE

Multe sisteme neliniare cînt concepute să funcţioneze cu ciclu-limită, deoarece astfel se măreşte sensibilitatea componentelor, deci şi performanţele generale ale sistemului. Schimbarea caracteristicilor procesului determină şi schimbarea amplitudinii sau frecvenţei oscilaţiilor ciclului-limită. Problema este aceea de a regla amplitudinea oscilaţiilor permanente pentru a nu deveni supărător de mare (chiar periculoasă pentru sistem) sau prea mică, ceea ce ar duce la dispariţia avantajului de a avea oscilaţia permanentă a ciclului-limită.

Reglarea amplitudinii oscilaţiilor ciclului-limită se poate face cu o schemă adaptivă de tipul celei din figura 1. Ca indice de performanţă se consideră amplitudinea ciclului-limită care se compară cu valoare de referinţă impusă. Funcţie de abatere $(A_{ref} - A)$, se ajustează un para-

metru al sistemului care modifică amplitudinea A. Dintre acțiunile descrise în schema-bloc, cea mai complicată este dinamica schimbării ciclului-limită ca răspuns la modificarea parametrului P.

Existența ciclului-limită se determină considerînd neliniaritatea reprezentată prin funcția ei de descriere.

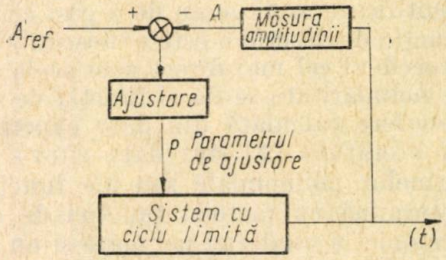


Fig. 1. — Regulator adaptiv pentru amplitudinea oscilațiilor de tip ciclu-limită ale unui sistem automat.

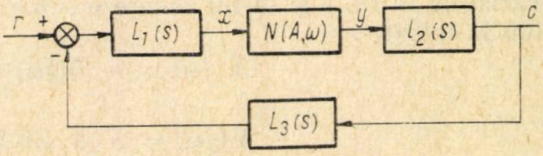


Fig. 2. — Schema-bloc a unui sistem automat neliniar.

Fie schema-bloc din figura 2, în care x și y sînt mărimile de intrare și ieșire ale neliniarității N. Părțile liniare ale sistemului sînt reprezentate prin blocurile $L_1(s)$, $L_2(s)$, $L_3(s)$. Dacă sistemul oscilează, iar $r = 0$, atunci x și y sînt funcții periodice în timp. Dacă sînt îndeplinite condițiile [2]

$$|L_1L_2L_3(jk\omega)| \leqslant |L_1(j\omega)\cdot L_2\cdot L_3(j\omega)| \quad \text{pentru } k = 2,3 \ \ldots$$
$$\text{și } L_1L_2L_3(jk\omega) \to 0 \text{ cînd } k \to \infty, \tag{1}$$

atunci x poate fi aproximat foarte bine cu o sinusoidă :

$$x = A \sin \omega t \tag{2}$$

care aplicată elementului neliniar, va determina că mărimea y să nu fie sinusoidală. Ea însă poate fi descompusă în armonici, dintre care numai prima prezintă interes în condițiile (1).

Neliniaritatea N din figura 2 este descrisă matematic prin funcția de descriere sinusoidală, definită ca

$$N(A,\omega) = \frac{\text{reprezentarea vectorială a componentei } \omega \text{ a mărimii } y}{\text{reprezentarea vectorială a intrării de frecvență } \omega}. \tag{3}$$

Din definiția (3) pentru neliniarități de forma $y = y(x, \dot{x})$ se poate deduce relația de calcul

$$N(A,\omega) = \frac{j}{\pi A}\int_0^{2\pi} y(A \sin \psi, A\omega \cos \psi)\, e^{-j\psi}\, d\psi, \tag{4}$$

unde s-a considerat prima armonică a mărimii de ieșire. Relația de mai sus (4) se poate găsi gata calculată, aplicată și tabelată pentru diferite tipuri de neliniarități [1]. Se dau neliniaritățile și se indică funcția de descriere.

Pentru dispozitivele la care s-a determinat experimental răspunsul armonic, se poate calcula imediat funcția de descriere. O problemă de identificare ar fi aceea de a găsi ce fel de neliniaritate este aceea a cărei funcție de descriere este cunoscută. Evident că inversiunea nu este unică. Procedeul cel mai direct este acela de a inspecta tabelele în care alături de neliniaritate se dă și funcția de descriere și a urmări dacă funcția de descriere calculată din date experimentale coincide cu una din tabelă. În literatură [1] sînt date cîteva procedee analitice de inversiune ale formelor polinomiale sau ale funcțiilor liniare pe porțiuni. Ceea ce se determină cu metoda funcției de descriere este o aproximare a primei armonici a oscilației neliniare și nu forma reală a oscilației.

În afara condiției de filtrare a armonicilor superioare în asemenea grad ca reacția lor să fie neglijabilă, este necesar ca neliniaritatea să fie invariabilă în timp și să nu genereze subarmonici cînd i se aplică o sinusoidă la intrare :

$$X(j\omega) = -L(j\omega)\cdot Y(j\omega),$$
$$Y(j\omega) = N(A,\omega)\cdot X(j\omega). \tag{5}$$

Frecvența și amplitudinea ciclului-limită rezultă ($r = 0$) din rezolvarea sistemului de mai sus, care determină relația

$$1 + N(A,\omega)\cdot L(j\omega) = 0,$$

unde

$$L(j\omega) = L_1(j\omega)\cdot L_2(j\omega)\cdot L_3(j\omega). \tag{6}$$

Relația (6) poate fi analizată algebric prin scrierea ecuației reale și imaginare, care se rezolvă simultan :

$$N_r(A_0\omega_0)\,\mathrm{Re}\,[L(j\omega_0)] \pm N_i(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Im}\,[L(j\omega_0)] = -1,$$
$$N_r(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Im}\,[L(j\omega_0)] + N_i(A_0,\omega_0)\,\mathrm{Re}\,[L(j\omega_0)] = 0. \tag{7}$$

Foarte adesea relația (6) se rezolvă în raport cu A și ω grafic : se reprezintă pe același desen $L(j\omega)$ și $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$.

La intersecția celor două curbe

$$L(j\omega) = -\frac{1}{N(A,\omega)}$$

și pe diagramă se găsesc A_0 și ω_0.

Tot așa pentru atenuările compuse ale diporților (1,2) și (1,3) se obțin expresiile

$$a_{c12} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{4} + \ln \left| \frac{Z_L + Z}{\sqrt{ZZ_L}} \right| \tag{50}$$

și

$$a_{c13} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{4\lambda} + \ln \left| \frac{Z_L + Z}{\sqrt{ZZ_L}} \right|. \tag{51}$$

O altă mărime utilă practic este aceea a impedanței de intrare la poarta (1). Expresia acestei impedanțe se obține prin înlocuirea egalității (46) în (26) și este dată de relația

$$Z_{1in} = Z. \tag{52}$$

Această impedanță de intrare este egală cu impedanța caracteristică din (47) și nu depinde de impedanța Z_E a echilibrorului, lucru explicabil prin faptul că transmisia semnalului între porțile (1) și (4) este nulă. Linia uniformă nu este adaptată și măsura neadaptării este dată de coeficientul de reflexie

$$\rho_L = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L}. \tag{53}$$

O altă situație ce se poate întîlni în practică este aceea în care, pe lîngă Z_R și Z_T, Z_E este o simplă rezistență. Aceste trei rezistențe pot fi luate în raportul rezultînd din (43), adică

$$\lambda Z_E = m_1 m_2 (1+\lambda) Z_T = (1+\lambda) Z_R = Z. \tag{54}$$

În aceste condiții, atenuarea compusă din (49) ia forma

$$a_{c23} = \ln \frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \ln \left| \frac{Z_L + \lambda Z_E}{Z_L - \lambda Z_E} \right|. \tag{55}$$

Această expresie poate fi folosită și ca formă aproximativă pentru relația (49) atunci cînd modulul impedanței Z_E satisface doar cu aproximație condiția (54).

5. COMPARAȚIE ÎNTRE TRANSFORMATORUL DIFERENȚIAL SIMETRIC ȘI CEL NESIMETRIC. CONCLUZII

Dacă în relațiile stabilite mai sus se consideră $\lambda = 1$, transformatorul diferențial devine simetric. În cele ce urmează vom face o comparație între transformatorul diferențial simetric și cel nesimetric din punctul de vedere atît al atenuărilor compuse între diversele porți, cît și al valo-

rilor inductanțelor necesare. Comparația o vom face pentru cazul practic cel mai frecvent în care este satisfăcută egalitatea (46).

Este normal să presupunem că, atunci cînd λ variază, Z în (46) și λZ_E rămîn neschimbate. Într-adevăr, mărimile care se presupun date în practică sînt Z_L și Z_T. Rezistența Z se alege astfel încît să se apropie cît mai mult de $|Z_L|$ în banda de frecvențe folosită. Pentru satisfacerea primei egalități în (46), se alege în mod convenabil produsul $m_1 m_2$, așa

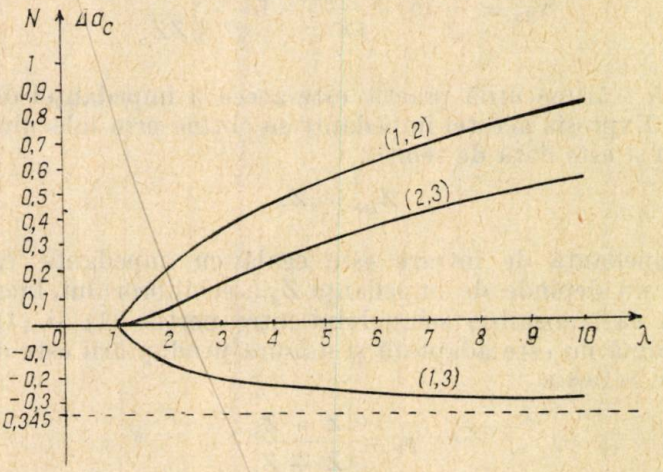


Fig. 7

cum s-a arătat mai sus. Rezistența Z_R va fi aceea care rezultă din a doua egalitate în (46). Cît privește impedanța Z_E, schimbarea raportului λ necesită doar multiplicarea impedanței echilibrorului cu o constantă, ceea ce nu schimbă complexitatea rețelei corespunzătoare.

Ținînd cont de observația de mai sus, se constată că al doilea termen în (49), (50) și (51) nu depinde de λ. Să notăm cu Δa_c diferența dintre expresiile acestor atenuări și cele corespunzătoare transformatorului diferențial simetric ($\lambda = 1$.) Vom avea atunci din (50) și (51) diferențele

$$\Delta a_{c12} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{2} \tag{56}$$

și

$$\Delta a_{c13} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \tag{57}$$

iar din (49) diferența

$$\Delta a_{c23} = \ln \frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{58}$$

Curbele care reprezintă variația cu λ a acestor diferențe au fost reprezentate în figura 7. Examinarea acestor curbe duce la constatările care urmează.

Cînd λ crește, atenuarea compusă între porțile (1) și (3) se micșorează, iar această micșorare nu poate depăși valoarea de 0,345 N (atinsă cînd λ tinde către infinit). Pentru $\lambda = 9$, această micșorare este de 0,3 N și o mărire suplimentară a raportului nu mai aduce practic nici o modificare a atenuării compuse.

Atenuarea compusă între porțile (1) și (2) crește nelimitat cu creșterea lui λ, dar creșterea este relativ înceată. Pentru $\lambda = 9$, această creștere este de 0,8 N.

Și atenuarea compusă între porțile (2) și (3) crește cu λ, însă și mai încet decît în cazul precedent. Pentru $\lambda = 9$, această creștere are valoarea de 0,45 N.

Constatările de mai sus pot indica situații în care transformatorul diferențial nesimetric este preferat celui simetric. O asemenea situație este aceea în care un cîștig de 0,3 N între porțile (1) și (3) ar fi binevenit, fără însă ca o creștere corespunzătoare de 0,8 N a atenuării între porțile (1) și (2) să fie supărătoare.

O altă constatare interesantă este aceea că asimetria tinde să echilibreze transformatorul diferențial. Acest lucru îl arată creșterea cu λ a atenuării compuse între porțile (2) și (3) pentru o valoare dată a diferenței $Z_L - \lambda Z_E$. Această creștere este însă relativ înceată.

Să vedem acum modul în care mărimile celor trei inductanțe depind de λ. După cum se știe, la un transformator de adaptare, pentru un factor de distorsiuni de atenuare dat, inductanța unei înfășurări este proporțională cu rezistența conectată la bornele acelei înfășurări. Deoarece impedanța Z_T (presupusă o rezistență) este dată, înseamnă că inductanța L_3 (și deci și numărul de spire n_3) trebuie să fie independentă de λ dacă dorim ca transformatorul să fie de aceeași calitate pentru orice λ. Cum și impedanța Z_L a liniei este dată, ultima dintre egalitățile din (43) arată că termenul $m_1 m_2 (1 + \lambda)$ trebuie să fie independent de λ. Reamintind că inductanța variază proporțional cu pătratul numărului de spire și folosind notațiile din (7), rezultă că inductanțele L_1 și L_2 depind de λ după relațiile

$$L_1 = k \frac{\lambda}{1 + \lambda} \tag{59}$$

$$L_2 = k \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)}, \tag{60}$$

unde k este o constantă. Aceste relații arată că L_1 variază de la o valoare dată pînă la dublul ei cînd λ variază de la unitate (transformator simetric) pînă la infinit. Variația raportului λ se face în principal pe seama inductanței L_2, care scade cînd λ crește.

6. CONCLUZII

În lucrarea de față au fost stabilite, în primul rînd, proprietățile transformatorului diferențial nesimetric în condițiile cele mai generale de lucru, proprietăți referitoare la transmisia semnalului între toate cele

patru porți, luate două cîte două, completîndu-se astfel rezultatele cunoscute din literatura de specialitate. Stabilirea acestor proprietăți s-a căutat a fi făcută pe o cale cît mai unitară și mai simplă. Aceste rezultate generale au fost apoi particularizate la condițiile optime de lucru și la condițiile practice cele mai frecvent întîlnite.

În al doilea rînd, a fost făcută o comparație între proprietățile transformatorului diferențial simetric și cel nesimetric. Această comparație a fost făcută pentru condițiile practice de lucru. Constatările care au rezultat arată că transformatorul diferențial nesimetric poate prezenta oarecare avantaje față de cel simetric în anumite situații particulare de utilizare.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Wallot, *Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik*, ed. 5, Berlin, Springer-Verlag, 1948.
2. Otto Henkler, *Anpassungs — und Differenzialübertrager der* Nachrichtentechnik, vol. 13, Berlin, Technik-Verlag, 1951.
3. P. Postelnicu, *Expresia matricei de repartiție a unui cvadripol în punte simetric sau potențial simetric în funcție de parametrii de repartiție ai impedanțelor componente*, Telecomunicații, **13**, *11*, 489—498 (1969).

11. CONCLUZII

Identificarea a doi parametri la sistemele neliniare cu ciclu-limită se poate face măsurînd elementele ciclului-limită și aplicînd relațiile (48). Condiția este ca sistemul să aibă intrarea zero. Procedeul se poate extinde și la indici de performanță de tip integral. Neliniaritatea s-a presupus cunoscută, iar ipoteza filtrării respectată.

Identificarea cu ajutorul oscilațiilor ciclului-limită este comparabilă cu identificarea sistemelor liniare cu semnal de test injectat din exterior, însă pot exista avantaje față de acest procedeu prin folosirea unui echipament mai redus și mai ieftin.

BIBLIOGRAFIE

1. Artur Gelb, Walace Vander Velde, *Multiple Input Describing Functions and Nonlinear Systems*, N. Y., 1968.
2. E. P. Popov, N. P. Paltov, *Priblijenîie metodî isledovania nelineinîh avtomaticeskin sistem*, Moscova, 1960.
3. G. Gille, Pelegrin Decaulne, *Teoria și calculul sistemelor de reglare automată*, București, 1962.
4. J. Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, N. Y., 1958.
5. S. S. Lamba, R. J. Kavanagh, *Jump — resonance Criteria for Systems Containing Double — valued and Frecvency — dependent Nonlinearities*, Proc. IEE, **116**, 7 (1969).
6. H. Hatanaka, *Frecvency Responses and Jump Resonance Phenomena of Nonlinear Feeldack Control Systems*, Trans ASME, D—85 (1963).
7. E. Mishkin, L. Braun, *Adaptive Control Systems*, N. Y., 1961.
8. F. Clauser, *The Transient Behavior of Nonlinear Systems*, IRE Trans. Circuit Theory, *4* (1960).
9. A. Sen, R. A. Johnson, *A Nonlinear Compensation Technique for Systems Involving Hysteresis*, IEE Trans. on Automatic Control, *6* (1966).

SINTEZA ȘIRURILOR RADIANTE

DE

EDMOND NICOLAU

621.396.671.001.11

În prima parte a lucrării se stabilesc condițiile pe care trebuie să le satisfacă caracteristicile de directivitate ale sistemelor electromagnetice radiante fizic realizabile. În partea a doua se dă o metodă proprie de sinteză a șirurilor radiante care realizează o caracteristică de directivitate dată.

1. INTRODUCERE

Sistemele radiante utilizate în momentul de față se pot grupa în două mari categorii : sisteme continue și sisteme discrete. În prima categorie intră antenele filiare de diverse tipuri și radiatoarele de suprafață (hornuri, antene-fantă, paraboloizi etc.). Pentru toate aceste sisteme este caracteristic faptul că ele pot fi considerate ca fiind constituite dintr-un număr infinit de elemente radiante infinitezimale, care formează un continuu spațial. În a doua categorie intră sistemele formate dintr-un număr finit de elemente radiante, dispuse unele de altele la distanțe finite. Șirurile radiante sînt astfel de sisteme radiante discrete.

În prezenta lucrare se stabilesc o serie de condiții privind realizabilitatea sistemelor radiante electromagnetice. De asemenea se dă o metodă de sinteză a șirurilor de elemente identice, dispuse regulat de-a lungul unei drepte și care realizează o caracteristică de directivitate dată.

2. CONDIȚII DE REALIZABILITATE

2.1. Condiția energetică

Din punct de vedere fizic, condiția care se pune caracteristicii de directivitate a unui sistem cere ca puterea totală radiată să fie finită atunci cînd în antenele sistemului se injectează curenți finiți, iar numărul antenelor este de asemenea finit.

Avînd în vedere că la distanţă mare de cîmpul produs este, pe porţiuni suficient de mici, un cîmp de unde plane, se poate scrie pentru densitatea de putere radiată

$$S = E^2/120\,\pi$$

dacă radiaţia are loc într-un spaţiu în care densitatea de substanţă este foarte mică ; în general, dacă mediul este omogen şi izotrop, $E/H = 120\,\pi\varepsilon_r^{1/2}$, deci $S = E^2/(120\pi\varepsilon_r^{1/2})$.

În cazul unui conductor filar de o formă dată, fiecare element de lungime du poate fi caracterizat prin vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ sau prin coordonata u măsurată de la o origine arbitrară : prin intensitatea $I(u)$ a intensităţii curentului în elementul du, şi prin versorul $\mathbf{e}(u)$.

Cîmpul elementar produs de elementul $I(u)\,du$ este

$$dE = \frac{A}{r}\,\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0)\, I(u)\, du \exp(-jkr).$$

Notînd cu $F(u)$ funcţia de distribuţie a curentului în conductor

$$I(u) = I_0 F(u),$$

unde I_0 este curentul în punctul de acces la antenă, rezultă

$$E = AI_0 \int_A^B \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0)\, F(u)\psi\, du,$$

A şi B fiind extremităţile antenei, iar

$$\psi = \frac{\exp(-jkr)}{r}.$$

Deoarece dimensiunile antenei sînt finite, pentru o distanţă suficient de mare de zona în care se află localizată antena se poate considera că

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_a},$$

unde r_a este distanţa de la punctul în care se consideră cîmpul pînă la un punct ales arbitrar în zona în care se află elementele radiante.

Se poate scrie

$$E(\theta, \varphi) = I_0\, Cf(\theta, \varphi),$$

unde C este un factor de normare, iar $f(\theta, \varphi)$ caracteristica de directivitate a antenei filare.

Puterea totală radiată de antenă este

$$P = \frac{I_0^2 C}{120\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi < \infty.$$

Deoarece $C < \infty$, condiţia ca puterea radiantă să fie finită atunci cînd curentul I_0 este finit este echivalentă cu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi < \infty. \tag{1}$$

Dar

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, | f^2(\theta, \varphi) \, d\theta \, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi) d\theta \, d\varphi.$$

Se obţine astfel o *condiţie suficientă* de radiaţie pentru antenele filare :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi) \, d\theta \, d\varphi < \infty.$$

În cazul şirurilor de antene, cîmpul total este

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i(\theta, \varphi) = \sum C_i \frac{\mathbf{e}_i}{r_i} I_{i0} f_i(\theta, \varphi),$$

unde caracteristicile $f_i(\theta, \varphi)$ se iau normate, coeficienţii de normare C_i fiind întotdeauna finiţi.

La distanţă mare de antene,

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \frac{1}{r_a} \sum \mathbf{e}_i I_{0i} C_i f_i(\theta, \varphi) \psi_i,$$

de unde

$$E(\theta, \varphi) = \frac{1}{r_a} I_{01} | \Sigma m_i \mathbf{e}_i C_i f_i(\theta, \varphi)) | \Delta \frac{C}{r_a} I_{01} f_s(\theta, \varphi),$$

unde

$$m_i = I_{0i}/I_{01},$$

C fiind un coeficient de normare, I_{01} un curent de intensitate nenulă, iar f_0 caracteristica de directivitate a şirului de radiatoare.

Puterea radiată este

$$P = \frac{C^2}{120} I_{01}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f_s^2(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Printr-un procedeu analog cu cel utilizat în cazul radiatorului filar, din condiția $P < \infty$ rezultă

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_0^2(\theta, \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_s^2(\theta, \varphi)\,d\theta\,d\varphi < \infty,$$

aceeași condiție suficientă ca și în cazul conductorilor filari.

Demonstrația se poate extinde la orice sistem radiant de caracteristică de radiație $f(\theta, \varphi)$.

Puterea radiată de sistem este

$$P = D\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(\theta, \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

unde D este un factor finit, proporțional cu intensitatea curentului în cazul antenelor filare sau cu intensitatea cîmpului în deschizătura radiantă în cazul antenelor de suprafață.

Din majoritatea expresiei puterii rezultă condiția suficientă de radiație :

$$\int_0^{2\pi} f^2(\theta, \varphi)\,d\theta\,d\varphi < \infty.$$

2.2 Condiția de finitudine

Cîmpul de radiație produs de un element de curent dx este, la distanța r și în direcția θ față de axa elementului de curent :

$$dE = \frac{j60\pi}{\lambda r}\sin\theta I(x)\exp(-jkr)\,dx.$$

La distanță mare de antenă, cîmpul total produs de o antenă filară în care distribuția de curent este $I(\xi)$ este

$$E = A\int_G I(\xi)\exp(-kjr)\sin\theta\,d\xi,$$

unde

$$A = \frac{j60\pi}{\lambda r},$$

în general

$$r = r(\xi), \quad \theta = \theta(\xi),$$

iar G un segment de pe axa reală, corespunzător lungimii antenei.

Amplitudinea cîmpului este

$$E = A\left|\int_G I(\xi)\exp(-jkr)\sin\theta\,d\xi\right| \leqslant |A|\int_G |I(\xi)||\sin\theta|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant |A|\int_G |I(\xi)|\,d\xi \leqslant |A|\,M\mu(G),$$

unde

$$M = \max_{\xi} |I(\xi)|,$$

iar $\mu(G)$ este măsura segmentului G (lungimea antenei).

Dacă lungimea antenei este finită și se admite că intensitatea curentului în antenă este de asemenea finită, rezultă că și intensitatea cîmpului este finită :

$$E(r, \theta, \varphi)\ r < \infty. \tag{2}$$

Această condiție corespunde interdicției de a avea intensități de curent infinite. Trebuie însă precizat că, chiar dacă aceasta are un sens în cadrul condițiilor reale (conductori reali cu conductivitate finită), nu pare obligatorie în cazul conductorilor perfecți, cînd se impune condiția energetică.

Relația (2) corespunde uneia dintre condițiile de radiație, dar și ea se stabilește admițînd cele două ipoteze de finitudine :

a) finitudinea dimensiunilor antenei ;

b) finitudinea densității de curent în antenă (vezi Müller C. (1950)).

Dacă se acceptă ipoteza finitudinii pentru elementele radiante, sîntem conduși imediat la concluzia că un șir format dintr-un număr finit de elemente, alimentate cu curenți finiți, nu poate produce la distanță finită un cîmp infinit.

Într-adevăr, la un șir putem scrie

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \frac{1}{r_0} I_{01} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i\, m_i\, C_i f_i(\theta, \varphi),$$

de unde

$$E(\theta, \varphi) = \frac{1}{r_0} I_{01}\left|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i\, m_i\, C_i f_i\right| \leqslant \frac{I_{01}}{r_0}\sum_{i=1}^{N} |m_i||C_i||f_i|, \text{ căci } |\psi_i r_i| =$$
$$= |\exp(-jkr_i)| = 1.$$

Rezultă deci

$$E(\theta, \varphi) = \frac{C}{r_0} I_{01} f_s(\theta, \varphi) \leqslant \frac{1}{r_0} I_{01} NMCF,$$

unde

$$M = \max_i m_i, \quad C = \max_i C_i, \quad F = \max_{i,\theta,\varphi} f_i(\theta, \varphi).$$

Din inegalitatea

$$f_s(\theta, \varphi) \leqslant NMCF$$

și din finitudinea numerelor N, M, C, F rezultă

$$f_s(\theta, \varphi) < \infty.$$

Aceste concluzii se pot extinde și la suprafețele radiante. Fie o suprafață Σ, pe care se dă o distribuție de cîmp **E** și **H**. În punctul P, cîmpul produs este de forma

$$C_m(P) = B\int_\Sigma \alpha C_m(M)\frac{\exp(-jkr)}{r}\,da,$$

unde C_m este componenta după m a uneia dintre componentele cîmpului ($m = 1, 2, 3$), B este o constantă independentă de $r = MP$, iar α un număr, factorul de direcție din teoria difracției, normat, $|\alpha| \leqslant 1$ Coulson (1944).

Rezultă imediat

$$C(P) \leqslant \frac{1}{r_m}|B|\int_\Sigma |\alpha|\,|C_m(M)|\,da \leqslant \frac{1}{r_m}|B|NA,$$

unde

$$r_m = \min_{M\in\Sigma} r,$$

$$N = \max_{M\in\Sigma} |C_m(M)|,$$

$$A = \int_\Sigma da.$$

Se degajează imediat aceeași concluzie: dacă dimensiunile suprafeței radiante sînt finite și în deschidere cîmpul este finit, atunci cîmpul produs în orice alt punct rămîne de asemenea finit:

$$\lim_{r\to\infty} rC < \infty, \tag{3}$$

deci și caracteristica de radiație a unei suprafețe radiante este finită în orice direcție.

Trebuie remarcat că formula (3) nu este riguroasă, deoarece se ține seama numai de cîmpul în deschizătură, dar nu și de distribuția de curent în conturul suprafeței, contur de obicei perfect conductor. Este necesar să se țină seama de corecția lui Kottler (1923), care însă nu schimbă esențial problema.

Existența unui cîmp infinit în deschiderea suprafeței radiante nu vine în contradicție cu principiile energetice dacă rămîne finită integrala vectorului Poynting printr-o suprafață care înconjură elementul radiant.

Dar producerea în deschidere a unor intensități infinite de cîmp presupune elemente primare : conductoare radiante parcurse de curenți infiniți.

Sîntem astfel conduși la două criterii de realizabilitate :

criteriul energetic : caracteristica de directivitate $f(\theta, \varphi)$ aparține clasei funcțiilor de pătrat sumabil :

$$f(\theta, \varphi) \in L^2 (0, \pi ; \ 0{,}2\pi) ;$$

criteriul de finitudine : caracteristica de directivitate $f(\theta, \varphi)$ este de modul finit :

$$|f(\theta, \varphi)| < \infty.$$

Este necesar să observăm că restricțiile energetice sînt mai puțin severe decît cele de finitudine, în sensul că, dacă $r(\theta)$, caracteristica de directivitate, aparține clasei funcțiilor de modul sumabil, atunci ea aparține implicit și clasei funcțiilor de pătrat sumabil pe aceleași intervale, în timp ce reciproca nu este valabilă.

Într-adevăr, dacă

$$f(\theta, \varphi) \leqslant M,$$

atunci

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} f^2(\theta, \varphi)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \leqslant 4\pi r^2 M^2.$$

Invers însă, din condiția $f \in L^2$ nu se poate deduce condiția de finitudine.

2.3. Utilizarea funcțiilor întregi

Pentru radiatoarele rectilinii subțiri s-a demonstrat că singurele caracteristici realizabile sînt cele date prin funcții întregi. Aceeași concluzie subzistă și pentru șirurile de antene. Pentru a demonstra aceasta, plecăm de la expresia cîmpului :

$$E(\theta) = \sum_{p=1}^{N} I_p \exp(jkd_p \cos\theta),$$

facem schimbarea de variabilă

$$z \overset{\Delta}{=} \mathrm{d} \sin \theta / \mathrm{x}$$

şi scriem

$$E(\theta) \overset{\Delta}{=} R(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n S_n(z),$$

unde

$$S_n(z) \overset{\Delta}{=} \frac{\sin \pi (z - n)}{\pi (z - n)},$$

iar

$$A_n = \sum_{p=1}^{N} I_p \exp(jns_p),$$

s_p fiind o mărime proporţională cu d_p ($|s_p| < \pi$).
Rezultă cu $R(z)$ este o funcţie întreagă, cu $\sigma \leqslant \pi$.

Se deduce că, pentru ca o caracteristică de directivitate să poată fi realizată exact cu ajutorul unui şir de radiatoare, este necesar ca această caracteristică de directivitate să fie o funcţie întreagă. În plus, ea trebuie să fie mărginită pe axa reală, aşa cum rezultă din relaţiile

$$E(\theta) = \left| \sum_{p=1}^{N} I_p \exp(jkd_p \cos\theta) \right| \leqslant \sum_{p=1}^{N} |I_p| \overset{\Delta}{=} I < \infty.$$

3. SINTEZA ŞIRURILOR DE ANTENE

3.1. Noţiuni auxiliare

La baza metodei propuse de noi pentru sinteza caracteristicilor de directivitate ale antenelor stă faptul că aceste caracteristici pot fi dezvoltate în serie Fourier.

Conform unor teoreme datorite lui Weierstrass care stau la baza teoriei aproximării funcţiilor continue prin polinoame, se ştie că orice funcţie continuă admite o dezvoltare în serie trigonometrică. Mai exact, se poate enunţa următoarea

TEOREMĂ. Orice funcţie f continuă şi periodică este limita uniformă a unui şir de polinoame trigonometrice [1].

De aici rezultă şi teorema conform căreia orice funcţie continuă pe un interval închis este limita uniformă a unui şir de polinoame.

Condiţia de continuitate este prea restrictivă. Se ştie că şi o funcţie cu discontinuităţi poate fi dezvoltată în serie Fourier dacă satisface condiţiile lui Dirichlet.

Notînd cu t variabila independentă și cu $f(t)$ funcția periodică de perioadă T, aceste condiții se scriu astfel:

a) $f(t)$ este finită: $\forall t \in [0, T]$, $f(t) < \infty$;

b) fiecărui θ îi corespunde o singură valoare a lui $f(\theta)$;

$$\forall \theta \in [0, T], \exists ! f(\theta);$$

c) numărul total de maxime, minime și de discontinuități de prima speță într-o perioadă este finit.

În aceste condiții, dacă $f(t)$ este discontinuă într-un punct oarecare t, suma seriei în punctul respectiv este egală cu media aritmetică a limitelor la dreapta și la stînga punctului t:

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)). \tag{1}$$

Această proprietate a funcțiilor cu discontinuități este utilă în sinteza sistemelor radiante, unde se poate pune problema sintezei unui sistem cu caracteristică sectorială de tipul

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in [ab], \\ 0 & \theta \notin [ab]. \end{cases}$$

Menționăm de asemenea teorema lui C. Jordan:

Fie o funcție f de perioadă 2π, integrabilă pe $[0,2\pi]$. Dacă f are variație mărginită pe intervalul $[a, b]$, atunci seria ei Fourier converge către suma $s(t) = 1/2(f(t+0) + f(t-0))$ în oricare punct $t \in (a,b)$. Dacă, în plus, funcția f este continuă în $t_0 \in (a, b)$, seria ei Fourier converge uniform în punctul t_0 și $s(t_0) = f(t_0)$.

Amintim că $\sum u_k(x)$ converge uniform în punctul x_0 către $s(x)$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ & $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$

$$(n \geqslant N \;\&\; |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} uk(x) - s(x) \right| < \varepsilon.$$

Conform teoremei lui Jordan, se cere ca

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

și, în plus, $f(x)$ să fie cu variație mărginită.

La șirurile de antene, caracteristicile $f_i(\theta)$ se bucură de proprietatea

$$f_i(-\theta) = f_i(\theta) \tag{2}$$

în ipoteza că toate elementele șirului au caracteristicile $f_j(\theta)$ simetrice în θ:

$$f_j(-\theta) = f_j(\theta). \tag{3}$$

Datorită propagării, cîmpul produs de fiecare antenă suferă un defazaj proporțional cu distanța r de la antenă. Astfel, la această distanță cîmpul are expresia

$$E = AI \exp(-jkr). \tag{4}$$

În cazul unui șir de radiatoare identice și coliniare cîmpul total este

$$E_t = \sum AI_i \exp(-jkr_i). \tag{5}$$

Considerăm antenele plasate în punctele A_i de pe dreapta Δ.

Cîmpul se calculează în punctul P la o distanță suficient de mare de antene pentru a se putea considera dreptele PA_i paralele. Deci, luînd originea fazelor în 0, se poate scrie

$$r_i = r_0 - d_i \cos\theta, \tag{6}$$

unde

$$r_0 = OP \qquad d_i = OA_i,$$

iar θ este unghiul dintre Δ și OP. În concluzie,

$$E = A \mid \sum I_i \exp(-jkd_i \cos\theta) \mid.$$

Cum $E(\theta)$ depinde de θ numai prin intermediul funcției cos θ, care este pară, rezultă proprietatea (2).

Aceasta înseamnă implicit că, dezvoltînd în serie Fourier caracteristica $E = E(\theta)$, în seria respectivă vor exista numai termeni în cos θ:

$$E(\theta) = \sum a_n \cos n\theta.$$

Bineînțeles, aceasta presupune că funcția de sintetizat $E(\theta)$ admite o dezvoltare în serie Fourier.

Pentru a demonstra această relație, plecăm de la funcția generatoare a funcțiilor Bessel:

$$\exp \frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n.$$

Pentru a obține ca argument al funcției exponențiale mărimea cosθ, facem schimbarea de variabilă

$$w = j \exp j\theta.$$

În acest caz,

$$\frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) = \frac{j}{2}\left(\exp j\theta + \exp\left(-j\theta\right)\right) = j\cos\theta$$

și deci

$$\exp\left(jz\cos\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, j^n \exp jn\theta.$$

Termenii se pot grupa ținînd seama și de proprietățile funcțiilor Bessel:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Se poate deci scrie

$$\exp\left(jz\cos\theta\right) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\theta +$$

$$+ 2j\sum_{n=0}(-1)^n J_{2n+1}(z)\cos\left(2n+1\right)\theta.$$

Ținînd seama și de relația

$$J_p(zj^{2m}) = j^{2mp} J_p(z),$$

rezultă

$$J_p(-z) = (-1)^p J_p(z),$$

astfel încît

$$\exp\left(\pm jz\cos\theta\right) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\theta$$

$$\pm 2j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)\cos\left(2n\pm 1\right)\theta, \tag{7}$$

unde $J_p(x)$ este funcția Bessel de speța întîi, de ordin p și de argument x.

3.2. Metoda perechilor de curenți (MPC)

Metoda de sinteză propusă de noi se bazează, pe de-o parte, pe principiul suprapunerii efectelor, pe de altă parte, pe posibilitatea relativ simplă de a obține caracteristici în care să figureze termeni în cos ix, unde i poate fi, la alegere, sau par, sau impar.

În acest scop, considerăm un șir format dintr-un număr impar de radiatoare, astfel încît antenele i, situate la distanța id de centru, să fie parcurse de curenți egali ca amplitudine, dar de faze opuse. Contribuția unei perechi de antene este

$$E_i = I_i \exp\left(-jikd\cos\theta - j\varphi_i\right) - I_i \exp\left(jikd\cos\theta - j\varphi_i\right).$$

Dînd factor comun termenul I_i, rezultă

$$E_i = I_i(\exp(-jikd\cos\theta) - \exp(jidk\cos\theta)).$$

Ţinînd seama de dezvoltarea (6), se anulează toţi termenii, cu excepţia celor în cos $(2n+1)\,\theta$, obţinînd

$$E_i = 4I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(ikd)\cos(2n+1)\,\theta.$$

Dacă toate perechile de antene sînt parcurse de curenţi, astfel încît

$$I_{id} = I_{is},$$

unde indicele d se referă la elementul situat la distanţa $+id$ de origine, iar indicele s la distanţa $-id$ de origine, atunci

$$E = A\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} I_i(-1)^n J_{2n+1}(ikd)\cos(2n+1)\theta\right|.$$

În mod similar se pot obţine caracteristici la care în dezvoltarea în serie Fourier să existe numai termeni în cos $2n\,\theta$.

Pentru aceasta se consideră acelaşi şir, dar la care distribuţia de curent este astfel încît

$$I_{id} = I_{is}.$$

În acest caz, contribuţia unei perechi este

$$E_i = I_i(\exp(jikd\cos\theta) + \exp(-jikd\cos\theta))$$

şi, ţinînd seama de (6), se obţine

$$E_i = I_i(2J_0(ikd) + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(ikd)\cos 2n\theta).$$

Cîmpul total produs de toate perechile, este

$$E = 2\sum_{i=1}^{N} I_i J_0(ikd) + 2\sum_{i=1}^{N} I_i \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(ikd)\cos 2n\theta.$$

Să considerăm acum şirul în care s-au injectat simultan ambele distribuţii de curent. Cîmpul total este

$$E = \sum_{i=1}^{N} I_{id}\exp(jikd\cos\theta) + I_0 + \sum_{i=1}^{N} I_{is}\exp(-jikd\cos\theta).$$

În același timp, în fiecare antenă curentul poate fi considerat ca suma a doi curenți, dintre care unul produce termenii în cos $2n\theta$ și celălalt termenii în cos $(2n+1)\theta$.

Scriem

$$I_{ia} = I_i' + I_i'' \exp j\psi,$$

$$I_{ic} = I_i' - I_i'' \exp j\psi,$$

unde ψ e un număr arbitrar.

În aceste condiții, caracteristica de radiație se scrie

$$E = \sum_{i=1}^{N} I_i'(\exp(jikd\cos\theta) + \exp(-jikd\cos\theta) + I_0$$

$$+ \sum_{i=1} I_i'' \exp j\psi(\exp(jikd\cos\theta) - \exp(-jikd\cos\theta)).$$

Efectuînd calculele, se obține

$$E = \left| \sum_{i=1}^{N} 2I_i'(J_0(ikd) + 2\sum_{i=1}^{N} (-1)^n J_{n2}(ikd)\cos 2n\theta) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + I_0 + 4j\sum_{i=1}^{N} I_i'' \exp j\psi \sum_{i=1}^{N} (-1)^n J_{2n+1}(ikd)\cos(2n+1)\theta \right|.$$

Se observă că situația se simplifică mult dacă toți curenții se iau în fază și

$$j\exp j\psi = 1.$$

În acest caz se poate renunța la semnul modulului, în sensul că toți termenii care intervin în membrul drept sînt reali.

Identificînd coeficienții din dezvoltarea caracteristicii în serie Fourier cu expresia (8), rezultă următorul sistem de ecuații:

$$a_0 = I_0 + 2\sum_{i=1}^{N} I_i J_0(ikd),$$

$$a_{2n} = (-1)^n 4\sum_{i=1}^{N} I_i J_{2n}(ikd),$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n 4\sum_{i=1}^{N} I_i'' J_{2n+1}(ikd).$$

Acest sistem cuprinde $2N + 1$ necunoscute : I_0, I_i' și I_i'' și tot atîtea ecuații.

Curenții reali din radiatoare sînt dați de formulele

$$I_{id} = I_i' - jI_i'',$$

$$I_{is} = I_i' + jI_i''.$$

Cu aceasta, sinteza șirului este realizată cel puțin într-o primă etapă.

3.3. Observații de metodologie a calculului

Pentru rezolvarea efectivă a sistemului de ecuații care dau curenții din antene este indicat a modifica ecuațiile. Astfel, sistemul total se desparte în două sisteme independente :

$$\sum_{i=1}^{N} I_i J_0(ikd) + 0{,}5\, I_0 = 0{,}5\, a_0,$$

$$(-1) \sum_{i=1}^{N} I_k' J_{2n+1}(ikd) = 0{,}25\, a_{2n+1},$$

respectiv

$$(-1)^n \sum_{i=1}^{N} I_i'' J_{2n+1}(ikd) = 0{,}25\, a_{2n+1}.$$

Rezolvarea separată a celor două subsisteme este mai comodă decît rezolvarea sistemului format prin reuniunea lor.

3.4. Dezvoltarea în serie Fourier a caracteristicii realizate

Dispunînd de valorile curenților din antenele sistemului, se poate obține expresia caracteristicii de radiație a sistemului sintetizat.

În acest scop observăm că în direcția θ cîmpul total produs de sistem este

$$E(\theta) = A\left(I_0 + \sum_{i=1}^{N} I_i'(\exp jx + \exp(jx)) - \sum_{i=1}^{N} I_i''(\exp jx - \exp(-jx)\right),$$

unde A este un factor de proporționalitate, care pentru calcularea caracteristicii de directivitate se ia $A = 1$, iar

$$x = ikd \cos\theta.$$

Ținînd seama de dezvoltările în serie (6), se obține

$$f(\theta) = I_0 + 2\sum_{i=1}^{N} I_i'(J_0(ikd) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(ikd)\cos 2n\theta) -$$

$$- 4\sum_{i=1}^{N} I_i'' \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(ikd)\cos(2n+1)\theta.$$

Grupînd termenii după argumentul funcțiilor trigonometrice, rezultă

$$f(\theta) = I_0 + 2\sum_{i=1}^{N} I_i' J_0(ikd) + 4\sum_{i=1}^{N} I_i'' \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(ikd)\cos(2n+1)\theta +$$

$$+ 4\sum_{i=1}^{N} I_i' \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(ikd)\cos 2n\theta,$$

de unde se deduc coeficienții Fourier ai caracteristicii realizate :

$$f(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta,$$

unde

$$b_0 = I_0 + 2\sum_{i=1}^{N} I_i' J_0(ikd),$$

$$b_{2n+1} = 4\sum_{i=1}^{N} I_i''(-1)^n J_{2n+1}(ikd),$$

$$b_{2n} = 4\sum_{i=1}^{N} I_i'(-1)^n J_{2n}(ikd).$$

Avem astfel posibilitatea să evaluăm calitatea sintezei obținute.

3.5. Erorile metodei

Deoarece sinteza s-a realizat cu ajutorul unui număr finit de radiatoare, iar din dezvoltarea în serie Fourier a caracteristicii se obțin, în general, un număr infinit de termeni, rezultă că și caracteristica șirului finit prezintă o eroare față de caracteristica dată.

Se pune problema evaluării acestei erori.

Vom defini eroarea ca fiind eroarea medie pătratică :

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}(f_0(\theta) - f(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}$$

unde $f_0(\theta)$ este caracteristica dată spre sintetizare, iar $f(\theta)$ caracteristica realizată.

Scriem

$$f_0(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \frac{a_0}{\sqrt{2}},$$

iar

$$f(\theta) = \sum_{n} b_n \cos n\theta + \frac{b_0}{\sqrt{2}},$$

datorită simetriei caracteristicilor.

Dar

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} (f_0(\theta) - f(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} (f_0^2 - 2f_0 f + f^2)\,\mathrm{d}\theta.$$

În expresiile funcţiilor f_0 şi f nu apar decît funcţiile cos x, care formează o familie de funcţii ortogonale:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$$

Această observaţie permite a scrie

$$\int^{\alpha+2\pi} f_0^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right),$$

$$\int_{\alpha}^{\pi+2\pi} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right),$$

$$\int^{\alpha+2\pi} f_0 f \,\mathrm{d}\theta = \pi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right).$$

Putem exprima atunci eroarea

$$\varepsilon = \frac{1}{2^{1/2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right)^{1/2}.$$

În practică se pot utiliza şi alte metode pentru evaluarea erorii. Astfel, dacă se cunoaşte expresia analitică a caracteristicii de sintetizat $f_0(\theta)$, în unele cazuri se poate calcula direct

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f_0^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Din calcularea şi eventual din reprezentarea grafică a caracteristicii realizate $f(\theta)$ se poate evalua

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Dispunînd şi de expresia analitică a caracteristicii $f(\theta)$ realizate, se poate uneori calcula exact

$$I^3 = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f_0(\theta) f(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

În fine, se pot reprezenta pe acelaşi grafic ambele funcţii $f_0(\theta)$ şi $f(\theta)$ prin planimetrare, determinînd

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} (f_0(\theta) - f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta.$$

BIBLIOGRAFIE

1. T. Ganea, *Serii trigonometrice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
2. C. Müller, *Zur mathematishen Theorie elektromagnetischer Schwingungen*, Abhandlungen der deutsch. Akad. der Wiss. zu Berlin, Math.-nat. Kl., *3* (1945/1946).
3. Edm. Nicolau, *Sinteza antenelor direcţionale*, Buletinul ştiinţific, Secţia Mat. Fiz., **III**, *3*, 407–415 (1951).
4. — *Despre şirurile de radiatori avînd o caracteristică de radiaţie dată*, Buletin ştiinţific, Secţia Mat. Fiz. **V**, *1*, 181, 190 (1953).
5. A. A. Pitolkors, *Problema sinteza antena*, în *100 let so dnia rojdeniia „A. S. Popova"*, Izd. AN SSSR, 1960 p. 84–93.
6. I. Wolff, *Determination of the radiating system which will produce a specified directional characteristic*, Proc. IRE, **25**, *5*, 630–643 (1937).
7. C. A. Coulson, *Waves — a mathematical account of the common tyres of wave motion*, Edinburgh and London, 1944.
8. F. Kottler, *Elektromagnetische Theorie der Bengung an schwarzen Schirmen*, Ann. Physik, **71**, *4*, 457 – 508 (1923).

PILA DE COMBUSTIE CU HIDRAZINĂ

DE

M. MARINESCU și ST. DOBOȘ

621.352.6 : 451.135.5.

În prima parte a lucrării se prezintă procesele de reducere electrochimică a oxigenului și de oxidare a hidrazinei, precum și fenomenele de polarizare ce se manifestă în zona contactului triplu.

Partea a doua are un caracter practic, arătîndu-se rezultatele obținute cu electrozii realizați într-o pilă de combustie cu hidrazină.

Sînt trasate curbele caracteristice potențial/densitate de curent pentru fiecare tip de electrod încercat, precum și curbele de polarizare măsurate cu un electrod de referință din calomel pentru diverse condiții de experimentare.

1. INTRODUCERE

O pilă de combustie este un dispozitiv electrochimic în care energia eliberată dintr-o reacție chimică este direct convertită și deci utilizată sub formă de curent electric.

Lucrările create de conversia energiei, referindu-ne la transformarea directă a energiei chimice în energie electrică, iau în zilele noastre o amploare extraordinară, acoperind atît domenii noi, neexploatate pînă în prezent, cît și pe cele mai vechi, cu randamente mult mai ridicate în comparație cu ale altor generatoare cunoscute.

Evoluția cercetărilor și orientarea lor spre fabricarea unor astfel de surse de energie electrică, în special în ultimii zece ani, în țările cu mare dezvoltare tehnică și industrială a fost determinată de programul cercetărilor cosmice, al înlocuirii tracțiunii auto cu tracțiunea electrică în industria mijloacelor de transport, rezolvînd în același timp și problema poluării atmosferii în mediul urban, precum și a unor probleme speciale care impun o sursă de energie de putere mică, continuă și silențioasă.

Cercetările efectuate în cadrul Institutului de energetică al Academiei R.S. România în domeniul pilelor de combustie sînt orientate spre diverse domenii de realizare a combustiei electrochimice.

În lucrarea de față se studiază performanțele electrochimice obținute pe electrozii realizați prin sintetizarea pulberilor metalice în atmos-

feră reducătoare de hidrogen, folosiţi drept anod într-o pilă de combustie cu hidrazină, catodul fiind un electrod special de argint în teflon.

2. STUDIUL PROCESELOR DE ELECTROD

Dezvoltarea actuală a pilelor de combustie este determinată de performanţele electrozilor, sediul transformărilor electrochimice care intervin la debitarea curentului electric, precum şi de găsirea unor materiale catalitice noi, capabile să înlocuiască metalele nobile, folosite încă pe scară largă în prezent.

Principiul fundamental al unei pile de combustie este următorul: la o pereche de electrozi inatacabili separaţi electrochimic unul de altul cu ajutorul unui electrolit, ionii produc un curent electric fără ca reactanţii să vină în contact direct, combustibilul fiind alimentat continuu la unul dintre electrozi (anodul), unde are loc oxidarea lui prin cedare de electroni, iar la celălalt electrod (catodul), alimentat continuu cu comburaut, aer sau oxigen, are loc ionizarea gazului, respectiv reducerea lui cu acceptare de electroni. Deci la cei doi electrozi, atît timp cît pila debitează curent, are loc un proces de oxidoreducere, asigurat de un conductor exterior care leagă cei doi electrozi, electronii circulînd de la anod spre catod.

Pila debitează curent atît timp cît electrozii sînt alimentaţi cu combustibil, respectiv comburant.

2.1. Reducerea electrochimică a oxigenului

Reducerea electrochimică a oxigenului la temperaturi sub 100°C pe materiale obişnuite este dificilă în comparaţie cu a altor gaze. Acest lucru se datoreşte legăturii puternice 0 = 0 din molecula de oxigen, reducerea neputîndu-se realiza decît pe materiale speciale cu acţiune catalitică pronunţată, apariţia peroxidului de hidrogen fiind o trăsătură caracteristică a procesului de reducere electrochimică a oxigenului.

Reducerea electrochimică a oxigenului şi mecanismele proceselor de electrod au fost detaliat dezvoltate în lucrări anterioare [1] — [4], arătîndu-se că procesul de reducere depinde foarte mult de natura şi de starea suprafeţei electrodului.

Pentru reducerea electrochimică a oxigenului se folosesc electrozii de difuzie gazoasă cu structură poroasă, care asigură realizarea celor trei faze (gaz reactiv — electrolit lichid — electrod solid), situaţie în care este posibilă reacţia de reducere, rezultînd ioni de hidroxid conform următoarei reacţii globale în mediul bazic:

$$O_2 + 2H_2O + 4e \rightarrow 4OH^- \qquad (1)$$

Rolul principal al catalizatorului reacţiei de reducere a oxigenului este de a produce descompunerea rapidă a peroxidului de hidrogen ca fază intermediară:

$$HO_2^- \xrightarrow{\text{catalizator}} OH^- + 1/2\ O_2 \qquad (2)$$

Reacțiile pe electrozii de difuzie gazoasă la nivelul contactului triplu au loc la interfața gaz-electrolit, scheletul poros conductor ușurînd transferul sarcinilor electronice.

Problema reducerii electrochimice a oxigenului, care depinde foarte mult de natura și de starea suprafeței electrodului nu este încă complet elucidată, existînd tendința de a se renunța la electrodul de difuzie gazoasă în zona căruia se manifestă pronunțate efecte de anizotropie cu un alt tip de electrod, „electrodul de emulsie", creat și studiat de B. Warszawski de la firma „Alsthom", care a obținut deja rezultate bune [5].

2.2. Oxidarea electrochimică a hidrazinei

Hidrazina este o sursă ideală de hidrogen activ, dînd densități de curent anodice ridicate la o polarizare mică [6].

Mecanismul de oxidare anodică a hidrazinei diferă, funcție de natura și de structura electrodului și a mediului în care are loc reacția.

Diferiți autori care s-au ocupat de oxidarea electrochimică a hidrazinei indică următoarele mecanisme : Pavela [7] arată că la început hidrazina se adsorbe la suprafața anodică a electrodului și după aceea se descompune în azot și hidrogen.

Cercetări voluminoase au întreprins S. Szpak, P. Stonehardt și T. Katan [8], care arată că oxidarea anodică a hidrazinei ar decurge pe calea unui mecanism cu radicali $N_2H_3^+$ și $N_2H_2^{2+}$ adsorbiți la suprafața electrodului :

$$N_2H_4 \rightleftarrows N_2H_{4ads} \rightleftarrows N_2H_{3ads}^+ + H_{ads} + e \rightleftarrows N_2H_{2ads}^{2+} + 2H_{ads} + 2e. \quad (3)$$

Un mecanism puțin diferit este discutat de B. Baker și M. Kisemberg [7], care au studiat oxidarea hidrazinei pe electrozi platinați. În mediu alcalin ei indică următoarea schemă pentru reacția din compartimentul anodic :

$$N_2H_4 + 4OH^- \rightleftarrows N_2 + 4H_2O + 4e. \quad (4)$$

Electrodul de hidrazină este considerat ca un electrod de hidrogen :

$$N_2H_4 \xrightarrow{Pt} 4H + N_2, \quad (5)$$

$$4H \rightarrow 4H_{ads}, \quad (6)$$

$$H_{ads} + OH^- \rightarrow H_2O + e. \quad (7)$$

Luînd în considerație cele de mai sus, reacția globală din pila hidrazină-oxigen va fi

$$N_2H_{4(hid)} + O_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O. \quad (8)$$

Studii privind mecanismul oxidării electrochimice a hidrazinei se realizează pe aparatură corespunzătoare. Totuşi, din observaţiile practice privind desfăşurarea proceselor de electrod s-a putut constata că la o serie de electrozi încercaţi, introduşi în anolit, aceştia reacţionau imediat cu soluţia, descompunînd hidrazina fără ca circuitul electric al pilei să fie închis, deci la $R = \infty$, iar pe alţi electrozi anolitul nu este descompus, reacţia chimică desfăşurîndu-se numai la închiderea circuitului electric.

Acest lucru indică mecanisme de oxidare diferite, fie prin descompunerea hidrazinei în gaze N_2 şi H_2 prin autocataliză, fie după cel cu radicali liberi, mecanisme care se pot suprapune la închiderea circuitului electric atunci cînd pila debitează curent.

2.3. Polarizarea electrozilor

Ameliorarea performanţelor pilelor de combustie este determinată de mărirea vitezei reacţiilor ce se desfăşoară pe cei doi electrozi, respectiv de performanţele electrozilor, sediul acestor reacţii electrochimice. La închiderea circuitului electric al unei pile de combustie, forţa sa electromotoare scade ca rezultat al fenomenelor de polarizare.

Polarizarea trebuie înţeleasă ca un proces complex, înglobînd totalitatea fenomenelor care fac ca la trecerea curentului electric f.e.m. a pilei sau potenţialele sale de electrod să difere de la valoarea pe care o au în starea de echilibru [9].

Măsurătorile de polarizare sînt fundamentale pentru înţelegerea proceselor electrochimice de la electrozi.

Forma curbelor de polarizare este o funcţie complexă a diferiţilor factori, ca valorile potenţialelor normale a sistemelor de oxidoreducere, de vitezele de difuzie ale reactanţilor şi ale produselor rezultate din reacţia electrochimică, de viteza transferului electronic influenţată de structura electrodului, de concentraţia reactantului în fază omogenă, de fenomenele de adsorbţie şi desorbţie de pe suprafaţa electrodului, de temperatură, de presiunea gazului, de cantitatea şi calitatea catalizatorului, de concentraţia şi conductibilitatea electrolitului etc.

Valorile polarizărilor catodice în toate experimentările sînt mult mai ridicate decît cele anodice, ca o consecinţă a utilizării electrozilor de difuzie gazoasă cu triplu contact drept catozi. Acest lucru reiese clar din analiza curbelor de polarizare anodică şi catodică într-o pilă hidrazină-oxigen (fig. 1).

Se observă că polarizarea catodică este în general de valoarea aproape dublă faţă de cea anodică, catodul fiind un electrod special de argint. Pe electrozii de cărbune vegetal, valoarea polarizării catodice este mult mai ridicată, după cum de altfel se poate observa pe figură, curba reprezentată cu linii întrerupte.

Pentru o bună funcţionare a pilei se indică ca electrozii să fie selectivi numai pentru procesul electrochimic ce se desfăşoară pe ei, reducere sau oxidare. Cum însă în practică majoritatea electrozilor pot realiza ambele procese, bineînţeles în anumite proporţii, se impune o separare a

spațiilor anodice de cele catodice, cu o membrană schimbătoare de ioni, atenuînd astfel efectele polarizării și evitînd un consum suplimentar de reactivi.

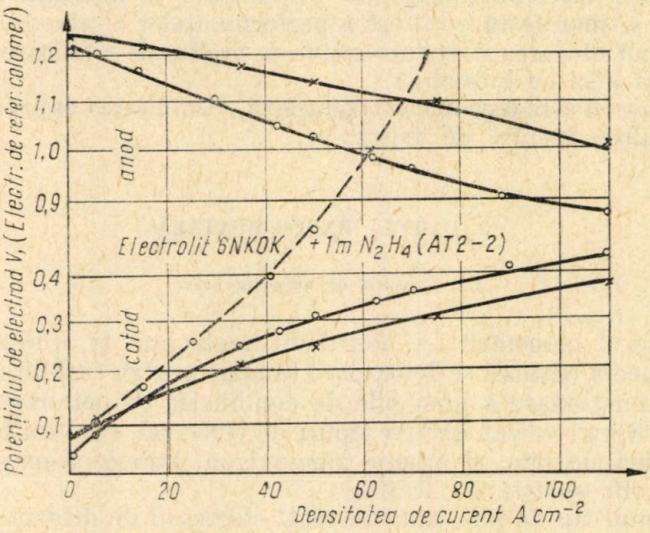


Fig. 1. — Variația potențialelor de electrod cu temperatura la descărcarea unei pile hidrazină-oxigen.

Explicația valorii ridicate a polarizării catodice este următoarea: în primul rînd, reactivitatea oxigenului comparată cu a altor gaze la temperaturi joase este mică, și, în al doilea rînd, însuși această structură poroasă este o soluție de compromis, avînd un caracter limitativ pentru performanțele electrodului.

Cu toată multitudinea și varietatea formelor electrozilor de difuzie gazoasă, caracteristicile sale sînt aceleași.

După cum se știe, vitezele-limită ale celor două procese electrochimice care ne interesează sînt direct proporționale cu concentrația și cu constanta de difuzie a reactanților considerați. Electrolitul trebuie deci să prezinte o concentrație și o conductibilitate optimă pentru a asigura densitatea de curent dorită.

Din cele de mai sus se poate deduce ușor că alimentarea cu oxigen a catodului la presiune mică trebuie să fie astfel aleasă încît difuziunea sa la electrod să permită schimbul ionic în zona reacțională. Variațiile de presiune din timpul funcționării pilei trebuie complet evitate, astfel zona reacțională se deplasează putînd produce înecarea electrodului, ceea ce conduce la o scădere a performanțelor lui prin mărirea polarizării catodice.

Dacă notăm cu P_g presiunea gazului, cu P_k presiunea capilară și cu P_h presiunea hidrostatică a electrolitului, va trebui să avem în timpul funcționării pilei permanent condiția [10]

$$P_g \geqslant P_k + P_h. \tag{9}$$

Anozii folosiţi la pilele cu combustibil dizolvat sînt mai simpli, nu trebuie să aibă această structură poroasă dificilă, combustibilul fiind lichid şi deci valorile polarizărilor anodice fiind mult mai mici datorită şi reactivităţii electrochimice mai pronunţată a hidrazinei. Totuşi, şi în acest caz se manifestă o cădere a performanţelor electrodului, una dintre cauze fiind blocarea centrilor activi cu produsele rezultate din reacţie, azot în cazul pilei cu hidrazină.

Polarizarea este o problemă complexă, diminuarea ei putînd constitui obiectul multor lucrări de viitor.

3. PARTEA EXPERIMENTALĂ

3.1. Condiţii de experimentare

Obiectivul cercetării l-a constituit realizarea şi studierea electrozilor de reducere (catozi) şi de oxidare (anozi) pentru stabilirea condiţiilor optime de funcţionare a unei pile de combustie cu combustibil dizolvat (hidrazină). S-au realizat diverse tipuri de electrozi, care au fost încercaţi în două tipuri de pile, şi anume zinc-oxigen, hidrazină-oxigen, folosind drept electrolit soluţie de KOH.

În primul tip de pilă sînt încercaţi electrozii de difuzie din cărbune vegetal activ, cu un anod solubil de zinc, într-o celulă fără diafragmă. În cealaltă pilă se utilizează o diafragmă pentru separarea anolitului de-

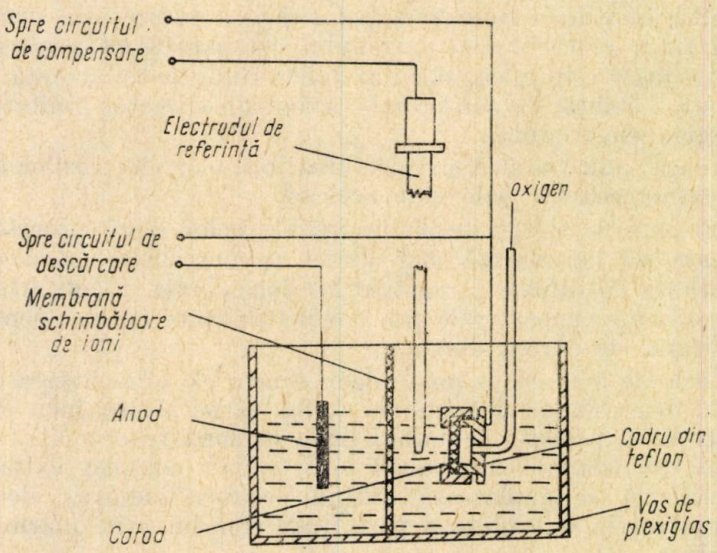


Fig. 2. — Celula de măsură.

catolit pentru evitarea măririi polarizării şi a unui consum suplimentar de hidrazină, electrozii nefiind selectivi numai pentru reacţia electrochimică ce se desfăşoară pe ei. În figura 2 se arată construcţia celulei de măsură.

În toate măsurătorile pentru trasarea curbei caracteristice potențial/densitate de curent s-a utilizat ca electrod de referință un electrod de calomel saturat.

Pentru electrozii de difuzie gazoasă s-a urmărit o activare suplimentară în diverse atmosfere controlate, ca vapori de apă, amoniac, bioxid de carbon, amestec de vapori de apă și bioxid de carbon, metan și vapori de apă, azot și hidrogen într-o instalație de laborator la temperaturi cuprinse între 450 și 1200°C. Rezultatele obținute sînt arătate în lucrările [3], [4].

Electrozii de formă rotundă ∅ 20—22 mm, avînd grosimea de aproximativ 3 mm, sînt fixați într-un cadru de teflon, constituind semicelula de măsură, așa cum se observă în figura 2, o parte fiind în contact cu oxigenul, cealaltă cu electrolitul alcalin, care este o soluție de KOH al cărei concentrație variază în funcție de condițiile de experimentare.

S-a mai încercat un electrod de difuzie gazoasă numai pe bază de argint și care a constituit baza măsurătorilor din pilele de combustie studiate, cu o polarizare mult mai mică comparată cu a electrozilor de difuzie din cărbune vegetal. Anozii studiați, deși nu sînt electrozi de difuzie gazoasă, combustibilul fiind lichid, s-au obținut prin sinterizarea pulberilor metalice la diverse temperaturi în atmosferă de hidrogen controlată.

Măsurătorile de potențial au fost executate folosind o tehnică staționară directă, metoda amperostatică.

Oxigenul este asigurat din butelii de oxigen cu aparatura corespunzătoare măsurătorilor de presiune. Presiunea oxigenului este reglată cu un robinet cu ac micrometric, asigurînd în compartimentul de gaz o presiune mică cuprinsă între 40 și 300 mmcol. apă, respectiv 3,0 — 22,8 torr, presiune la care nu se atinge efectul de barbotare.

Majoritatea măsurătorilor s-au efectuat la 20°C și la temperaturi mai ridicate, menținute cu un termostat universal tip U-10. La baza tuturor încercărilor s-a stabilit ca limită de descărcare forța electromotoare minimă (tensiunea pilei) să nu scadă cub 600 mV cînd pila debitează curent. Această valoare reprezintă circa jumătate din valoarea inițială a f.e.m. în circuitul deschis cînd $R = \infty$, regimul de descărcare fiind același pentru toate măsurătorile executate.

3.2. Obținerea anozilor

Și în cazul obținerii anozilor s-a mers pe ideea folosirii cărbunelui activ ca suport, în care se încorporează diverse metale cu activitate catalitică pronunțată : argint, cobalt, nichel.

Se încearcă și electrozi sinterizați numai din pulberi metalice simple, cobalt, nichel, argint, fie în amestec de pulberi metalice în proporții diferite cu liant organic și un reducător puternic adăugați la operația de presare, fie numai din pulberi simple.

Temperatura de sinterizare variază între 850 și 1 200°C, tratamentul executîndu-se numai în atmosferă reducătoare de hidrogen controlată.

Se realizează și un electrod tratat în atmosferă de hidrogen la 300°C din pulbere de argint și cobalt în proporții egale A-72-2, care a dat

rezultate foarte bune la măsurători atît în pila cu hidrazină, cît şi într-o pilă cu metanol.

S-au realizat şi anozi din pulberi de zirconiu, vanadiu, titan şi crom în diverse proporţii cu cărbunele activ, cu performanţe slabe însă, de ordinul 10—15 mA/cm^2.

Rezultate bune s-au obţinut cu un electrod de cărbune activ cu pulbere de argint tratat în atmosferă reducătoare de hidrogen la 900°C, cu şi fără adaus de liant şi reducător organic. Rezultatele acestor electrozi, A-77-1 şi A-77-2, sînt redate în curbele din figura 7, unde se evidenţiază calităţile mult superioare a electrodului cu liant organic A-77-2.

Dintre toţi anozii obţinuţi şi studiaţi, cei cu pulberi de cobalt în general au dat rezultatele cele mai bune, precum se va vedea din analiza curbelor caracteristice potenţial/densitate de curent.

3.3. Rezultate obţinute

Măsurătorile sînt executate pe un număr foarte mare de electrozi, iar rezultatele de mai jos sînt numai pentru o parte din electrozii cei mai reprezentativi.

Toate măsurătorile au fost efectuate respectînd condiţia ca descărcarea pilei să nu coboare sub o anumită limită a tensiunii pilei, sub care fenomenele de polarizare pot lua valori foarte mari, reducîndu-i performanţele, aşa cum se poate vedea din reprezentarea generală a descărcării unei pile, redată în figura 3.

Din analiza acestei curbe reiese în mod clar că zona utilă de lucru este zona *B* (haşurată). Folosirea electrozilor de cărbune vegetal activ ca anozi într-o pilă de combustie cu hidrazină fără nici un fel de tratament de activare a dat rezultate slabe, densităţile de curent obţinute nedepăşind valoarea de 10 mA/cm^2.

Cărbunele activ amestecat însă cu diferite pulberi metalice active sau impregnat cu soluţiile respective şi apoi reduse la temperatură ridicată în atmosferă reducătoare fac ca performanţele obţinute pe aceşti electrozi să crească de peste 10 ori în diferite condiţii de experimentare.

Drept electrolit s-a utilizat soluţii de KOH 6N, combustibilul fiind hidratul de hidrazină $N_2H_4 - H_2O$ în concentraţii diferite.

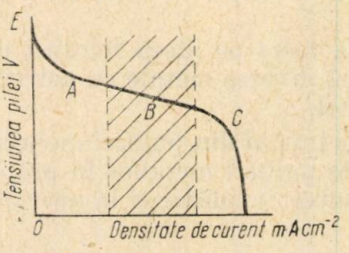


Fig. 3. — Forma tipic generală de descărcare a unei pile de combustie : *Zona A* — curenţi mici, polarizare influenţată de efectele de transfer electronic şi catalitic ; *Zona B* — curenţi de valoare medie, polarizare influenţată de difuzia ionilor, zonă utilă de lucru ; *Zona C* — curenţi mari, cădere mare la tensiunii pilei, polarizare influenţată de difuzia moleculară.

Folosind un catod special de argint şi un anod de cărbune activ drept suport tratat la 850°C în atmosferă reducătoare de hidrogen cu diverse pulberi metalice în aceeaşi proporţie (33,33% în greutate), s-au obţi-

nut rezultatele arătate în figura 4 într-un electrolit $6NKOH+1mN_2H_4\cdot H_2O$ la 20°C, curbele continue fiind trasate la 45°C.

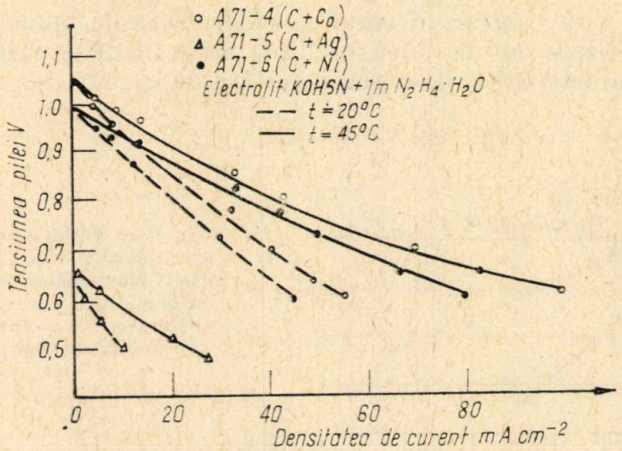


Fig. 4. — Variația tensiunii pilei hidrazină-oxigen cu densitatea de curent la diverse temperaturi pentru anozii din amestec de cărbune activ cu pulberi metalice, catodul fiind același (TA—1).

Evident că din analiza curbelor de descărcare rezultatele cele mai slabe sînt date de electrozii cu pulbere de argint, iar cele mai bune de electrozii cu pulbere de cobalt.

La electrozii de cărbune activ în general constatăm că există o tendință de scădere a performanțelor la determinările ulterioare față de cea inițială, așa cum se poate constata din figura 5.

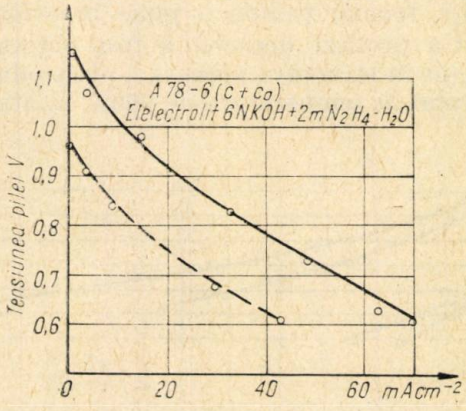


Fig. 5. — Curbele de descărcare a unei pile hidrazină-oxigen efectuate în aceleași condiții, curba continuă fiind măsurătoarea inițială, cea întreruptă după un ciclu de măsurători.

Această comportare se explică prin pătrunderea electrolitului în structura poroasă a cărbunelui activ și fixarea azotului rezultat din reacția de descompunere a hidrazinei pe suprafața electrodului și în porii acestuia, blocînd centrii activi ai catalizatorului, micșorînd suprafața activă a electrodului. Această măsurătoare s-a făcut pe anodul

A-78-6 (C + Co) tratat la 900°C în atmosferă de hidrogen, măsurătoarea efectuîndu-se la temperatura de 20°C, curba plină fiind măsurătoarea inițială.

Efectul este contrar în cazul anozilor obținuți numai din pulberi metalice sinterizate sau din amestecul lor. Acest lucru se poate ușor vedea din analiza caracteristicii potențial/densitate de curent (fig. 6) pentru un

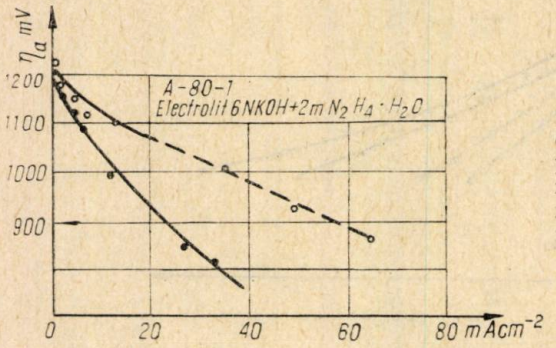


Fig. 6. — Variația potențialului de electrod al anodului la descărcarea pilei hidrazină-oxigen la temperatura de 20°C, curba continuă fiind măsurătoarea inițială, cea întreruptă după un ciclu de măsurători.

anod A-80-1 sinterizat din pulbere de cobalt la 1 200°C, măsurat la 20°C‘ electrolit 6NKOH + $2mN_2H_4.H_2O$.

Acest efect de creștere a performanțelor anozilor obținuți din pulberi metalice sinterizate, asemănător celui de formare a acumulatoarelor în general, se poate explica prin reducerea la prima măsurătoare a oxizilor metalici de pe suprafața electrodului ce se formează la temperaturi ridicate de sinterizare, cu toată atmosfera reducătoare protectoare asigurată pe timpul acestor tratamente. Și într-un caz, și în celălalt, valoarea cea mai ridicată a variației polarizării măsurate este cea de activare, deoarece la repetarea determinărilor condițiile de experimentare rămîn aceleași, tocmai pentru a pune în evidență acest efect.

Un rezultat deosebit a fost obținut prin dispersarea unei pulberi de argint în structura poroasă a electrodului de cărbune cu un liant organic, tratat la temperatura de 900°C în atmosferă reducătoare de hidrogen.

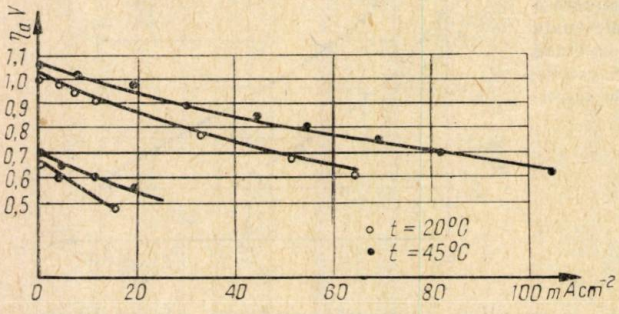


Fig. 7. — Curbele de descărcare comparative pentru A-77-1 (fără liant organic) și A-77-2 (cu liant organic), ridicate la temperaturile de 20 și 45°C.

Acest rezultat este ilustrat în curbele din figura 7 pentru aceeași compoziție de pastă pentru electrozi în care la un electrod se adaugă înainte de operația de presare liantul organic, celălalt rămînînd la compoziția inițială.

Se constată că performanţele electrodului cresc foarte mult, raportate la tensiunea finală de descărcare a pilei de 600 mV, la electrodul cu liant organic faţă de cel fără liant. Performanţele electrodului fără liant organic sînt în perfectă concordanţă cu cele obţinute pe un electrod de compoziţie apropiată A-71-5, a cărui curbă caracteristică este arătată în figura 4.

Măsurătoarea comparativă a fost executată la temperatura de 20°C în electrolit 6NKOH + $3m N_2H_4 . H_2O$ cu acelaşi catod. Curba trasată pe aceeaşi diagramă la temperatura de 45°C arată că acest electrod la temperatură relativ coborîtă poate furniza densităţi de curent ce depăşesc 100 mA/cm².

De remarcat că tensiunea finală a pilei în circuit deschis după descărcarea ei este ceva mai mare decît tensiunea iniţială, aşa cum se poate observa din tabela 1.

Tabela 1

Compoziţia electrolitului	Electrodul	Temperatura °C	Tensiunea pilei în circuit deschis, V	
			iniţială	finală
6NKOH+1*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	A-77-2	20	0,98	1,00
6NKOH+2*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	20	1,07	1,08
6NKOH+3*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	20	1,01	1,04
6NKOH+4*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	20	1,05	1,06
6NKOH+1*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	30	1,05	1,08
6NKOH+1*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	45	1,055	1,07
9NKOH+2*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	20	1,09	1,09
12NKOH+2*m* $N_2H_4 \cdot H_2O$	"	20	1,11	1,12

Datele din tabelă scot în evidenţă că atît polarizările anodice, cît şi cele catodice au valori care nu diminuează performanţele electrozilor, astfel că la întrerupere tensiunea revine imediat la valoarea iniţială, dînd în acelaşi timp şi o indicaţie preţioasă asupra naturii polarizării.

În acest caz, polarizarea este determinată de polarizarea de concentraţie şi datorită rezistenţei ohmice, cea de activare avînd o valoare extrem de mică.

Comparate însă performanţele celor doi electrozi trataţi la aceeaşi temperatură şi măsuraţi în aceleaşi condiţii, reducerea pronunţată a performanţelor electrodului fără liant organic este atribuită polarizării de activare.

În stabilirea performanţelor anozilor realizaţi, calitatea catozilor contează foarte mult, aşa cum se poate vedea din analiza diagramelor reprezentate în figurile 8 şi 9.

Curbele din figura 8 arată că pe acelaşi electrod A-71-6 (carbon + + nichel), tratat la temperatura de 850°C în atmosferă reducătoare de hidrogen, se obţin rezultate mult diferite funcţie de catodul cu care-l măsurăm. Rezultatele diferă mult de la un catod la altul, deşi condiţiile de măsurare sînt identice, respectiv 6NKOH + 1m $N_2H_4 \cdot H_2O$ la tem-

peratura de 20°C. Catodul P_{30} se polarizează puternic chiar pentru valori scăzute ale densităţii de curent.

În figura 9 se constată o serioasă reducere a performanţelor pilei din cauza polarizării iniţiale ridicate a catodului de la — 28 la — 225 mV,

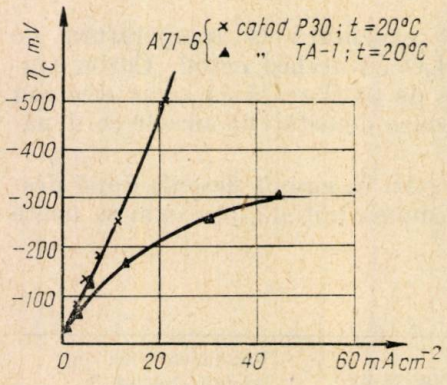


Fig. 8. — Influenţa calităţii catodului asupra caracteristicii potenţial densitate de curent la descărcarea unei pile hidrazină-oxigen în electrolit alcalin.

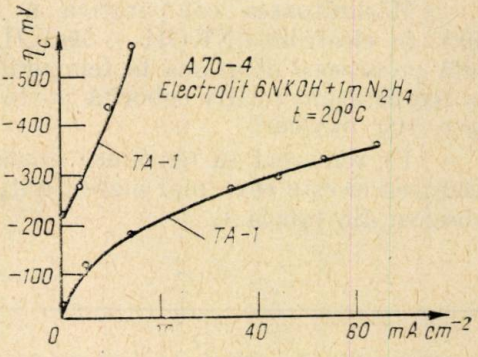


Fig. 9. — Influenţa polarizării iniţiale a catodului asupra caracteristicii potenţial/densitate de curent.

cînd curentul debitat de pilă se reduce de la 44 la 16 mA/cm², deşi condiţiile de măsurare sînt aceleaşi (concentraţia electrolitului, temperatura, presiunea oxigenului, regimul de descărcare).

Această limitare catodică a performanţelor pilei prin manifestarea fenomenelor de polarizare ridicată impun condiţia ca în cazul măsurătorilor de test pentru un anumit tip de electrod celălalt să aibă o valoare a capacităţii de cel puţin de două ori mai mare pentru a fi sigur că măsurătorile efectuate includ performanţa maximă care poate fi obţinută pe electrodul respectiv.

Se studiază apoi efectul depunerii metalelor nobile asupra performanţelor anozilor prin depuneri electrolitice de platină şi paladiu. Nu se constantă o ridicare a performanţelor peste limitele măsurate anterior pe aceiaşi electrozi fără depuneri de metale catalitice în afară de electrozii de cărbune activ, care nu dau rezultate prea ridicate, sub performanţa electrozilor obţinuţi din pulberi metalice obişnuite, fie singure, fie în amestec, aşa cum se poate constata din figura 10.

Se constată că polarizările anodice sînt mici comparate cu cele catodice, dovadă că ar putea interveni o limitare catodică a performanţelor după valorile ridicate ale polarizării catodice măsurate iniţial, cînd circuitul electric este deschis. De asemenea se constată că depunerile de paladiu în pila cu hidrazină dă rezultate mai bune decît cele de platină.

Variaţia polarizării anodice funcţie de concentraţia combustibilului în electrolit este arătată în diagramele din figura 11.

Se constată că polarizarea anodică este mai ridicată pentru o concentraţie mai mică de combustibil în electrolit, însă la aceste concentraţii

mici de combustibil conductibilitatea electrică a electrolitului este mai mare și deci performanțele pilei pînă la limita minimă a tensiunii de descărcare a pilei sînt mai ridicate.

Concentrația electrolitului are o influență asupra performanțelor electrozilor prin variația pH-ului soluției, determinînd o mărire sau o scădere a polarizării globale, respectiv a tensiunii pilei în circuit închis. Acest lucru se poate constata ușor prin analiza curbelor reprezentate în figura 12.

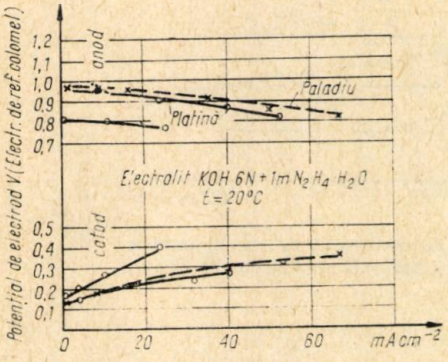


Fig. 10. — Variația potențialelor de electrod catodice și anodice în cazul depunerilor electrolitice de platină și paladiu la descărcarea unei pile hidrazină/oxigen în mediu alcalin.

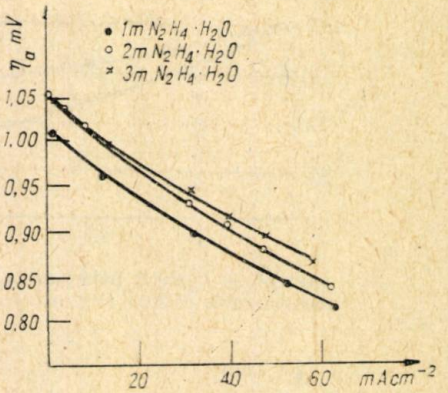


Fig. 11. — Variația potențialului de electrod al anodului cu densitatea de curent pentru diverse concentrații de hidrazină în electrolit.

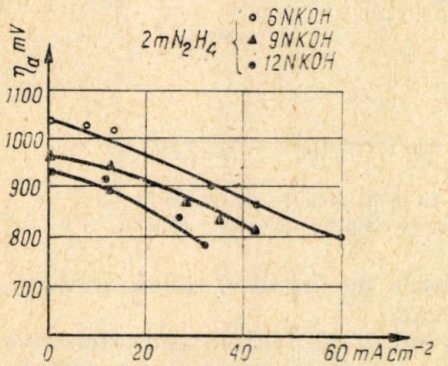


Fig. 12. — Caracteristica potențial/densitate de curent funcție de concentrația electrolitului pentru aceeași concentrație de hidrazină.

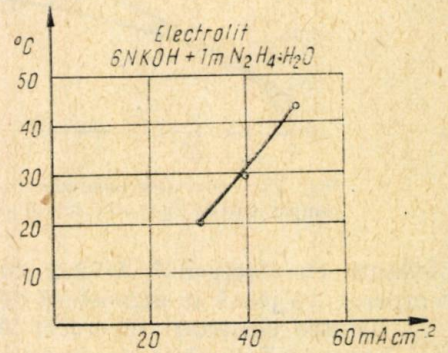


Fig. 13. — Influența temperaturii asupra densității de curent pentru aceeași concentrație a electrolitului și combustibilului măsurată pentru o polarizare anodică de 115 mV.

Din analiza curbelor din figura 12 pentru un electrod A-78-4 (C + Co) măsurat la 20°C în electrolit de concentrație diferită, concentrația combustibilului fiind aceeași, se constată că polarizarea variază direct proporțional cu concentrația electrolitului, fiind mai mică pentru soluții mai diluate și mai mare pentru soluții mai concentrate, raportată la aceeași densitate de curent.

Influenţa temperaturii asupra densităţii de curent se poate constata uşor din analiza curbelor din figurile 13—15.

Coeficientul de temperatură are o valoare pozitivă, variind de la 0,8 mA/°C (fig. 13) pînă la 3,5 mA/°C (fig. 14,15), aceasta depinzînd de tipul de electrod încercat. Rezultatele bune din ultimele două figuri sînt

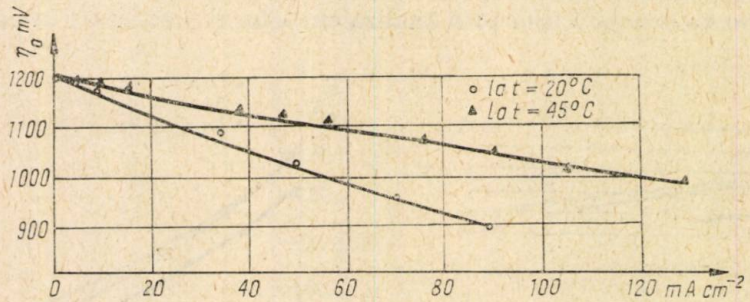


Fig. 14. — Variaţia polarizării anodice cu dentitatea de curent pentru temperaturile de 20 şi 45°C într-o pilă hidrazină-oxigen cu electrolit alcalin.

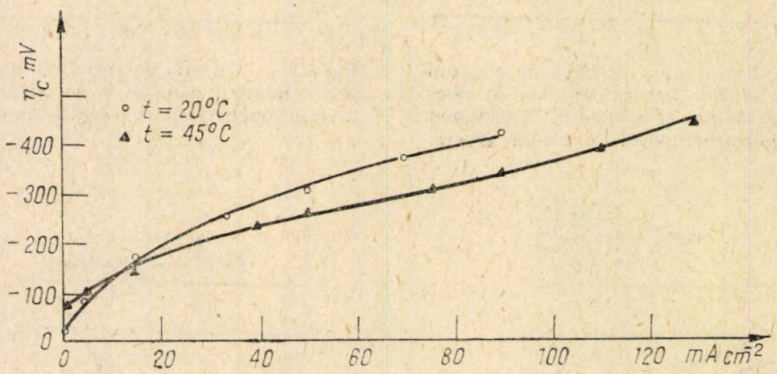


Fig. 15. — Variaţia polarizării catodice cu densitatea de curent pentru temperaturi de 20 şi 45°C într-o pilă hidrazină-oxigen cu electrolit alcalin.

obţinute cu electrodul A-72-2 din pulbere de argint şi cobalt tratat la temperatură joasă în atmosferă de hidrogen.

Dintre electrozii încercaţi în pila hidrazină-oxigen, rezultatele cele mai bune au fost obţinute cu pulberea de cobalt, sintetizată atît singură, cît şi în amestec cu alte pulberi metalice.

4. CONCLUZII

Din analiza rezultatelor obţinute se desprind următoarele concluzii.

Catozii realizaţi din cărbuni vegetali activi dau valori ridicate ale polarizării, diminuînd performanţele pilei chiar în cazul măririi acestei activităţi prin includerea în compoziţia lor a diferitelor metale cu acţiune catalitică pronunţată.

Rezultate bune s-au obținut pe catodul special de argint în teflon TA-1, rezultate care mai pot fi încă îmbunătățite prin perfecționări tehnologice.

În privința anozilor, rezultatele cele mai bune se obțin cu anozii pe bază de pulbere de cobalt.

Rezultate interesante s-au obținut cu un electrod de cărbune activ cu pulbere de argint și liant organic, a cărui cercetare va fi extinsă în viitor.

Concentrația optimă a anolitului este de 26—30% hidroxid de potasiu și 2—5% hidrat de hidrazină.

Performanțele pilei cresc prin ridicarea temperaturii de funcționare, coeficientul de temperatură avînd o valoare pozitivă ridicată pentru tipurile de electrozi realizate.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Marinescu, Șt. Doboș. I. Minea, *Procese de reducere catalitică a oxigenului în pila de combustie pe suport de cărbuni special tratați*, St. cerc. energ. electr., **19**, *2*, 427 (1969).
2. M. Marinescu, Șt. Doboș, *Studiul cărbunelui vegetal activat folosit drept electrod într-o pilă de combustie*, memoriu, 1968, Institutul de energetică.
3. M. Marinesco, Șt. Doboș, *L'activation supplementaire des electrodes en charbon vegetal pour piles à combustible*, Troisièmes Journées internationales d'étude des piles à combustible, Bruxelles, iunie 1969, p. 66.
4. M. Marinescu, Șt. Doboș, *Pile de combustie cu combustibil dizolvat în metanol și hidrazină*, memoriu, 1969, Institutul de energetică.
5. A. B. Hart, G. J. Womack, *Fuel Cells-Theory and application*, Londra, Chapmann and Hall, Ltd., 1967.
6. B. Warszawski, R. G.E., **78**, *5*, 531 (1969).
7. K. Schwabe, E. Wiedner, *Untersuchungen zur anodischen Oxydation von Hydrazin an Kohleelektroden*, Deuxièmes Journées internationales d'étude des piles à combustible, Bruxelles, iunie 1967, p. 292.
8. S. Szpak, P. Stonehardt, T. Katan, Electrochimim. Acta, *6*, 563 (1965).
9. I. Atanasiu, G. Facsko, *Electrochimie*, București, Edit. tehnică, 1958.
10. H. G. Plust, *Automobiltechnische Zeitschrift*, *6*, 175 (1967).

J. L. MELSA, *Computer programs for computational assistance in the study of linear control theory* (Programe în sprijinul calculului în studiul teoriei reglării automate lineare), Mc Graw Hill Book Co., 1970, 129 p.

Cartea profesorului Melsa are ca scop inițierea celor interesați în teoria sistemelor liniare și în utilizarea calculatorului numeric pentru rezolvarea practică a unor probleme specifice acestui domeniu.

Cele opt programe complete, scrise în FULL FORTRAN, pot forma un supliment prețios la un curs general de teorie a sistemelor și în același timp un instrument de calcul pentru analiza, sinteza și simularea unor clase largi de probleme de reglare automată liniare, deosebit de util inginerului automatist. Pentru parcurgerea lucrării sînt necesare numai cunoștințe reduse de programare în FORTRAN și noțiunile de bază ale teoriei reglării automate.

Materialul prezentat în lucrare este organizat în patru capitole și o anexă. Capitolul introductiv familiarizează cititorul cu noțiunile folosite și problemele ce vor fi tratate. Notațiile și formularea problemelor coincid cu cele întrebuințate în lucrarea *Linear control systems* a aceluiași autor.

Capitolul 2 prezintă cinci programe principale pentru un sistem liniar descris cu ajutorul variabilei de stare. Programul BASMAT (*basic matrix*) permite calculul determinantului unei matrice, inversa matricei, polinomul caracteristic, valorile proprii și vectorii proprii ai matricei, precum și matricea de tranziție. Programele RTRESP (*rational time response*) și GTRESP (*graphical time response*) conduc la calcularea și la înregistrarea răspunsului în timp al sistemului în circuit închis sau deschis la o funcție de intrare scalară arbitrară, sistemul trebuind să aibă valori distincte. Alt program, SENSIT (*sensitivity analysis*), urmărește analiza deplasării polilor sistemului în circuit închis în raport cu unele variații intervenite în sistem. Capitolul se încheie cu programul STVARFDBK (*state variable feedback*), care servește la determinarea funcției de transfer a sistemului în circuit deschis sau închis și, în plus, se pretează la proiectarea sistemului în circuit închis, căruia i s-au impus anumite condiții funcției de transfer în circuit închis.

În capitolul 3 se presupune sistemul liniar invariant dat prin funcția de transfer. Programul FRESP (*frequency response*) permite să obținem răspunsul la frecvență al sistemului liniar descris printr-o funcție de transfer rațională ; se obține atît diagrama Bode, cît și locul Nyquist. Locul rădăcinilor este pus în evidență prin programul RTLOC (*root locus*), care completează astfel studiul sensibilității sistemelor liniare tratat anterior. Programul PRFEXP (*partial fraction expansion*) are ca scop dezvoltarea în fracții elementare a unei funcții de transfer raționale cu poli complecși simpli. Capitolul 4 este destinat examinării subprogramelor care realizează reprezentarea grafică a rezultatelor în diverse modalități : reprezentări $x-y$, $x-t$, log—log și semilog.

Toate programele sînt date complet în anexă. Un tabel general permite identificarea rapidă a tuturor programelor și subprogramelor prezentate. Toate paragrafele lucrării cuprind

explicații detaliate asupra principiilor care au stat la baza scrierii programelor și a subprogramelor, urmate de numeroase exemple numerice foarte bine alese. Desigur putem regreta faptul că tematica lucrării se mărginește numai la programe pentru sisteme liniare invariante simple, autorul propunîndu-și îmbogățirea tematicei la o ediție viitoare.

Materialul prezentat este rodul unei vaste experiențe a autorului și a colaboratorilor săi în rezolvarea a nenumărate probleme practice, ceea ce îi conferă lucrării un interes mărit. Fără îndoială, putem afirma că ne găsim în fața unei lucrări valoroase, de un real folos în aplicarea tenhnicilor de calcul numerice în studiul sistemelor liniare.

L. Lupaș

I.S. GHEORGHIU și AL.S. FRANSUA, *Tratat de mașini electrice*, vol. II, *Transformatoare*, București, Edit. Academiei, 1970, 464 p., 296 fig., 25 ref. bibl.

În continuarea preocupărilor pentru alcătuirea unui tratat de mașini electrice în țara noastră, autorii publică volumul al II-lea, intitulat *Transformatoare*. Se abordează studiul transformatoarelor electrice și al unor aparate electromagnetice statice de putere, al căror principiu de funcționare se bazează pe caracteristicile neliniare ale materialelor feromagnetice. După o scurtă introducere privitoare la istoricul apariției și dezvoltării construcției de transformatoare, sînt prezentate cele 26 de capitole ale lucrării.

În primul capitol sînt prezentate elementele constructive de bază ale tranformatoarelor : miezul magnetic, înfășurările, izolația și tipurile constructive de transformatoare. Numeroasele figuri cuprinse în lucrare contribuie la înțelegerea completă a celor prezentate.

În capitolele 2 și 3 autorii se ocupă de teoria fizică și teoria tehnică a transformatorului monofazat. Prezentarea foarte clară și detaliată a celor două moduri de abordare teoretică a funcționării transformatorului conduce la o deplină înțelegere a acestora. Sînt deduse ecuațiile și schemele echivalente în cele două cazuri.

Capitolul 4 analizează transmisia energiei în transformatoare și bilanțul de puteri instantanee. Analiza este efectuată pornind direct de la legile cîmpului electromagnetic.

Construcția diagramelor și predeterminarea caracteristicilor de funcționare ale tranformatoarelor fac obiectul capitolului 5.

În următoarele două capitole sînt prezentate particularitățile teoretice ale transformatoarelor trifazate cu miezul compact și conexiunile transformatoarelor trifazate. În text sînt introduse tabele cuprinzînd grupele, clasele și schemele de conexiuni, indicații privind domeniile de aplicare ale diferitelor conexiuni și pentru verificarea grupelor de conexiuni.

În capitolele 8 și 9 autorii tratează probleme privind calculul circuitului magnetic, regimul deformant (nesinusoidal) produs la magnetizarea fierului și încărcarea nesimetrică a transformatorului trifazat. Dezvoltarea teoretică a acestor probleme în cadrul volumului reflectă importanța lor practică deosebită în funcționarea transformatoarelor.

Regimurile tranzitorii ale transformatorului sînt studiate în capitolul 10. Se arată cauzele apariției fenomenelor electromagnetice și electromecanice tranzitorii și se descriu amănunțit cîteva regimuri tranzitorii caracteristice care intervin în funcționarea transformatoarelor.

În următoarele trei capitole se prezintă date importante pentru proiectarea transformatoarelor privitoare la calculul parametrilor înfășurărilor, forțele electrodinamice și reglarea tensiunii.

În capitolul 14 sînt expuse probleme legate de funcționarea în paralel a transformatoarelor electrice. Sînt analizate pe larg cerințele impuse în asemenea situații și modul de realizare a acestora.

Capitolele 15—17 cuprind încercările transformatoarelor, determinarea pierderilor și a randamentului și probleme privind încălzirea și răcirea transformatoarelor. În continuare se stabilesc relații pentru calculul dimensiunilor principale ale transformatoarelor și relații importante pentru calculele de proiectare. Acestea, împreună cu cele indicate în capitolele anterioare, oferă posibilitatea efectuării calculului complet de proiectare a unui transformator.

În următoarele capitole se prezintă transformatoarele speciale și cîteva aparate electromagnetice statice de putere a căror funcționare se bazează pe caracteristicile neliniare ale materialelor feromagnetice. Astfel, capitolele 19 și 20 cuprind probleme referitoare la transformatorul cu trei înfășurări și cu autotransformator. Sînt prezentate problemele specifice care apar în construcția și utilizarea acestor transformatoare.

Următorul capitol se referă la transformatoarele pentru instalații de redresare. Necesitatea introducerii acestui capitol a fost urmarea folosirii pe scară din ce în ce mai largă a instalațiilor de redresare, în special în ultima vreme a celor cu semiconductoare, ca surse de curent continuu. Autorii acordă o atenție deosebită problemelor specifice ridicate de calculul și de utilizarea acestor transformatoare. Sînt luate în studiu unele scheme de instalații de redresare dintre cele mai curente, stabilindu-se variațiile în timp ale curenților primari și secundari și ale tensiunii redresate. La fiecare dintre scheme sînt calculate valorile efective ale curenților și puterile aparente primară și secundară, determinîndu-se puterea de calcul a transformatorului.

În capitolul 22 autorii tratează despre transformatoarele de măsură de tensiune și de curent, prezentînd particularitățile funcționale și constructive ale acestora.

În capitolul 23 se studiază transformatoarele stabilizatoare de tensiune, care constituie o grupă importantă a stabilizatoarelor parametrice. Se descriu trei asemenea tipuri : fără condensatoare, cu ferorezonanță și cu premagnetizare în curent continuu.

În ultima vreme, în literatura de specialitate privitoare la sistemele automate s-au încetățenit denumiri ca : bobină saturabilă, transductor, reactor cu premagnetizare, amplificator magnetic, amplistat etc. pentru un nou tip de dispozitiv de reglare, de amplificator de putere, bazat pe neliniaritatea caracteristicii de magnetizare a materialelor feromagnetice. Principiile de funcționare, forma constructivă a acestora și caracteristicile de funcționare sînt prezentate în capitolul 24.

Următorul capitol are ca obiect de studiu transformatoarele de frecvență. Acestea realizează multiplicarea frevenței rețelei de alimentare în condiții avantajoase față de alte tipuri de multiplicatoare de frecvență, ceea ce se subliniază și în volum. Sînt descrise principiul de funcționare, schemele curente și performanțele transformatoarelor de frecvență cu ordinul de multiplicare 2,3 și 5.

Un ultim capitol cuprinde alte tipuri de transformatoare întîlnite în practică, și anume pentru realizarea de tensiuni bifazate, încercări de înaltă tensiune, sudură, cuptoare electrice, utilizări la tensiuni joase de lucru, transformatoare cu înfășurarea din folie de aluminiu.

Bibliografia indicată la sfîrșitul volumului cuprinde cele mai importante lucrări de specialitate din acest domeniu apărute în literatura mondială.

Lucrarea prezintă într-un mod unitar problemele transformatoarelor electrice, multe dintre ele constituind contribuții originale ale autorilor.

Aurel Dobraniș

C. PENESCU, VL. IONESCU și EL. ROSINGER, *Procese optimale*, București, Edit. Academiei, 1970, 329 p.

Problemele de optimizare sînt de mare importanță aproape în toate domeniile de cercetare teoretică și aplicativă, astfel încît o clarificare și o fundamentare parțială a unor aspecte este pe deplin așteptată. Lucrarea colectivului de autori condus de prof. C. Penescu are scopul de a fundamenta din punct de vedere matematic conducerea optimală a proceselor, avînd în vedere cele mai recente rezultate din domeniul teoriei sistemelor optimale.

Lucrarea se adresează tuturor celor interesați în studiul automaticii teoretice, fiind un studiu de nivel superior. Se recomandă în special doctoranzilor, inginerilor automatiști și matematicienilor care lucrează nemijlocit în domeniul teoriei și al aplicațiilor sistemelor optimale, al aspectelor esențiale legate de optimalitate. Se presupune din partea cititorilor o cunoaștere a unui curs general de teorie a sistemelor precum și a noțiunilor de bază de analiză funcțională și de ecuații diferențiale.

Lucrarea este împărțită în opt capitole.

Capitolul I cuprinde o prezentare succintă, dar riguroasă, a noțiunilor de sistem, stare, controlabilitate, adaptabilitate și optimalitate. Pentru noțiunile de sistem și stare s-au folosit conceptele introduse de Zadeh și Desoer, iar pentru celelalte noțiuni s-au dat definiții originale.

Capitolul II face o prezentare detaliată a principiului maximului a lui L.S. Pontreaghin, cu toate aspectele acestuia atît pentru sisteme continue, cît și pentru sisteme discrete. Demonstrația principiului maximului continuu se bazează pe principiul generalizat al multiplicatorilor, elaborat de M. Hestenes; în același timp se face legătura cu procedeele variaționale clasice. Se tratează în detaliu principiul general al separabilității, principiul maximului continuu pentru extreme fixe și mobile cu timp final liber sau fixat, principiul maximului continuu pentru sisteme cu condiții restrictive de tip inegalitate. În încheierea capitolului se dă o demonstrație originală a principiului maximului discret pentru sisteme fără restricții a stării.

În capitolul III se prezintă teorema de necesitate și teorema de suficiență derivate din formalismul Hamilton-Jacobi. Se indică dezavantajele utilizării teoremei de suficiență; condițiile de suficiență implică ipoteze de analicitate tari, care pot fi evitate prin metoda sintezei regulate, datorată lui V. Bolteanski. Ca o consecință se demonstrează în ipoteze simplificatoare principiul maximului continuu. Apoi se introduc noțiunea abstractă de optimizare a unui proces de conducere și noțiunea de eficiență momentană și globală, ceea ce permite cuprinderea sub același formalism a tuturor proceselor de conducere optimală. Prin formalismul adoptat se poate ajunge imediat la principiul programării dinamice, forma continuă sau discretă, și la principiul general al optimalității.

Capitolul IV este destinat studierii problemei timpului minim pentru sisteme liniare invariante cu restricții clasice ale comenzii (poliedru convex). Sînt examinate teoremele devenite clasice legate de condițiile de necesitate, suficiență, unicitate și existență. Ca aplicație este dată determinarea comenzii optimale prin algoritmul Neustadt-Eaton; se remarcă demonstrația completă și riguroasă a algortimului elaborată de autori.

Sinteza regulată face obiectul capitolului V, în care se urmărește prezentarea metodei introdusă de Bolteanski pentru determinarea unei comenzi optimale în circuit închis. Se urmează îndeaproape toate etapele sintezei regulate, dîndu-se și demonstrația teoremei de suficiență.

Capitolul VI dezvoltă aspectele generale ale criteriului integral pătratic cu ajutorul unui model care apelează la teoria operatorilor complet continui în spații Hilbert. Prezentarea se face într-un cadru general, bazîndu-se pe programarea pătratică funcțională; se deduce condiția de

controlabilitate pentru un operator complet continuu. În încheierea capitolului se examinează cazul sistemelor liniare variabile în timp cu criterii integrale pătratice.

Capitolul VII tratează problema sintezei optimale locale prin metoda Merriam. În esență, se realizează o integrare aproximativă a ecuației Hamilton-Jacobi prin introducerea unei aproximații polinomiale de ordinul $q \geqslant 2$ a funcției minimului de cost în jurul unei traiectorii optimale cunoscute. Se analizează un exemplu constînd dintr-un sistem liniar invariant cu criteriul minimum de energie, pentru care se utilizează o aproximație de ordinul doi. Se specifică domeniul de stabilitate a soluției aproximative și dificultățile de calcul ale soluției aproximative calculate prin metoda Merriam.

În final, capitolul VIII trece în revistă principalele rezultate cunoscute în literatura de specialitate privind existența comenzilor optimale în cazul atît al sistemelor liniare, cît și în special al sistemelor neliniare, precum și unele rezultate în legătură cu controlabilitatea sistemelor neliniare. În general se consideră teoremele de existență examinate în monografia elaborată de E.B. Lee și L. Marcus.

Lucrarea acordă o atenție deosebită formulării și tratării riguros matematice a problemelor abordate. Trebuie remarcat faptul că s-au introdus în monografia de față unele rezultate originale ale autorilor în domeniul fundamentului matematic al teoriei sistemelor optimale. Desigur, fiecare capitol al cărții ar putea fi mult dezvoltat, astfel încît să ajungă la un volum echivalent cu al întregii lucrări, de aceea considerăm că este un merit deosebit al autorilor de a reține toate elementele semnificative ale teoriei sistemelor optimale într-un volum relativ limitat.

Meritul lucrării este de a fi prima în acest domeniu în literatura română de specialitate. Ținînd seama de proiectele de viitor ale autorilor, așteptăm cu viu interes apariția altor lucrări în același domeniu, cu aplicații practice.

L. Lupaș

HANZ PRINZ, HOCHSPANNUNGSFELDER (*Cîmpuri de înaltă tensiune*), R. Oldenbourg Verlag, München — Viena, 1969, 454 p., 225 fig., 33 de tabele

Problema calculului cîmpului electrostatic a constituit obiectul unor lucrări binecunoscute ca de exemplu lucrările de : Bouwers, A., Attwood, S., G., Weber, E., Durand, E., Miroliubov, A.A. ș.a. ; Nendt, G. etc.

Lucrarea lui H. Prinz aduce o nouă contribuție valoroasă în acest domeniu. Spre deosebire de celelalte lucrări în care se prezintă metodele de calcul al cîmpurilor electrice fără a se face particularizări, lucrarea întocmită de H. Prinz se referă în primul rînd la cîmpuri electrostatice din domeniul tehnicii tensiunilor înalte.

În primele pagini, înaintea introducerii, se specifică principalele notații utilizate și se dau un număr de 30 formule mai importante pentru calculul diferitelor mărimi sau constante din domeniul electrotehnicii, precum și șase relații fundamentale privind intensitatea cîmpului electric.

În introducere se face o succintă prezentare istorică a studiilor efectuate în legătură cu cîmpurile electrice și cu evoluția utilizării diferitelor tensiuni nominale. Totodată se expun problemele privind izolația liniilor de transport în curent continuu și alternativ la foarte înaltă

tensiune, transportul prin microunde, încercările de laborator și relațiile fundamentale în cazul cîmpurilor electrostatice laplaceene.

În cadrul lucrării cu excepția ultimii părți, care cuprinde aplicații, se prezintă trei metode dintre cele mai importante pentru studiul cîmpurilor electrice laplaceene : reprezentări conforme, metode numerice de calcul, transformări de coordonate.

În primul capitol al părții privind transformări conforme se dau noțiunile și relațiile de bază ale funcțiilor de variabilă complexă, presupunîndu-se cunoscute noțiunile privind funcțiile analitice. Stabilindu-se condițiile lui Cauchy-Riemann, se arată ortogonalitatea funcțiilor de variabilă complexă și invarianța ecuației lui Laplace în cazul transformărilor conforme. Totodată se expune calculul intensității cîmpului electric în sistemul v/u și în sistemul u/v, se definește factorul de utilizare Schweiger și se prezintă succint expresia forțelor în cîmpuri electrostatice, precum și teorema superpoziției și principiul simetriei.

Teorema superpoziției se poate formula sub o formă mai generală, presupunîndu-se că într-un domeniu omogen sau neomogen liniar și fără histerezis, sînt formulate corect din punctul de vedere al condițiilor de unicitate un număr de n cazuri parțiale, care determină în mod univoc intensitatea cîmpului electric într-un punct oarecare din domeniul D pentru fiecare caz parțial. De asemenea se poate prezenta într-un mod mai general energia cîmpului electrostatic și forțele ce se exercită asupra corpurilor în cazul unui cîmp electric produs de sarcinile electrice de pe suprafața conductoarelor situate în dielectric, presupus izotrop.

Se face o expunere destul de largă asupra factorului de utilizare η a lui Schweiger, care permite determinarea gradului de neuniformitate a cîmpului electric.

Metoda transformărilor conforme se aplică pentru reprezentarea funcțiilor numite elemente, a funcțiilor numite superioare, precum și în cazul reprezentării poligonale.

În domeniul funcțiilor elementare se consideră funcțiile de puteri, funcțiile exponențiale, funcțiile trigonometrice, funcțiile hiperbolice, reprezentări simultane și reprezentări succesive.

În cadrul capitolului intitulat reprezentări simultane se prezintă combinații de funcții elementare, și anume funcția lui Maxwell (cu determinarea intensității cîmpului și a factorului de utilizare pentru cazul placă semiinfinită — placă infinită și pentru profilul Rogowski), profilul lui Jucovski, funcția $z = a\sqrt{e^w + 1}$ cu ajutorul căruia se determină liniile echipotențiale pentru două conductoare paralele (reprezentate de ovalele lui Cassini), cazul a două și patru conductoare jumelate.

Subcapitolul intitulat reprezentări succesive se referă la funcții care necesită mai multe transformări conforme. Se consideră două exemplare caracteristice.

Capitolul al treilea se referă la prezentarea unor funcții denumite superioare utilizate în studiul cîmpurilor electrostatice, și anume funcții eliptice (integrale eliptice, cu exprimarea succintă a acestor integrale și a unor curbe de calcul), funcțiile lui Jacobi *sn*, *cn*, *dn* (cu indicarea unor exemple de aplicare a acestor funcții pentru determinarea cîmpurilor electrostatice), funcția *zn* (u, k) a lui Jacobi (cu aplicarea acesteia pentru determinarea cîmpului dintre două plăci infinit subțiri și de lungime infinită), funcția γ a lui Weierstrass, funcțiile derivate ξ și σ (cu aplicarea funcției γ pentru calculul cîmpului dintre o placă semiinfinită dreaptă și o placă semicirculară), funcția θ a lui Jacobi, funcția gama, funcții cilindrice (funcțiile Bessel și alte genuri de funcții cilindrice) funcția lui Kelvin, funcții sferice, funcțiile Mathieu, funcțiile lui Wangerin și Heine.

La acest capitol se dau puține aplicații, deoarece indicarea unor exemple de aplicare concretă a unei anumite funcții întîmpină dificultăți ; metoda adoptată de autor, de prezentare succintă a acestor funcții care au aplicații în studiul cîmpurilor electrice, consider ca fiind cea mai indicată.

O parte importantă din acest capitol se referă la reprezentarea poligonală și anume pentru poligoane cu unghiuri drepte, poligoane cu unghiuri rotunjite, poligoane curbe, profile Borda.

În primul subcapitol-poligoane cu unghiuri drepte — se dau numeroase exemple de cîmpuri pentru determinarea cărora se utilizează formula lui Schwarz-Christoffel. În cadrul celui

de al doilea subcapitol se ia în considerare cîmpul dintre un plan și un unghi drept rotunjit, pentru care se determină intensitatea cîmpului electric ca și valoarea factorului de utilizare.

Rezolvarea cîmpurilor pentru cazul poligoanelor curbe se face utilizînd metoda ortogonală a lui Richmond, considerîndu-se un poligon circular închis, un poligon elipsoid deschis etc.

Este interesantă introducerea profilului Borda (utilizat inițial în curgerea fluidelor) pentru studiul cîmpurilor pentru poligoane cu vîrfuri rotunjite sau pentru poligoane curbe, simetrice sau nesimetrice.

Ultimul capitol al acestei părți îl constituie o sinteză funcțională, prezentîndu-se o metodă de măsurare și de construire a funcțiilor $z = Z(w)$ pe baza ortogonalității funcțiilor u și v care îndeplinesc condițiile Cauchy-Rieman.

Părții a doua — Metode numerice de calcul a cîmpului — i se acordă un volum mai restrîns (28 pag.).

Într-un prim capitol se prezintă metodele de iterație și anume: iterația prin puncte (în care se dau o serie de contribuții personale ale autorului) iterația în bloc, iterația în linie (rezolvare matricială).

Cel de al doilea capitol se referă la teorema relaxației pentru ca în capitolele următoare să se exprime metoda Monte-Carlo și metoda celor mai mici pătrate; aceste metode sînt prezentate succint.

Într-un ultim capitol se tratează cîmpurile electrice tridimensionale în care, pe lîngă metodele uzuale folosite în determinarea diferitelor configurații de cîmpuri se prezintă și metoda, mai puțin cunoscută, a elementelor finite.

Dată fiind utilizarea calculatoarelor digitale, metodele numerice de calcul și, în general, metodele de calcul al cîmpurilor electrostatice prin aproximații succesive capătă o importanță tot mai mare. Pe lîngă metodele menționate pot fi luate în considerare metoda variațională, metoda Ritz — Galerkin etc. Autorul a căutat să indice în primul rînd metodele uzuale, cu aplicații directe.

Partea a treia, „Transformări de coordonate", constituie o prezentare sistematizată, de nivel ridicat și coerent.

În primul capitol se rezolvă cîmpuri laplaceene prin metoda separării variabilelor, considerîndu-se sistemul de coordonate rectangular.

Capitolul al doilea se referă la prezentarea problemelor care privesc transformarea sistemelor de coordonate în cazul sistemelor de coordonate curbilinii în accepția largă a noțiunii și anume expresiile coeficienților metrici cu precizări în cazul coordonatelor cilindrice și sferice, determinarea expresiilor pentru suprafață și volum în coordonate curbilinii cu ajutorul coeficienților metrici, expresia lui grad Φ cu particularizarea în cazul coordonatelor cilindrice și sferice, calculului lui $\Delta\Phi$ în cazurile cîmpurilor laplaceene.

În capitolul al treilea, menționîndu-se că este necesar ca expresia potențialului să se pună sub forma $\Phi = U^1(u^1) \cdot U^2(u^2) \cdot U^3(u^3)$ indiferent de sistemul de coordonate, se arată că în acest scop este indicat să se utilizeze matricea S, propusă de P.G. Stäckel. Totodată se prezintă relațiile de calcul privind aplicarea matricei S în cazul unui sistem de translație, respectiv în cazul unui sistem de rotație.

În capitolul al cincilea, după o succintă prezentare a sistemului de coordonate Eisenhart (simetric și nesimetric), se expune sistemul de transformare a sistemelor de coordonate Moon-Spencer (de translație și de rotație). Prezentarea acestui sistem, care nu este menționat în lucrările de cîmpuri electrostatice mai vechi și care prezintă avantaje pentru anumite configurații de cîmp electric, este făcută clar și ordonat.

Capitolul al șaselea se referă la metoda de separare R bazată pe metoda separării S, cu aplicații în sistemul de coordonate bisferice și toroidale.

După o succintă prezentare a ortogonalității unor clase de funcții și a metodologiei de calcul, în cadrul ultimului capitol, al nouălea, se dau numeroase exemple de calcul al cîmpu-

rilor electrostatice prin metoda transformării de coordonate. Exemplele expuse sînt selecționate pentru a scoate în evidență avantajele utilizării unui anumit sistem de coordonate.

În numeroasele exemple prezentate pentru fiecare gen de sistem de coordonate, se determină expresia intensității cîmpului electric, distribuția potențialului și variația factorului de utilizare.

În cadrul acestui capitol se analizează de asemenea corespondența dintre cele două sisteme de translație și de rotație.

Partea a patra cuprinde 20 de probleme de cîmp electrostatic, rezolvate prin metodele de calcul indicate în cuprinsul lucrării.

Volumul cuprinde o anexă bogată, în care se dau tabele cu integrale eliptice, funcții Jacobi, Legendre și Bessel, relații pentru diferite sisteme de coordonate corespunzător diferitelor configurații de cîmp electrostatic etc.

Prin modul de tratare a problemelor prezentate, prin caracterul ei concret și prin numeroasele exemple de calcul, lucrarea este nu numai valoroasă, ci și de o deosebită utilitate. Cei ce vor consulta această lucrare vor găsi bazele teoretice ale metodelor de calcul expuse și indicații concrete de aplicare a acestor metode. Evident că pentru studiul cîmpurilor electrostatice se pot utiliza și alte metode decît cele menționate, cum ar fi metoda funcțiilor lui Green, a ecuațiilor integrale sau metode variaționale. Autorul s-a oprit asupra a trei metode cu caracter general, pe care le-a considerat ca fiind cele mai indicate și care într-adevăr au o largă utilizare în determinarea cîmpurilor electrostatice.

Pe de altă parte, insistarea asupra aspectelor teoretice și asupra rigurozității în prezentarea unor teoreme sau relații de calcul ar fi mărit volumul lucrării și i-ar fi dat un caracter general, mai puțin concret.

Este de subliniat modul sistematic și concis în care sînt prezentate diferite aspecte teoretice, precum și alegerea judicioasă a problemelor cu specificarea metodelor de calcul cele mai indicate. De asemenea este de menționat că în lucrare se dau o serie de metode mai puțin utilizate în lucrările mai vechi (sistemul Moon-Spencer, matricea S, profilul Borda etc.). Aplicarea acestor metode pentru anumite configurații de cîmp prezintă o serie de avantaje.

Bibliografia consultată este bogată (259 de titluri, plus 9 titluri de lucrări cu tabele de calcul).

Condițiile tehnice de editare sînt excepțional de bune; p uține lucrări tehnice se pot compara din acest punct de vedere cu lucrarea de față.

În concluzie, lucrarea lui H. Prinz reprezintă o contribuție importantă în domeniul studierii cîmpurilor electrostatice laplaceene; prin modul de prezentare a metodelor de calcul și datorită numeroaselor exemple de aplicare a acestor metode, lucrarea este deosebit de utilă specialiștilor din acest domeniu.

G. Drăgan

CU PRIVIRE LA CEA DE-A DOUA CONFERINȚĂ INTERNAȚIONALĂ DE MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ.

15—27 iunie 1970

Între 15 și 27 iunie 1970 s-au desfășurat în România lucrările celei de-a doua Conferințe internaționale de motoare cu ardere internă, organizată de Academia Republicii Socialiste România în colaborare cu Ministerul Industriei Construcțiilor de Mașini, Ministerul Învățământului, Ministerul Industriei Metalurgice, Ministerul Transporturilor și Ministerul Industriei Petrolului.

Conferința a avut drept scop realizarea unui schimb de experiență între specialiști, punerea în discuție a rezultatelor obținute în cercetarea, fabricarea și exploatarea motoarelor cu ardere internă în țara noastră și peste hotare, evidențierea principalelor probleme ale specialității și soluționarea lor în raport cu cerințele producției și ale exploatării, precum și intensificarea aplicării în practică a studiilor efectuate.

În ședința de deschidere, care a avut loc la București luni 15 iunie 1970, președintele Comitetului de organizare, prof. dr. doc. ing. George Bărănescu, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România a arătat că mijloacele umane și materiale de care dispune societatea sînt și vor rămîne limitate și că de aceea astăzi capătă o semnificație cu totul deosebită utilizarea cu maximum de eficiență a resurselor disponibile, obținerea unor rezultate valoroase într-un timp relativ scurt. În acest context, a accentuat că schimbul direct de idei și de experiență, contactul dintre cei ce studiază aspectele generale și cei care și-au consacrat talentul și priceperea perfecționării motoarelor va stimula preocupările actuale, va aduce noi clarificări în orientarea cercetării viitoare și va asigura împlinirea cu tot mai mult succes a deziderațului actual: rezultate certe, importante, cu mijloace materiale minime.

În zilele de 16—20 iunie 1970 s-au desfășurat la București, în localul nou al Institutului politehnic, lucrările științifice, în cursul cărora s-au discutat peste 100 de lucrări ale specialiștilor din țară și din străinătate, totalitatea comunicărilor fiind multiplicate în prealabil sub formă de preprinturi, care cuprind circa 2 500 de pagini. Pentru a asigura desfășurarea corespunzătoare a discuțiilor s-a realizat traducerea simultană în cinci limbi: franceză, engleză, germană, rusă și română.

Dezbaterea problemelor cuprinse în tematica manifestării a fost organizată în zece secții: secția I „Studiul proceselor de ardere în motoare"; secția II, „Problemele poluării aerului de către motoarele cu ardere internă"; secția III, „Transfer de căldură"; secția IV, „Schimbarea încărcăturii cilindrului; procese de lucru"; secția V, „Injecția combustibilului lichid"; secția VI, „Îmbunătățiri funcționale; perspective"; secția VII, „Dinamica motoarelor cu ardere

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 961—962, 1970

internă"; secția VIII, ,,Construcția și calculul motoarelor cu ardere internă"; secția IX, ,,Aparate și tehnici de măsură pentru motoarele cu ardere internă"; secția X, ,,Terminologie, simboluri și unități de măsură".

Lucrările prezentate au acoperit deci întregul domeniu al motoarelor cu ardere internă Relevăm tratarea unor probleme legate de dezvoltarea motoarelor, cum ar fi supraalimentarea înaltă, probleme de studiu al proceselor, spre exemplu formarea oxidului de azot în motor precum, și probleme de perspectivă mai îndepărtată, ca utilizarea motorului cu ardere internă cuplat cu instalații magnetohidrodinamice. S-au dezbătut noi rezultate de cercetare obținute în laboratoarele unor institute de cercetare de prestigiu, ca Institutul de cercetare a motoarelor cu ardere internă ,,Ricordo" din Anglia, Institutul de cercetare a motoarelor cu ardere internă ,,prof. Hans List" din Austria, Institutul de cercetare a motoarelor cu ardere internă ,,Prof. Huber" din R. F. a Germaniei, precum și de colective din învățământul superior și din uzinele constructoare de motoare.

Comunicările românești, în număr de peste 35, au vizat domeniile : echilibraj și dinamica motorului, calculul segmenților, studiul proceselor din motoare pe bază de modele, cercetarea influenței neuniformității proceselor din cilindru asupra produșilor poluanți, tehnica de măsură etc.

De un interes deosebit s-a bucurat din partea tuturor participanților inițiativa catedrei de motoare cu ardere internă a Institutului politehnic din București, care a prezentat o propunere de terminologie în domeniul motoarelor cu ardere internă.

Programul conferinței a prevăzut și discuții cu un caracter mai liber în cadrul unor secții organizate în centre economice importante ale țării, discuții numite mese rotunde. S-au organizat cinci astfel de mese rotunde : luni 22 iunie 1970, la Sinaia, masa rotundă P_1 cu tema ,,Probleme actuale ale echipamentului de injecție pentru motoarele cu aprindere prin comprimare ; realizări și perspective" ; luni 22 iunie 1970, la Brașov, masa rotundă P_2 cu tema ,,Probleme actuale ale motoarelor cu aprindere prin comprimare pentru tractoare ; realizări și perspective" ; luni 22 iunie 1970, la Brașov, masa rotundă P_3 cu tema ,,Probleme actuale ale motoarelor cu aprindere prin scînteie pentru autovehicule ; realizări și perspective" ; miercuri 24 iunie 1970, la Constanța, masa rotundă P_4' cu tema ,,Probleme actuale ale motoarelor staționare, navale și pentru tracțiunea feroviară ; realizări și perspective" ; sîmbătă 27 iunie 1970 masa rotundă P_4'' cu tema ,,Cerințe și realizări privind materialele folosite în construcția motoarelor cu ardere internă".

În cadrul acestor discuții s-au prezentat comunicări de sinteză și rezultate ale cercetărilor aplicative, purtîndu-se discuții ample în legătură cu tematica propusă,

La cea de-a doua Conferință internațională de motoare cu ardere internă au participat peste 500 de specialiști, dintre care mai mult de 220 din străinătate, reprezentînd 25 de țări. Inginerii români prezenți au reprezentat aproape pe toți cei care lucrează în domeniu, iar oaspeții din străinătate au întrunit ceea ce are reprezentativ cercetarea, învățămîntul și industria în domeniul motoarelor cu ardere internă în țările pe care le-au reprezentat, și anume Anglia, Austria, Bulgaria, Canada, R. S. Cehoslovacă, Franța, Finlanda, R. D. Germană, R. F. a Germaniei, Italia, Iugoslavia, Japonia, R.P. Polonă, S. U. A., Suedia, R. P. Ungară și U. R. S. S.

Prin numărul de lucrări, prin valoarea acestora și amploarea discuțiilor, prin participarea bogată și selectă, ca și prin organizare, a doua Conferință Internațională de motoare cu ardere internă a reprezentat o importantă manifestare științifică în domeniu.

Dr. ing. Călin Adrian Vasilescu
Secretarul Comitetului de organizare

TITLURILE COMUNICĂRILOR PREZENTATE

Secţia I, „Studiul proceselor de ardere în motoare"

1. SIEGFRIED J. MEURER (R. F. a GERMANIEI), Dezvoltarea sistemelor de formare a amestecului şi de ardere pe baza procedeului Meurer.
2. LOTHAR THON (R. D. GERMANĂ), Realizarea unei mişcări de rotaţie a aerului în cilindrul motoarelor în patru timpi şi efectele ei asupra comportării în exploatare a motoarelor cu procedeu de ardere Meurer.
3. TIBERIU NAGY (R. S. ROMÂNIA), Influenţa intensităţii mişcării organizate a aerului din cilindrul motorului cu aprindere prin comprimare cu camera de ardere în piston asupra procesului de ardere.
4. EMIL GAIGINSCHI, AURELIAN SIMIONESCU şi CONDRAT ADRIAN HOMUTESCU (R. S. ROMÂNIA), Cercetări experimentale privind influenţa unor aditivi asupra întîrzierii la autoaprindere a unor motorine româneşti.
5. ERWIN EISELE (R. F. a GERMANIEI), Procedee de ardere în motoarele cu aprindere prin comprimare în legătură cu utilizarea lor în autoturisme.
6. VASILE BERINDEAN (R. S. ROMÂNIA), Contribuţii la studiul şi cercetarea raportului de comprimare critic minim al amestecurilor omogene de combustibil-aer aprinse prin comprimare.
7. KURT LETTNER (AUSTRIA), Cercetări asupra arderii în motorul cu aprindere prin comprimare în timpul procesului de pornire.
8. DINU TARAZA şi ANDREI BELEI (R. S. ROMÂNIA), Consideraţii privind influenţa legii de degajare a căldurii asupra parametrilor funcţionali ai motorului cu aprindere prin comprimare cu cameră de ardere divizată.
9. VASILE BERINDEAN, VASILE AVRAM şi WOLFGANG BURGERMEISTER (R. S. ROMÂNIA), Contribuţii la studiul şi la cercetarea legii de degajare a căldurii la funcţionarea motorului D-103 cu amestecul de benzină şi motorină.
10. FRIEDERICH MÜLLER (R. D. GERMANĂ), Factorii care influenţează procesul de aprindere în motorul cu aprindere prin scînteie.
11. AHMED EL-SAID GAD EL-MAWLA (REPUBLICA ARABĂ UNITĂ), Efectul parametrilor de lucru ai motorului asupra variaţiei ciclice a arderii.
12. CONSTANTIN SILASI (R. S. ROMÂNIA), Consideraţii asupra capacităţii de aprindere a scînteii electrice.
13. GHAZI A. KARIM (CANADA), Unele probleme de ardere rezultînd din folosirea gazelor naturale la motoarele cu ardere internă.
14. HALIT CAKIR (TURCIA), Propagarea flăcării într-un motor cu aprindere prin scînteie.
15. BAZIL POPA, CONSTANTIN SILASI şi TIBERIU CARPIUC (R. S. ROMÂNIA), Unele aspecte privind modificările funcţionale cauzate de depunerile de calamină în motoarele cu aprindere prin scînteie.

16. GARY L. BORMAN, PHILIP S. MYERS și O. A. UYEHARA (S.U.A.), Unele probleme privind calculul ciclului real al motoarelor.
17. GHAZI A. KARIM (CANADA), Asupra problemei cinetîcii chimice în calculul arderii la motoarele cu ardere internă.
18. BERTHOLD GRÜNWALD, NICOLAE APOSTOLESCU și DINU TARAZA (R. S. ROMÂNIA), Posibilități de evaluare a caracteristicii de degajare a căldurii de reacție după diagrama indicată la motoarele cu ardere internă.
19. CONSTANTIN ARAMĂ (R. S. ROMÂNIA) și MOHAMED MOSELHI SELIM (REPUBLICA ARABĂ UNITĂ): Un model fizico-matematic al arderii în motorul cu aprindere prin comprimare.
20. DAVID PERETZ (R. S. ROMÂNIA), Asupra unei noi posibilități de studiu experimental al detonației în motoarele cu aprindere prin scînteie.
21. LEON GROS-GRONOMSKI (ISRAEL), Motoare cu ardere internă ca surse de gaz pentru generatoarele M.H.D.

Secția II. „Problemele poluării aerului de către motoarele cu ardere internă"

1. S. S. LESTZ și W. E. MEYER (S.U.A.), Este regularitatea arderii o cheie pentru reducerea emisiilor de la motoarele cu aprindere prin scînteie?
2. ROBERT EBERAN-EBERHORST (AUSTRIA), Procese nestaționare de formare a amestecului în motoare cu aprindere prin scînteie pentru autovehicule și urmări asupra compoziției gazelor de evacuare.
3. CĂLIN ADRIAN VASILESCU, LUCIAN TEODORESCU, ION ȘTEFAN, VITALIE HARBUR, STELA MANEA, ION MINEA, OCTAVIAN BERCEA și DUMITRU MIHAI (R. S. ROMÂNIA), Corelații între produșii poluanți în gazele de evacuare la un motor policilindric și neuniformitatea proceselor din cilindri.
4. T. J. BLEE, J. A. T. DAVID și N. HUNT (MAREA BRITANIE), Cercetări privind controlul produșilor poluanți din gazele de evacuare de la motoarele cu ardere internă, folosind un sistem de injectare al combustibilului comandat electronic.
5. JOHN B. HEYWOOD și JAMES C. KECK (S.U.A.), Formarea oxidului de azot în motoarele cu aprindere prin scînteie.
6. ERNEST S. STARKMAN (S.U.A), Unele considerații fundamentale privind arderea produșilor din gazele de evacuare ale motoarelor.
7. GIANCARLO FERRARI (ITALIA), Raportul dintre ventilarea carterului și problemele poluării aerului.
8. GHORGHI FEDOROVICI SKALOV (U.R.S.S.), Mărirea economicității și micșorarea toxicității motoarelor cu carburator de automobil la temperaturi ridicate ale aerului.
9. ERWIN KAISER (R. D. GERMANĂ), Probleme legate de tehnica de măsurare la cercetarea dependenței dintre produsele solide și gazoase de ardere incompletă din gazele de evacuare ale motoarelor cu aprindere prin comprimare.
10. I. M. KHAN (MAREA BRITANIE), Factorii care influențează fumul motorului cu aprindere prin comprimare.

Secția III. „Transfer de căldură"

1. RADISLAV F. PAVLETIĆ (R. S. F. IUGOSLAVIA), Influența turației motorului și a mărimii cilindrilor asupra transferului de căldură.
2. GHEORGHE BOBESCU (R. S, ROMÂNIA), Considerații privind încălzirea cu lichid a conductei de admisie la motorul SR-211 cu răcire diferențiată.

3. ISTVAN KALMAR (R. P. UNGARĂ), Valoarea instantanee a coeficientului de transfer de căldură în motoarele cu ardere internă.
4. DIMITRI BORISOVICI KUZNEȚOV (U.S.S.S.), Studiul procesului de transmitere a căldurii în camera de răcire a motoarelor cu ardere internă cu piston înalt forțate.

Secția IV. „Schimbarea încărcăturii cilindrului; procese de lucru"

1. ANDREI SERGHEEVICI ORLIN (U.R.S.S.), Unele probleme ale schimbului de gaze în motoare cu piston supraalimentate cu grup turbocompresor.
2. DAN ABAITANCEI (R. S. ROMÂNIA), Contribuții la calculul procesului de curgere a încărcăturii în timpul admisiei la motoarele cu ardere internă în patru timpi.
3. DIMITĂR STAVREV și VALENTIN MARINOV (R. P. BULGARIA), Unele probleme privind umplerea și caracteristicile motoarelor în doi timpi cu carburator.
4. ROBERT BUTY (FRANȚA), Funcționarea motorului cu aprindere prin scînteie la sarcini parțiale.
5. TOMAS ROZSAS (R. S. CEHOSLOVACĂ), Analiza undelor de presiune în sistemul de admisie al motoarelor cu ardere internă în patru timpi policilindrice.
6. DAN ABAITANCEI și MARIA ABAITANCEI (R. S. ROMÂNIA), Cercetări experimentale privind influența fenomenelor dinamice din colectorul de admisie asupra umplerii normale la un motor policilindric în patru timpi.
7. ENDRE PASZTOR (R. P. UNGARIA), Contribuții la determinarea legăturilor dintre procesul de lucru și randamentul mecanic la motoarele cu ardere internă cu piston.

Secția V. „Injecția combustibilului lichid"

1. NIKOLAI HARITONOVICI DIACENKO (U.R.S.S.), Condițiile funcționării stabile a aparaturii de alimentare cu combustibil pentru motoare cu aprindere prin comprimare.
2. R. L. PAPWORTH (S.U.A.) și LUCIAN TEODORESCU (R. S. ROMÂNIA): Stabilitatea curgerii printr-un pulverizator în timpul procesului de injecție.
3. G. SIEGFRIED (R. D. GERMANĂ), Mărimi care influențează desfășurarea injecției.
4. BORIS PETROVICI PUGACIOV (U.R.S.S.), Alegerea parametrilor optimi ai procesului de injecție a combustibilului la motoarele cu aprindere prin comprimare rapide supraalimentate.
5. KINT EVGHENIEVICI DOLGANOV (U.R.S.S.), Sistem hidraulic de reglaj pentru motoare cu aprindere prin comprimare de automobile și tractoare.
6. PIOTR IVANOVICI ANDRUȘENKO (U.R.S.S.), Sistem de alimentare cu combustibil, cu pompă de injecție cu distribuitor și dozarea admisiei, pentru motoare de automobile și tractoare cu aprindere prin comprimare.
7. JEAN MOULIN (FRANȚA), Sistemul de injecție diferențiată Peugeot. Aplicații particulare în vederea ameliorării zgomotului la mers în gol la motoarele cu aprindere prin comprimare.
8. MIRCEA ZUGRĂVEL, RADU GAIGINSCHI și VASILE BORONEA (R. S. ROMÂNIA), Posibilități de utilizare a pompei cu membrană acționată hidraulic ca pompă de injecție a benzinei la motoarele cu aprindere prin scînteie.
9. EMIL SKROBANEK (R. S. CEHOSLOVACĂ), Contribuții la problema durabilității organelor principale ale pompelor de injecție.

10. IURI IAKOVLEVICI FOMIN (U.R.S.S.), Teoria și calculul pe mașini numerice a proceselor de alimentare cu combustibil a motoarelor cu aprindere prin comprimare.
11. CZESTAWA WTADYSTAWOWNA DROZD (R. P. POLONĂ), Posibilități de determinare prin calcul a caracteristicilor reale și aproximative ale injecției combustibilului în motoarele cu aprindere prin comprimare.
12. EMIL LĂZĂRESCU și ALEXANDRU BIRJOIANU (R. S. ROMÂNIA), Influența ultrasunetelor asupra eroziunii cavitaționale în conductele de înaltă presiune a sistemelor de injecție.

Secția VI, „Îmbunătățiri funcționale; perspective"

1. ERHARD MÜHLBERG (R. F. a GERMANIEI), Recirculare de gaze de ardere la motoare termice, în special la motoarele cu aprindere prin comprimare.
2. SERGHEI GHEORGHEVICI ROGANOV (U.R.S.S.), Căile de îmbunătățire a funcționării motoarelor cu aprindere prin comprimare în domeniul turațiilor și sarcinilor mici.
3. CĂLIN ADRIAN VASILESCU și ION ȘTEFAN (R. S. ROMÂNIA), Îmbunătățirea performanțelor motoarelor de autovehicule funcționînd la altitudini variabile prin corectarea avansului la declanșarea scînteii electrice.
4. HERBERT PRETTENHOFER și S. J. PACHERNEGG (AUSTRIA), Motoare cu aprindere prin comprimare de mare putere cu piston portant; probleme, tendințe, soluții.
5. ALEKSANDR LVOVICI KLIACIKIN (U.R.S.S.), Perspectivele utilizării motoarelor cu ardere internă în transportul aerian.

Secția VII, „Dinamica motoarelor cu ardere internă"

1. GHEORGHE ZĂTREANU (R. S. ROMÂNIA), Contribuții la studiul echilibrajului motoarelor cu două linii paralele de cilindri.
2. CONSTANTIN MANEA și FLORINEL PAPUC (R. S. ROMÂNIA), Cu privire la echilibrajul și alegerea soluției arborelui cotit al motoarelor cu șase cilindri în V și patru timpi.
3. RUGGERO MACIOTTA și FRANCO FERRARIS (ITALIA), Cercetări asupra ordinii de aprindere optime pentru un motor policilindric în doi timpi.
4. GEORGE BĂRĂNESCU (R. S. ROMÂNIA), Echilibrajul momentelor externe ale unor termeni de ordin par o dată cu momentul extern al termenului de ordinul întîi la motorul în linie în doi timpi, cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate.
5. GEORGE BĂRĂNESCU și CONSTANTIN SILVESTRU (R. S. ROMÂNIA), Echilibrajul motoarelor în V cu cilindri intercalați.
6. VICTOR HOFFMAN, VIRGIL OLARIU și PETRE SIMA (R. S. ROMÂNIA), Studiul matricial al vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit al motoarelor cu ardere internă.
7. ANDRZEJ TEISEYRE (R. P. POLONĂ), Analiza adimensională a vibrațiilor de răsucire ale arborilor cotiți.
8. JAQUES DELANGE (FRANȚA), Utilizarea unui calculator și a unui trasator de curbe în studiul vibrațiilor de torsiune forțate cu amortizări vîscoase.
9. CHRISTIAN PELECUDI și ION SAVA (R. S. ROMÂNIA), Influența vibrațiilor torsionale și longitudinale asupra funcționării mecanismelor de distribuție.
10. SERGIO STECCO (ITALIA), Comportarea dinamică a amortizoarelor cu fluide vîscoase.
11. TOMIO YAMAGUCHI, KUZUHIRO SHIRAKI și HISAO MORTA (JAPONIA), Studiul vibrațiilor transversale ale unui batiu de motor.

Secția VIII, „Construcția și calculul motoarelor cu ardere internă"

1. CORRADO CASCI și GIANCARLO FERRARI (ITALIA), Analiza încărcării termice a pistonului în regim detonant.
2. IGOR GHEORGHEVICI KISELIOV (U.R.S.S.), Cercetarea stării de tensiuni termice din piesele grupului cilindru-piston al motoarelor cu aprindere prin comprimare pentru locomotivă.
3. KARL ZINNER (R. F. a GERMANIEI), Cercetări privind supapele motoarelor cu aprindere prin comprimare în patru timpi cu supraalimentare înaltă.
4. ANCA RODICA DELCESCU (R. S. ROMÂNIA), Un model matematic pentru studiul modificării presiunii radiale a segmentului prin uzură de contact.
5. HORST NAUMANN (R. F. a GERMANIEI), Compararea diferitelor tipuri de pistoane (din metal ușor, din oțel și din fontă) pentru motoare diesel de rapiditate medie și determinarea solicitării lor.
6. ANCA RODICA DELCESCU (R. S. ROMÂNIA), Stabilirea prin calcul a unei legi de repartiție a presiunii radiale corespunzătoare principalelor cerințe funcționale și de rezistență ale segmentului de piston.
7. ARPAD ZSARY (R. P. UNGARĂ), Distribuția tensiunilor la modelul capului de bielă, luîndu-se în mod special în considerare jocul axului pistonului.
8. JERZY ANDRZEJ DOWKONTT (R. P. POLONĂ), Deformarea organelor mașinilor cu piston.
9. IGOR BARYSZ și LADISLAU CILLIK (R. S. CEHOSLOVACĂ), Calculul lagărelor de alunecare ale arborilor cotiți încărcate dinamic.
10. EGLOF von SCHNURBEIN (R. F. a GERMANIEI), O nouă metodă pentru calculul lagărelor de alunecare la arborii cotiți static nedeterminați.
11. JAROSLAV TRNKA (R. S. CEHOSLOVACĂ), Contribuții la calculul încărcării lagărelor motoarelor cu piston.
12. HEINZ GLÄSER (R. D. GERMANĂ), Încercări în legătură cu alegerea soluției optime pentru lagăre de alunecare radiale solicitate dinamic.
13. KAZIMIERZ NIEWIAROWSKI (R. P. POLONĂ), Cercetări privind condițiile de lucru ale lagărelor principale ale motoarelor cu ardere internă lente și semirapide.
14. SIEGFRIES BRACH (R. D. GERMANĂ), Deformarea carterului la motoarele navale este cauza distrugerii arborelui cotit?
15. ERNEST BEUTNER (R. D. GERMANĂ), Asupra dimensionării ancorării elastice a motorului cu ajutorul metodelor moderne de calcul.
16. JULIUS WITZKY (S.U.A.), Dezvoltarea unui motor cu aprindere prin comprimare fără pompă de injecție.
17. HELMUT PICKERT (R. F. a GERMANIEI), Stabilirea formei chiulaselor cu ajutorul măsurătorilor tensometrice.
18. PETRE J. CARP și RUDOLF PISCHINGER (AUSTRIA): Grup motor transmisie de putere constantă.
19. GHEORGHE VASILICA și VETURIA RASZILLIER (R. S. ROMÂNIA), Criteriul modificării microgeometriei de prelucrare a suprafețelor de frecare pentru aprecierea stadiului de rodaj la motoare.

Secția IX, „Aparate și tehnici de măsură pentru motoarele cu ardere internă"

1. EUGEN W. HUBER (BERLINUL OCCIDENTAL), Transmisia fără contacte electrice a mărimilor măsurate (măsurători telemetrice ale mișcării segmenților de etanșare la un motor Wankel).

2. GERHARD STUMPP (R. F. a GERMANIEI), Determinări ale compoziției gazelor de ardere la motoarele cu aprindere prin scînteie și la motoarele cu aprindere prin comprimare.
3. MARCEL GUTMAN (R. S. ROMÂNIA), Instalație și supapă pentru prelevarea probelor de gaz de la motoarele cu ardere internă.
4. TIBERIU CARPIUC și STEFAN KOVACS (R. S. ROMÂNIA), Contribuții privind ridicarea diagramei indicate la motoarele cu aprindere prin scînteie.
5. ȘTEFAN KOVACEV (R. P. BULGARIA), Aspecte ale procesului de ardere în motoarele cu ardere internă și înregistrarea lor prin fibre optice.
6. SHOGO SAEKI și KOJI KISHIMOTO (JAPONIA), Studiul fotoelastic al tensiunilor termice ale părților componente ale camerei de ardere ale unui motor cu aprindere prin comprimare.
7. MANFRED ROHRLE (R. F. a GERMANIEI), Instalații și procedee de investigație pentru cercetări asupra pistoanelor motoarelor cu ardere internă.
8. COSTIN-EMIL DOBRE (R. S. ROMÂNIA), Considerații privind determinarea experimentală a legii de repartiție a presiunii radiale a segmenților de piston.
9. REIMAR GERMANN (AUSTRIA), Noi metode de măsurare și aparataj pentru încercarea motoarelor cu ardere internă.
10. MAURICE ARTHUR TRUEMAN (MAREA BRITANIE), O nouă tehnică pentru măsurarea oscilațiilor de răsucire.
11. EMIL LĂZĂRESCU și ALEXANDRU BIRJOIANU (R. S. ROMÂNIA), Măsurarea conținutului de aer din combustibilii lichizi.
12. CHRISTIAN PELECUDI și ION SAVA (R. S. ROMÂNIA), Metodă și instalație pentru cercetarea experimentală a camerelor mecanismelor de distribuție.

Secția X, „Terminologie, simboluri și unități de măsură"

Motoare cu ardere internă. Terminologie, simboluri, unități de măsură (proiect).

Masă rotundă P_1, „Probleme actuale ale echipamentului de injecție pentru motoarele cu aprindere prin comprimare; realizări și perspective"

1. JAROMIR INDRA (R. S. CEHOSLOVACĂ), Noi tipuri de pompe de injecție pentru motoare cu aprindere prin comprimare cu dispoziția cilindrilor în V.
2. CHRISTO BOZEV, ȘTEFAN KOVACEV și KRUM BOIADJIEV (R. P. BULGARIA), Rezultatele experimentale obținute la alegerea unui sistem de alimentare cu combustibil optim pentru motoare cu aprindere prin comprimare de mare turație.

Masă rotundă P_2, „Probleme actuale ale motoarelor cu aprindere prin comprimare pentru tractoare; realizări și perspective"

1. BRIAN WYAT MILLINGTON, CLIFFORD JOHN WALDER și DAVID BROOME (MAREA BRITANIE), Proiectarea și dezvoltarea motoarelor cu aprindere prin comprimare cu injecție directă.
2. GYORGY SITKEI (R. P. UNGARĂ), Încărcarea termică a motorului cu aprindere prin comprimare la sarcină variată.
3. ISTVAN KOVACS și FERENC SUTO (R. P. UNGARĂ), Probleme ale dezvoltării motoarelor cu aprindere prin comprimare Csepel.

4. CAROL SKACH (R. S. ROMÂNIA), Studiul antrenării unei suflante de supraalimentare diferențiată cu turbina de gaze la motoarele de tracțiune rutieră.
5. NICOLAE BĂTAGĂ și A. IANCU (R. S. ROMÂNIA), Influența unor factori principali asupra solicitării termice a motorului cu aprindere prin comprimare.
6. HARTWING MICHELS (R. S. ROMÂNIA), Cercetări prin metode staționare a unor modele de canale de admisie.
7. TIBERIU BUDU (R. S. ROMÂNIA), Cercetări în domeniul ridicării turației motorului cu aprindere prin comprimare cu cameră unitară.

Masă rotundă P_3, *„Probleme actuale ale motoarelor au aprindere prin scînteie pentru autovehicule; realizări și perspective"*

1. ETTORE CORDIANO (ITALIA), Motorul transversal al automobilului FIAT-128.
2. VALENTIN PETROVICI ZUEV (U.R.S.S.), Dependența greutății specifice a motoarelor cu ardere internă de dimensiunile lor.

Masă rotundă P_4', *„Probleme actuale ale motoarelor staționare, navale și pentru tracțiunea feroviară; realizări și perspective"*

1. CONSTANTIN ARAMĂ, VASILE BERINDEAN, ANDREI MANOLE, GHEORGHE BORILĂ, GHEORGHE CAZAN și ALEXE MANEA (R. S. ROMÂNIA), Probleme privind dezvoltarea motoarelor cu aprindere prin comprimare de mare putere.
2. J. DUCASSE (FRANȚA), Supraalimentarea motoarelor cu aprindere prin comprimare moderne.
3. JACQUES GALLOIS și JEAN-LOUIS MAGNET (FRANȚA), Probleme ale punerii la punct a motoarelor de putere unitară înaltă pentru tracțiunea feroviară.
4. VASILE BERINDEAN, ALEXANDRU DOBRESCU, AUREL BAICU și I. TUDORA (R. S. ROMÂNIA), Cercetări asupra depunerilor din poarta supapei și a canalului de admisie la motoare pentru tracțiune feroviară.
5. ION ZĂGĂNESCU și HENRI HOLBAN (R. S. ROMÂNIA), Rodajul motoarelor cu aprindere prin comprimare de tracțiune feroviară.

Masă rotundă P_4'', *„Cerințe și realizări privind materialele folosite în construcția motoarelor cu ardere internă"*

1. CONSTANTIN GHIULAI (R. S. ROMÂNIA), Probleme ale materialelor și fabricației motoarelor ușoare rapide.
2. K. LLOYD (MAREA BRITANIE), Evoluția materialelor de lagăre.
3. CONSTANTIN GHIULAI (R. S. ROMÂNIA), Asupra unor probleme caracteristice ale materialelor și fabricației motoarelor de mare putere.
4. IOSIF TRIPȘA, TITI DULĂMIȚĂ, ADRIAN MIHAIL și LAURENȚIU SOFRONIE (R. S. ROMÂNIA), Asupra unor materiale feroase și a unor procedee moderne în tratamentul termic folosit în construcția motoarelor cu ardere internă.

Rezumatele articolelor apărute în „Revue Roumaine des sciences techniques, Série électrotechnique et énergetique, tom. 15, nr. 4, 1970

R. RĂDULEȚ, A. TIMOTIN, A. ȚUGULEA

621.31.05.001

Ecuații de propagare cu parametri tranzitorii pentru linii lungi cu pierderi

Se deduc ecuațiile de propagare cu parametri tranzitorii pentru linia bifilară cu pierderi, ținînd seama atît de pătrunderea tranzitorie a cîmpului electromagnetic în conductoare, cît și de fenomenele de relaxație a sarcinii în dielectricul imperfect al liniei. Ecuațiile deduse generalizează cunoscutele ecuații ale telegrafiștilor.

AL. TIMOTIN, A. ȚUGULEA, GH. COSTACHE

621.3.011.538.542 : 537.226.3

Calculul și măsurarea parametrilor tranzitorii ai unei bobine toroidale cu miez din tole

În lucrare se studiază cîmpul electromagnetic tranzitoriu în miezul unei tole a unei bobine toroidale în aproximația liniară, ținînd cont de rezistența înfășurării și de inductivitatea ei de dispersie. Se calculează de asemenea parametrii tranzitorii ai unei bobine toroidale cu miez din tole, expresiile lor asimptotice și valorile lor relative reprezentate ca funcții de timp raportat la constanta de pătrundere a cîmpului electromagnetic în miezul bobinei. Sînt prezentate sub formă de tabele rădăcinile ecuațiilor transcendente și alte date necesare calculelor practice. În final sînt date rezultatele experimentale și cele obținute cu ajutorul calculului analogic, care confirmă metodele de studiu utilizate.

A. NICOLAIDE

621.3.011.538.3.517.54

Rezolvarea cîmpurilor bidimensionale cu simetrie periodică prin metoda transformărilor conforme

(în l. germană)

Studiul cîmpurilor bidimensionale cu simetrie periodică prezintă interes în numeroase aplicații, în special în studiul canalelor magnetohidrodinamice ale generatoarelor cu electrozi segmentați.

Un mijloc important pentru studiul acestor probleme este metoda reprezentărilor conforme. Rezolvarea acestor probleme a fost efectuată în literatură cu ajutorul formei clasice a teoremei Schwarz-Christoffel, dar sînt necesare numeroase calcule și transformări intermediare.

Autorul dă în lucrarea de față, pentru expresiile transformărilor conforme în aceste cazuri, expresii și demonstrații simple care nu sînt cunoscute în literatură. Se arată cum rezultatele obținute în literatură, care necesită un volum mare de calcule, pot fi obținute imediat.

C. I. MOCANU

621.3.011.538.542.537.226.3

Cîmpul magnetic staționar al conductoarelor drepte paralele cu o placă infinită

Se rezolvă analitic exact problema cîmpului magnetic stabilit de fire și de conductoare drepte parcurse de curent continuu și paralele cu o placă de extensiune infinită a în lungime și lățime. Evitîndu-se dezvoltarea în integrală Fourier, soluțiile problemei fir-placă se deduc din soluțiile problemei fir-tub circular.

MARCEL SAND, AURELIAN CRĂCIUNESCU, SORIN BUCURENCIU

C. Z. 621.375.3:530.182

Criteriile de similitudine și calculul releelor magnetice fără contacte

În lucrare se stabilesc criteriile de similitudine și dependențele criteriale experimentale necesare pentru calculul unui releu magnetic fără contacte prin metoda modelizării fizice. Se examinează cazul releului magnetic realizat dintr-un amplificator magnetic cu reacție internă,

prevăzut cu o înfășurare de reacție pozitivă după curent. Se prezintă modul de utilizare a dependențelor criteriale experimentale atît pentru determinarea parametrilor constructivi optimi ai unui releu magnetic avînd caracteristici impuse, cît și pentru predeterminarea caracteristicii statice a unui releu de construcție dată. Printr-un exemplu de calcul se ilustrează cele două aspecte ale folosirii metodei modelizării fizice la calculul unui releu magnetic fără contacte.

SHYAMAL KUMAR CHATTERJEE

537.228.1 : 621.316.7

Notă asupra răspunsurilor electrice și mecanice într-un traductor plat piezoelectric supus la o acțiune volumică

Se obțin atît semnalul electric produs de o forță mecanică variind în trepte, cît și semnalul mecanic produs de o variație în trepte a tensiunii aplicate unui traductor piezoelectric supus la o acțiune volumică (forță distribuită în volum).

V. V. GHIA

662.921 : 536.33

Determinarea factorului de emisie al pereților spațiului de lucru al cuptoarelor în funcțiune

Se propune un procedeu de determinare a factorului total de emisie ε al pereților incandescenți ai cuptoarelor experimentale și chiar a cuptoarelor în exploatare. Se deduc relațiile de calcul ale factorului ε și se analizează precizia de determinare pe baza datelor experimentale.

D. GRECOV, I. MINEA, EL. DAMĂCEANU, G. STURM

662.533

Repartiția vitezei în stratul fix de particule din reactorul chimic

Se prezintă curgerea fluidului gazos într-un model de reactor chimic cu pat fix de catalizator, metodele de măsură a variațiilor de viteză în strat și distribuția timpului de rezidență în reactor și în stratul de catalizator.

CS. NAGY, S. MANEA

620.9

Contribuții la stabilirea modelului matematic și la alegerea indicatorului de corelare pentru prognoza necesarului de energie

În prezenta lucrare, după o analiză a indicelui producției industriale din punctul de vedere al corelării cu consumul de energie, se tratează cinci relații diferite utilizate în practica prognozei necesarului de energie. O perioadă mai lungă cunoscută se împarte într-o perioadă de bază și una de prognoză și rezultatele prognozelor se compară cu realizările din anii respectivi.

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

1970

INDEX ALFABETIC

Economie energetică

	Nr.	Pag.
CARACUDOVICI VICTOR, S. MANEA, G. PANAITESCU, G. TROIA, M. WEISS, Contribuţii la îmbunătăţirea calităţii prognozelor consumului de energie din industrie	3	515
COGĂLNICEANU ALEXANDRU, R. EGYED, Preliminarea formei curbelor de sarcină	2	237
CONSTANTINESCU LIDIA (v.) C. HAIDUC	2	259
EGYED RODICA (v) A. COGĂLNICEANU	2	237
ELEFTERESCU MARIUS, Consideraţii privind acoperirea necesarului de energie primară	3	501
HAIDUC, CONSTANTIN, L. CONSTANTINESCU, D. MIHAI, Analiza eficacităţii ciclurilor de combustibil nuclear pentru reactori moderaţi cu apă grea în condiţiile din Republica Socialistă România	2	259
KOVACS ŞTEFAN, S. MANEA, Tendinţe în acoperirea necesarului de energie	4	759
MANEA SORA (v.) V. CARACUDOVICI	3	515
MANEA SORA (v) ŞT. KOVACS	4	759
MIHAI DUMITRU (v.) C. HAIDUC	2	259
NITU VASILE, Influenţa lungimii liniilor electrice asupra siguranţei schemelor electrice	2	251
PANAITESCU GEORGE (v.) V. CARACUDOVICI	3	515
TROIA GHEORGHE (v.) V. CARACUDOVICI	3	515
WEISS MARTIN(v.) V. CARACUDOVICI	3	515

Termoenergetică şi termotehnică

BARBU VIRGIL, Asupra nucleaţiei bulelor cavitaţionale	2	331
BERCEA OCTAVIAN (v.) C. A. VASILESCU	4	809
CARABOGDAN ION (v.) N. PĂNOIU	1	23
COROIU CORNEL, Interdependenţa dintre parametrii structurali şi caracteristicile energetice ale combustibililor solizi	2	287
COROIU CORNEL, Cercetări termogravimetrice privind arderea sterilului de mină de la exploatările carbonifere din Valea Jiului	3	525

	Nr.	Pag.
DELCESCU RODICA, Calculul funcțional al segmenților de piston cu considerarea pulsației	2	367
GEORGESCU RASIN, Considerații asupra mecanismului de apariție a instabilităților sub formă oscilatorie la un sistem bifazic fierbător apă-abur	2	323
GHIA V. VICTOR, N. LEMNEANU, C. JIANU, Cercetări privind diametrul maxim al picăturilor la injectoarele turbionare cu retur	1	13
GRECOV DAMIAN, I. IORDACHE, Lungimea flăcării difuzive în medii turbionare.	1	3
HAIDUC CONSTANTIN, V. VINIȚCHI, Model fizic al procesului de fierbere în condiții de reactor nuclear energetic	1	33
HAIDUC CONSTANTIN, E. LICSANDRU, Analiza termodinamică a ciclurilor cu abur saturat și a ciclurilor termice directe pentru centralele nucleare—electrice	2	307
HAIDUC CONSTANTIN, V. VINIȚCHI, Fluxul termic critic în condiții de reactor nuclear ferbător	3	541
HARBUR VITALIE (v.) C.A. VASILESCU	4	809
IORDACHE ION (v.) D. GRECOV	1	3
JIANU CONSTANTIN (v.) V.V. GHIA	1	13
KÓȘA ȘTEFAN (v.) N. PĂNOIU	1	23
KÓȘA ȘTEFAN (v.) N. PĂNOIU	2	273
LEMNEANU NICULAE (v.) V.V. GHIA	1	13
LICSANDRU ELENA (v.) C. HAIDUC	2	307
MANEA STELA (v.) C.A. VASILESCU	4	809
MIHAI DUMITRU (v.) C.A. VASILESCU	4	809
MINEA ION (v.) C.A. VASILESCU	4	809
PAPWORTH L. R., L. TEODORESCU, Stabilitatea curgerii printr-un pulverizator în timpul procesului de injecție	4	785
PĂNOIU NICULAE, I. CARABOGDAN, ȘT. KÓȘA, N. POPESCU, Influența unor caracteristici fizice ale combustibilului și mediului asupra gradului de ardere a combustibililor solizi în focarul ciclon orizontal	1	23
PĂNOIU NICULAE, ȘT. KÓȘA, Influența vitezei mediului de antrenare a suspensiei solide asupra funcționării focarului-ciclon orizontal în regim izotermic bifazic	2	273
PIMSNER VICTOR, P. TOMA, Metode de măsurare a grosimii filmelor lichide	1	34
PIMSNER VICTOR, C. A. VASILESCU, Curgerea prin conducte de secțiune variabilă cu schimb de căldură și frecare	2	299
PIMSNER VICTOR, ST. ȘTEFAN, Influența parametrilor constructivi asupra caracteristicii universale a compresorului centrifug	3	555
PIMSNER VICTOR, C. A. VASILESCU, Anamorfozarea diagramelor termodinamice	4	775
POPA BAZIL, Distribuția presiunii în injectoarele cu cameră de turbionare. Influența raportului $z.f_t/d_c^2$. Rolul frecării.	3	567
POPA BAZIL, Raportul de reglare a debitului la injectoarele cu cameră de turbionare, Dependența acestuia de parametrii geometrici ai camerei	4	801
POPESCU NICULAE (v.) N. PĂNOIU	1	23
ȘTEFAN ION (v.) C. A. VASILESCU	3	583
ȘTEFAN ION (v.) C. A. VASILESCU	4	
ȘTEFAN STERIE (v.) V. PIMSNER	3	555
ȘTEFAN STERIE, Distribuția vitezelor în stratul-limită turbulent la bordul de fugă al rețelelor statorice cu palete răsucite	4	795

	Nr.	Pag.
TEODORESCU LUCIAN, Influența unor elemente geometrice ale pulverizatorului asupra proceselor din motor	2	355
TEODORESCU LUCIAN (v.) R. L. PAPWORTH	4	785
TEODORESCU LUCIAN (v.) C. A. VASILESCU	4	809
TOMA PETRE (v.) V. PIMSNER	1	34
VASILESCU CĂLIN ADRIAN (v.) V. PIMSNER	2	299
VASILESCU CĂLIN ADRIAN, I. ȘTEFAN, Îmbunătățirea performanțelor motoarelor de autovehicul funcționînd la altitudini variabile prin corectarea avansului la declanșarea scînteii electrice	3	583
VASILESCU CĂLIN ADRIAN (v.) V. PIMSNER	4	775
VASILESCU CĂLIN ADRIAN, L. TEODORESCU, I. ȘTEFAN, V. HARBUR, ST. MANEA, I. MINEA, O. BERCEA, D. MIHAI, Corelația dintre produșii poluanți în gazele de evacuare la un motor cu aprindere prin scînteie și neuniformitatea produselor din cilindri	4	809
VINIȚCHI VICTOR (v.) C. HAIDUC	1	33
VINIȚCHI VICTOR (v.) C. HAIDUC	3	541

Electroenergetică și electrotehnică

ANTONIU S. ION, GH. DUMITRESCU, V. S. TURCU, Metodă de determinare a variației tensiunii de-a lungul unei linii electrice lungi deschisă la capăt și îndeplinind condiția Heaviside	4	856
APETREI CONSTANTIN, M. DOGARU, I. BEȘTEA, Variația excitației mașinii sincrone în regimuri dinamice	1	159
BÂRGĂUANU MIHU, Forțarea excitației la motoarele sincrone	1	169
BELEA CONSTANTIN, Algoritm pentru determinarea conducerii optime în problema timpului minim folosind dezvoltări în serie Fourier	1	191
BEȘTEA ION (v.) C. APETREI	1	159
BUCURENCIU SORIN (v.) A. CRĂCIUNESCU — Notă —	1	219
CIRIC R. ION (v.) AL. TIMOTIN	1	125
CIRIC R. ION, Expresii generale ale potențialului vector pentru cîmpurile magnetice cvasistaționare cu simetrie axială	3	591
CIVIDJIAN GRIGORE, — Reactanța de dispersie a spirei în scurtcircuit	1	97
CRĂCIUNESCU AURELIAN, S. BUCURENCIU, Asupra echivalării schemelor cu elemente saturabile. Notă	1	219
CRISTESCU DORIN (v.) C. DINCULESCU	3	615
CUPȘA ADRIAN, Calculul cîmpului magnetic din întrefierul aparatelor magnetoelectrice cu magnet interior	1	81
DINCULESCU CONSTANTIN, D. CRISTESCU, Asupra formei supratensiunilor atmosferice pe liniile de înaltă tensiune	3	615
DÎMBOIU EUGEN (v.) A. NICOLAIDE	3	633
DOBOȘ ȘTEFAN (v.) M. MARINESCU	4	937
DOGARU MIHAI (v.) C. APETREI	1	159
DUMITRESCU CHEORGHE (v.) I. S. ANTONIU	4	856
FETIȚĂ ION, Modelarea unui sistem de bare colectoare în vederea determinării parametrilor lineici R^*, L^*, C^*	3	665

	Nr.	Pag.
GHEȚARU SORIN, Stabilitatea unor sisteme discrete cu neliniarități de formă particulară	3	713
GHIȚĂ ALEXANDRU, Siguranța elementelor cu funcționare discontinuă	2	479
IONESCU CORNELIA, Forțele electrodinamice exercitate asupra unui sistem trifazat de conductoare rectilinii parcurse de curent în prezența ecranelor electromagnetice cilindrice circulare	1	109
IONESCU CORNELIA, Studiul forțelor electrodinamice în cazul unui sistem trifazat de conductoare parcurse de curent situate în interiorul unui ecran dreptunghiular subțire fără pereți despărțitori	2	415
IONESCU TUDOR, Condiții suficiente de hiperstabilitate pentru sisteme discrete cu parametrii variabili	2	459
MARINESCU MARIANA (v.) A. TIMOTIN	1	53
MARINESCU MATEI, ȘT. DOBOȘ, Pila de combustie cu hidrazină	4	937
MICU EMIL, Stabilitatea motorului sincron la variația frecvenței	3	677
MOCANU I. CONSTANTIN, Contribuții la studiul fenomenelor de difuzie normală	1	139
MOCANU I. CONSTANTIN, Regimurile tranzitorii periculare ale cîmpului electromagnetic în conductoare	2	385
NICOLAIDE ANDREI, E. DÎMBOIU, Calculul inductanțelor înfășurărilor de curent alternativ plane	3	633
NICOLAU EDMOND, Metoda transformatei integrale în sinteza radiatoarelor filiare rectilinii	2	449
NICOLAU EDMOND, Sinteza șirurilor radiante	4	919
PETCU MIRCEA, Metode de identificare a proceselor în sisteme neliniare	4	897
POMÂRLEANU MARIUS, Determinarea regimurilor staționare ale sistemelor electroenergetice pe o cale iterativă puternic convergentă	3	667
POMÂRLEANU MARIUS, Metodă operativă pentru determinarea directă a componentelor periodice și aperiodice a curenților de scurtcircuit	4	849
POPOV VASILE MIHAI, Cîteva noțiuni generale de stabilitate de interes special în teoria sistemelor automate	3	693
RĂZVAN VLADIMIR, Sinteza analitică a regulatorului optimal pentru o clasă de sisteme lineare cu argument întîrziat	1	181
SPINEI FĂNICĂ, Pătrunderea cîmpului magnetic într-un semispațiu feromagnetic conductor cu caracteristica liniarizată pe porțiuni	4	831
TIMOTIN ALEXANDRU, M. MARINESCU, Fluxul de dispersiune al unui circuit magnetic cu magnet permanent	1	53
TIMOTIN ALEXANDRU, I. R. CIRIC, Unicitatea soluțiilor și calculul puterilor în cîmpul electromagnetic cvasistaționar al sistemelor axial-simetrice	1	125
TURCU S. VIOREL (v.) I. S. ANTONIU	4	856
VARTOLOMEI MIHAI, Asupra determinării vitezei unui calculator pentru funcționarea în timp real	3	737
VASILE CORNEL, Rezolvarea problemei generale a stabilității absolute cu ajutorul teoriei hiperstabilității	2	467
VASILIU CRISTOFOR, Sinteza în punte a funcției de intrare bipătratică	1	203
VASILIU CRISTOFOR, Proprietățile transformatorului diferențial nesimetric în condiții de lucru arbitrare	4	883
WAGNER EMILIA, Calculul supratensiunilor de comutație la conectarea prin rezistență a liniilor de înaltă tensiune	2	433

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI:

Revista „Studii și cercetări de energetică și electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile : energetică generală, electroenergetică și electrotehnică, termoenergetică și termotehnică — sub formă de articole, comunicări sau note. Revista mai cuprinde și rubricile : discuții, recenzii, informații și altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări științifice și tehnice.

1. *Structura lucrării*

a) Introducerea va situa lucrarea pe fondul cunoștințelor actuale, va desemna obiectivele și indica metodele utilizate ;

b) Tratarea (despărțită pe subcapitole, numerotate după clasificarea zecimală) va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate și va discuta rezultate, erorile, posibilitățile și comoditatea aplicării ;

c) Concluziile vor sintetiza rezultatele obținute, limita lor de valabilitate și aplicațiile posibile.

2. *Forma lucrării*

a) Lucrările se predau în 3 exemplare dactilografiate la două rînduri (2000 semne de pagină), inclusiv exemplarul original fără corecturi, intervenții.

b) Se vor anexa:
Bibliografia după standardele în vigoare ; desenele pe calc și tuș, însoțite de cîte două copii și o listă a titlurilor figurilor ; un rezumat de cinci șase rînduri în limba română, și la alegere în una din limbile engleze, franceze, germană sau rusă.

b) Volumul lucrării să nu depășească circa 15 pagini.
Se primesc numai lucrări originale.

★

Manuscrisele se trimit Comitetului de redacție : București, Șos. Vitan nr. 236, sectorul 2.

ST. KOVACS, S. MANEA

620.9

TENDINȚE ÎN ACOPERIREA NECESARULUI DE ENERGIE

O dată cu creşterea rapidă a consumului de energie primară şi electrică, se constată şi o schimbare în structura purtătorilor de energie folosiţi în scopul realizării acestui consum. Pe baza unui bogat material statistic, se trag concluzii asupra tendinţelor în acoperirea cu diverşi purtători a necesarului de energie.

Se analizează, pe baza datelor oferite de bilanţul energetic, structura procentuală şi tendinţele în acoperirea necesarului de energie din România.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 759—773, Bucureşti, 1970

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU

536.71

ANAMORFOZAREA DIAGRAMELOR TERMODINAMICE

Stabilirea relaţiilor care definesc variaţiile elementare ale energiei interne, ale entropiei etc., ca şi ale schimbului de căldură şi lucru mecanic, permite elaborarea metodei de calcul a relaţiilor de transformare dintr-un triedru de referinţă într-altul a mărimilor unui sistem termodinamic omogen, de masă dată şi de natură chimică cunoscută. Relaţiile stabilite sînt exemplificate pentru triedrele utilizate frecvent.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 775—784, Bucureşti, 1970

R. L. PAPWORTH, L. TEODORESCU

621.436

STABILITATEA CURGERII PRINTR-UN PULVERIZATOR ÎN TIMPUL PROCESULUI DE INJECȚIE

În baza analizei stabilităţii funcţionale a curgerii printr-un pulverizator cu ştift şi a proceselor fizice, se formulează modelul matematic şi, respectiv, se definesc domeniile de funcţionare stabilă în timpul unei singure injecţii.

Utilizînd modelarea pe calculatoare numerice sau hibride se analizează variaţia domeniilor de funcţionare stabile la pulverizator în funcţie de regimul de sarcină şi de parametrii geometric semnificativi ai secţiunii de curgere, rezultatele analizei fiind prezentate în reprezentări tridimensionale.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 785—793 Bucureşti, 1970

ȘTEFAN STERIE

621.438

DISTRIBUȚIA VITEZELOR ÎN STRATUL LIMITĂ TURBULENT LA BORDUL DE FUGĂ AL REȚELELOR STATORICE CU PALETE RĂSUCITE

Lucrarea prezintă date cu privire la valoarea exponentului distribuţiei vitezei n în stratul-limită în cazul reţelelor de palete cu rapoarte $d/l < 10$.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 795—799, Bucureşti, 1970

BAZIL POPA

621.694

RAPORTUL DE REGLARE A DEBITULUI LA INJECTOARELE CU CAMERĂ DE TURBIONARE. DEPENDENȚA ACESTUIA DE PARAMETRII GEOMETRICI AI CAMEREI

Procesul de curgere este influențat de orificiile de ieșire d_e și de diametrul orificiului de retur d_r. Raportul de reglare se modifică o dată cu variația cîtului secțiunilor de curgere a fluidului.

Lucrarea a stabilit factorii de influență asupra raportului de reglare m, valoarea optimă a raportului S_e/S_r și valoarea raportului $m_{max\,max}$. Cercetările au arătat că injectoarele închise corespund unor valori mai mari ale raportului de reglare, în schimb hidrodinamica mișcării turbionare este mai puțin favorabilă.

Lucrarea recomandă pentru proiectare realizarea de injectoare avînd valoarea simplexului $d_e/d_c = 0{,}3 \ldots 0{,}4$, adică injectoarele de categoria celor apropiat închise, realizîndu-se astfel valori sporite pentru m_{max}, fără a prejudicia mișcării turbionare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 801—808, București, 1970

C. A. VASILESCU, L. TEODORESCU, I. ȘTEFAN, V. HARBUR, ȘT. MANEA, I. MINEA, O. BERCEA, D. MIHAI

621.434

CORELAȚII ÎNTRE PRODUȘII POLUTANȚI ÎN GAZELE DE EVACUARE LA UN MOTOR CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE ȘI NEUNIFORMITATEA PROCESELOR DIN CILINDRI

În lucrare se prezintă o analiză teoretică pe bază de calcule a influenței unor factori funcționali și constructivi asupra proceselor din motoarele cu aprindere prin scînteie și se corelează aceste date cu măsurătorile efectuate în laborator asupra nivelului produșilor poluanți în gazele de evacuare.

Se urmărește să se scoată în evidență ponderea cu care acești factori intervin în condiționarea neuniformității funcționale a cilindrilor motorului și, respectiv, asupra produșilor de emisie ai acestora.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 809—829, București, 1970

F. SPINEI

538.541 : 621.3.018.44

PĂTRUNDEREA CÎMPULUI MAGNETIC ÎNTR-UN SEMISPAȚIU FEROMAGNETIC CONDUCTOR CU CARACTERISTICĂ LINIARIZATĂ PE PORȚIUNI

În lucrare se obține soluția exactă pentru cazul pătrunderii cîmpului magnetic într-un semispațiu feromagnetic conductor cu caracteristică liniarizată pe porțiuni ; variația cîmpului pe frontieră este treaptă, condițiile inițiale în semispațiu fiind nule. Pentru cazul aproximării caracteristicii cu două porțiuni de dreaptă se rezolvă o serie de cazuri particulare, regăsindu-se și soluția lui Agarwal pentru cazul neliniar-limită.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 831—847, București, 1970

M. POMÂRLEANU

621.316.13.014.3

METODĂ OPERATIVĂ PENTRU DETERMINAREA DIRECTĂ A COMPONENTELOR PERIODICE ȘI APERIODICE A CURENȚILOR DE SCURTCIRCUIT

Lucrarea prezintă un procedeu cifric de calcul direct, în funcție de timp, al componentelor periodice și aperiodice ale curenților de scurtcircuit, fără calculul întregului proces tranzitoriu, și care printr-un volum redus de operații reușește să dea rezultate cu precizie mulțumitoare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 849—865, București, 1970

I. S. ANTONIU, GH. DUMITRESCU, V. S. TURCU

621.372.21

METODĂ DE DETERMINARE A VARIAȚIEI TENSIUNII DE-A LUNGUL UNEI LINII ELECTRICE LUNGI DESCHISE LA CAPĂT ȘI ÎNDEPLININD CONDIȚIA HEAVISIDE

În acest articol se prezintă o metodă de determinare a tensiunii la o linie electrică deschisă la capătul receptor $[z(p) = \infty]$, alimentată cu o tensiune constantă $U_l = E$ și satisfăcînd condiția lui Heaviside $\delta = \frac{r}{l} = \frac{g}{C}$.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 867—881, București, 1970

CRISTOFOR VASILIU

621.314.2 : 521.396

PROPRIETĂȚILE TRANSFORMATORULUI DIFERENȚIAL NESIMETRIC ÎN CONDIȚII DE LUCRU ARBITRARE

Se stabilesc proprietățile de transmisie ale transformatorului diferențial nesimetric în cele mai generale condiții de lucru și se face o comparație între transformatorul diferențial simetric și cel nesimetric.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 883—896, București, 1970

M. PETCU

517.9 : 621.316.7

METODE DE IDENTIFICARE A PROCESELOR ÎN SISTEME NELINEARE

Se face o scurtă analiză a procedeelor de studiu a sistemelor nelineare. În scopul identificării autorul arată că aceste metode pot fi folosite cu succes. Este evidențiat prin exemple că identificarea anumitor parametri pentru sistemele cu ciclu limită și intrare nulă este posibilă în aproximarea funcțiilor de descriere și cunoașterea modelului părții lineare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 897—917, București, 1970

EDMOND NICOLAU

621.396.671.001.11

SINTEZA ȘIRURILOR RADIANTE

În prima parte a lucrării se stabilesc condițiile pe care trebuie să le satisfacă caracteristicile de directivitate ale sistemelor electromagnetice radiante fizic realizabile. În partea a doua se dă o metodă proprie de sinteză a șirurilor radiante care realizează o caracteristică de directivitate dată.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 919—935, București, 1970

M. MARINESCU, ST. DOBOȘ

621.352.6 : 451.135.5

PILA DE COMBUSTIE CU HIDRAZINĂ

În prima parte a lucrării se prezintă procesele de reducere electrochimică a oxigenului și de oxidare a hidrazinei, precum și fenomenele de polarizare ce se manifestă în zona contactului triplu.

Partea a doua are un caracter practic, arătîndu-se rezultatele obținute cu electrozii realizați într-o pilă de combustie cu hidrazină.

Sînt trasate curbele caracteristice potențial/densitate de curent pentru fiecare tip de electrod încercat, precum și curbele de polarizare măsurate cu un electrod de referință din calomel pentru diverse condiții de experimentare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 937—951, București, 1970

ST. KOVACS, S. MANEA

620.9

TENDENZEN IN DER DECKUNG DES ENERGIEBEDARFES

Gleichzeitig mit dem schnellen Wachstum des Primär-und Elektroenergieverbrauches können Veränderungen in der Struktur der Energieträger, die diesen Bedarf decken, festgestellt werden. Auf Grund eines umfangreichen statistischen Materials werden Schlüsse betreffend der Tendenzen in der Deckung des Energiebedarfes mit verschiedenen Energieträgern gezogen.

Auf Grund der energetischen Bilanz, wird in der Folge die Struktur und die Entwicklungstendenzen des Primärenergieverbrauches in Rumänien analysiert.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 759—773, București, 1970

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU

536.71

ANAMORPHYSIERUNG DER THERMODYNAMISCHEN DIAGRAMME

Die Bestimmung der Beziehungen die elementaren Änderungen der inneren Energie, Entropie, u.s.w., sowie des Wärmeaustausches und der mechanischen Arbeit wiedergeben, erlaubt die Ausarbeitung der Änderungsbeziehungen der Grössen von einem Dreikantsystem in ein homogenes thermodynamisches System, einer gegebenen Masse und bekannter chemischer Natur. Die festgelegten Beziehungen sind für die bekanntesten Dreikantsysteme vorgelegt.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 775—784, București, 1970

R. L. PAPWORTH, L. TEODORESCU

621.436

STABILITY OF FLOW THROUGH AN INJECTION NOZZLE DURING THE FUEL INJECTION PROCESS

In this paper, the mathematical formulation which represents the real physical process of an injector mechanism and fuel flow is presented. Using an analog model and presenting the results of theoretical investigation in tridimensional diagrams, the different role played by the geometrical parameters of the flow section and by the charge, with regard to the stability of fuel flow through the injector, is examined.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 785—793, București, 1970

ШТЕФАН СТЕРИЕ

621.348

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ У ВЫХОДНЫХ КРОМОК СТАТОРНЫХ РЕШЁТОК С ИСКРИВЛЕНЫМИ ЛОПАТКАМИ

В статье даются данные об значение степеного коэфициента распределения скоростей n в турбулентном пограничном слое, для решеток с отношением $d/l < 10$.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 795—799, Bucureşti, 1970

B. POPA

621.694

LE RAPPORT DE RÉGLAGE DU DÉBIT AUX INJECTEURS À CHAMBRE DE TOURBILLONNEMENT. DÉPENDANCE DE CE RAPPORT DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUE DE LA CHAMBRE

Le processus d'écoulement est influencé aussi bien par les orifices de sortie d_e, que par le diamètre de l'orifice de retour d_r.

Avec la variation du quotient des sections d'écoulement du fluide, le rapport de réglage se modifie aussi.

Le travail a établi les facteurs d'influence sur le rapport de réglage m, la valeur optima du rapport S_e/S_r, de même que la valeur du rapport m_{max}. $_{max}$.

Les recherches ont montré que les injecteurs fermés correspondent à des valeurs plus grandes du rapport de réglage, tandis que, la hydrodynamique du mouvement tourbillonnaire est moins favorable.

Le travail recommande pour le projection la réalisation d'injecteurs ayant la valeur du simplex $d_e/d_c = 0{,}3-0{,}4$, c'est-à-dire des injecteurs de la catégorie de ceux, qui se rapprochent par leur valeur caractéristique des injecteurs fermés. C'est ainsi que l'on réalise des valeurs accrues pour m_{max}, sans nuire aux conditions du mouvement tourbillonnaire.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 801—808, Bucureşti, 1970

C. A. VASILESCU, L. TEODORESCU, I. ŞTEFAN, V. HARBUR, ŞT. MANEA, I. MINEA, I. BERCEA, D. MIHAI

621.434

CORRELATIONS BETWEEN POLLUTING PRODUCTS IN THE EXHAUST GASES IN THE PROCESSES OCCURRING IN CYLINDERS

This paper, using computer facilities, presents the theoretical analysis of the influence of some design parameters and functional characteristics on the spark ignition engine processes. These data are correlated with the laboratory information on the level of engine exhaust products.

The role of each of these parameters involved in the functional nonuniformity of the engine cylinders and their exhaust products is examined.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 809—829, Bucureşti, 1970

F. SPINEI

538.541:621.3.018.44

THE MAGNETIC FIELD PENETRATION INTO A CONDUCTOR FEROMAGNETIC HALF-SPACE WITH A PIECE WICE LINEAR CHARACTERISTIC

This paper gives the exact solution of the magnetic field penetration into a conductor feromagnetic half-space with a piecewice linear characteristic; the magnetic field has a step variation on the boundary and the initial conditions are zero in the half-space. When the characteristic is approximated by 2 linear segments some particular problems are solved, thus obtaining the nonlinear limit Agarwal solution as well.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 831—847, Bucureşti, 1970

M. POMÂRLEANU

621.316.13.014.3

MÉTHODE OPÉRATIONNELLE POUR LA DÉTERMINATION DIRECTE DES COURANTS DE COURT-CIRCUIT

On présente un processus numérique de calcul direct, en fonction du temps, des composantes périodiques et apériodiques des courants de court-circuit sans calculer le processus transitoire.

On obtient des résultats d'une précision satisfaisante et un volume réduit d'opérations.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 849—865, București, 1970

I. S. ANTONIU, GH. DUMITRESCU, V. S. TURCU

621.372.21

A METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE VARIATION OF THE VOLTAGE ALONG AN ELECTRIC LONG LINE OPENED AT ONE END AND SATISFYING THE HEAVISIDE CONDITION

This paper presents a method for the voltage determination along an electric line opened at one end ($Z(p) = \infty$), supplied with a constant voltage $U_1 = E$ and satisfying Heaviside's condition $\delta = \frac{r}{1} = \frac{g}{c}$.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 867—881, București, 1970

CRISTOFOR VASILIU

621.314.2 : 621.396

LES PROPRIÉTÉS DU TRANSFORMATEUR BISYMÉTRIQUE DANS LES CONDITIONS DE TRAVAIL ARBITRAIRES

On établit les propriétés du transformateur asymétrique dans les conditions de travail les plus générales.

On fait une comparaison entre le transformateur différentiel symétrique et celui asymétrique.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 883—896, București, 1970

M .PETCU

517.9 : 621.316.7

IDENTÎFICATION METHODS OF PROCESSES IN NONLINEAR SYSTEMS

After a brief description of the methods used for nonlinear systems analysis, the author considers that these can be employed for the identification of unknown parameters. It is also emphasized by examples that identification of certain parameters is possible for no input limit cycling systems.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 897—917, București, 1970

ED. NICOLAU

621.396.671.001.11

ON THE SYNTHESIS OF LINEAR ANTENNA ARRAYS

The first part establishes a realizability condition for linear antenna arrays with a given directivity pattern.

The second part suggests a new method for the synthesis of linear arrays. The given directivity pattern is written as a Fourier serie and the term $\exp(-jkd\cos\theta)$ is developed in a series of Bessel functions. An approximate solution is obtained from a system of linear algebraic equations.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 919—935, Bucureşti, 1970

M. MARINESCU, ST. DOBOŞ

621.352.015.3 : 621.3.05

LA PILE DE COMBUSTION À HYDRAZINE

Dans la première partie du travail on présente les processus de réduction électrochimique de l'oxygène et de l'oxydation de l'hydrazine, de même que les phénomènes de polarisation qui paraissent dans la zone de contact triple.

La seconde partie, ayant un caractère d'application, donne les résultats obtenus à l'aide des électrodes réalisées dans une pile de combustion à hydrazine.

On trace des courbes caractéristiques potentiel-densité de courant pour chaque type d'électrode chargée, ainsi que les courbes de polarisation mesurées à l'aide d'une électrode de référence en calomel, pour diverses conditions expérimentales.

St. cerc. energ. electr., Tom. 20, Nr. 4, p. 937—951, Bucureşti, 1970

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări**, 1968, 300 p., 22 lei.

M. BRAŞOVAN, E. SERACIN, **Metode noi de proiectare a acţionărilor electrice**, 1968, 238 p., 11 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, **Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă**, 1968, 312 p., 15 lei.

V. V. GHIA, **Recirculaţia gazelor la cuptoare**, 1968, 336 p., 29 lei.

P. DIMO, **Analiza modală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 627 p., 44 lei.

GH. CARTIANU, **Modulaţia de frecvenţă**, 1966, 693 p., 44 lei.

V. M. POPOV, **Hiperstabilitatea sistemelor automate**, 1966, 304 p., 16 lei.

S. HANCU, **Modelarea hidraulică în curenţi de aer sub presiune**, 1967, 246 p., 11 lei.

AL. NICA, **Sisteme de lubrificaţie**, 1967, 262 p., 14,50 lei.

GH. VASILCA, OLGA BIŢĂ, **Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice**, 1967, 416 p., 29 lei.

H. PASCAL, **Curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale**, 1967, 237 p., 16 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri**, 1968, 623 p., 33 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, 1968, 362 p., 24 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 238 p., 16,50 lei.

D. F. LĂZĂROIU, **Maşini electrice cu inerţie redusă**, 1969, 472 p., 29 lei.

1971 APR 1 1

I. P. „Informaţia" c. 5799

43 821

Lei 40.—